Poliedros y politopos

por

Francisco Santos Leal, Universidad de Cantabria

" ...the recent development of combinatorics is somewhat of a cinderella story: It used to be looked down on by "mainstream"mathematicians as being somehow less respectable than other areas, in spite of many services rendered to both pure and applied mathematics. Then along came the prince of computer science with its many mathematical problems and needs — and it was combinatorics that best fitted the glass slipper held out".

A. Björner, R. P. Stanley, 1999

1. Introducción

Los polígonos (dimensión dos), poliedros (dimensión tres) y *politopos* (el análogo en dimensión arbitraria) están entre los objetos geométricos más básicos que existen.

Desde pequeños estamos acostumbrados a trabajar con ellos. De hecho, las primeras "formas" que se enseñan en los "curricula" preescolares son *círculo*, *cuadrado* y *triángulo*. Por decirlo así, se trata de la distinción entre *"suave"* y *"lineal a trozos"*, así como la distinción entre distintos *tipos combinatorios* de objetos del último tipo.

Siendo esto así, es un poco llamativo cómo estos objetos luego desaparecen de los currículos de la enseñanza superior. Muchos de nuestros estudiantes, incluso de matemáticas, desconocen incluso los aspectos más básicos de la teoría de poliedros, como puede ser el hecho de que sólo existen cinco poliedros regulares (los llamados *sólidos platónicos*).

Esto en realidad responde a un mismo patrón que ocurre con toda, o casi toda, la matemática discreta, o combinatoria. Se enseña, algo, en los niveles elementales, pero desaparece después de los niveles avanzados. En el fondo, como se dice en el párrafo de Björner y Stanley que encabeza este escrito, hay un cierto menosprecio hacia la combinatoria. Es una rama "bonita y elemental", adecuada para los aspectos más recreativos de la matemática y para su divulgación, pero no es "matemática seria".

Y, sin embargo, la combinatoria es hoy día una de las ramas más importantes y activas en el ámbito de la *investigación matemática* más avanzada. Basten como ejemplo los siguientes datos:

- Tres de los cuatro últimos madallistas Fields, que fueron galardonados en el Congreso Internacional de Matemáticos de Madrid, lo fueron por sus trabajos en (entre otras cosas) combinatoria. Si el lector piensa que esta interpretación es sesgada, no tiene más que comprobar lo que Terence Tao (http://www.math.ucla.edu/~tao/) y Andrei Okounkov (http://math.berkeley.-edu/~okounkov/) dicen de sí mismos en sus páginas web. El primero usa la palabra "combinatoria" en tres de los siete "descriptores" con los que enumera su trabajo y el segundo dice literalmente que trabaja en "teoría de la representación (con un sabor combinatorio) y sus aplicaciones". El tercero es Wendelin Werner (http://www.math.u-psud.fr/ werner/) quien no dice nada de sí mismo en su página pero cuyo trabajo se puede clasificar como "teoría de probabilidad (con un sabor combinatorio) y sus aplicaciones".

- En el mismo ICM o, más bien, en la reunión del comité IMU que lo antecedió en Santiago de Compostela, se renovaron los cargos de dirección de la IMU. Fue elegido presidente László Lovász y vicepresidente Martin Grötschel. Lovász y Grötschel son, quizá, los mayores exponentes de investigación reciente en combinatoria, respectivamente en sus vertientes más puras y aplicadas, respectivamente.

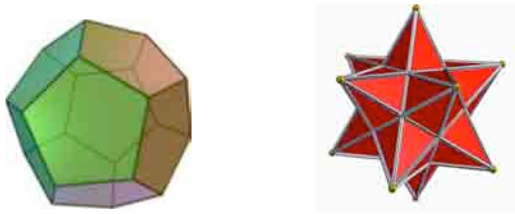
Pero me estoy desviando del tema de esta charla/resumen. Porque el objetivo de la misma sí que es **divulgativo** y (espero) **recreativo**.

2. Poliedros

Un *poliedro convexo* es la envolvente convexa de un subconjunto finito del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$. Equivalentemente, es un sólido convexo delimitado por caras planas. Un poco más delicada es la definición exacta de *poliedro no convexo*. De hecho, pendiendo de lo que uno quiera hacer con sus poliedros, necesita una definición más amplia o más restrictiva. Por ejemplo, la famosa fórmula de Euler

$$\text{caras} + \text{vértices} = \text{aristas} + 2,$$

es válida para poliedros no convexos siempre que no tengan "agujeros". (De manera técnica, siempre que tanto la superficie del poliedro como cada una de las caras sean "simlemente conexas"). Pero en este escrito, cuando decimos "poliedro" estaremos siempre refiriéndonos a "poliedros convexos".



Poliedro convexo *Poliedro no convexo*

Algunos polieros particulares aparecen muy a menudo en nuestras vidas. Uno de ellos es el *icosaedro truncado*, al cual dedican diariamente cinco o diez minutos todos los telediarios. Sus caras son 20 pentágonos regulares (habitualmente de color negro) y 30 hexágonos regulares (habtualmente blancos). También es muy usado con fines recreativos el cubo regular:

Diversos usos recreativos del cubo. Los dados de la primera imagen son babilonios

En este escrito vamos a estudiar por un lado los "poliedros" (de dimensión tres) y los llamados "politopos" (el concepto análogo en dimensión superior), centrándonos en dos cuestiones:

a) ¿Cuántas caras puede tener un poliedro o politopo?

b) ¿Qué poliedros o politopos regulares existen?

3. ¿Cuántas caras puede tener un poliedro?

Hay una primera respuesta muy sencilla:

Respuesta 1: De cuatro en adelante, un poliedro puede tener todas las caras que uno quiera.

En efecto, si construimos una pirámide sobre un polígono con n lados, tendremos un poliedro con $n + 1$ lados, y esto funciona para todo n a partir de 3.

Vale, ¿y si llamamos caras a las "cosas" de cualquier dimensión? Es decir, llamamos *0-caras* a los vértices, *1-caras* a las aristas y *2-caras* a las caras (valga la redundancia). Podemos entonces repetir la pregunta como sigue:

¿Qué ternas (v, a, c) de números naturales pueden representar los vértices, aristas y caras de un poliedro P? Al vector (v, a, c) se le suele llamar el "vector de caras" o f-vector del poliedro P. La f proviene de la palabra inglesa *face*.

Casi todos los lectores conocerán una primera condición que el f-vector de un poliedro debe satisfacer: la fórmula de Euler. En todo poliedro convexo se tiene que

$$a + 2 = v + c.$$

Ejemplos	v	a	c
Tetraedro	4	6	4
Cubo	8	12	6
Icosaedro	12	30	20
Pirámide	n + 1	2 n	n + 1
Prisma	2 n	3 n	n + 2
Icosaedro truncado	60	90	32

Esa fórmula permite reescribir el parámetro a en términos de v y c, de modo que los vectores (v, a, c) que nos interesan están todos en un "plano".

Por otro lado, es obvio que tanto v como c han de ser al menos cuatro. Pero aún hay una restricción más.

Lema: El f-vector (v, a, c) de cualquier poliedro satisface:

(1) $3c \leq 2a$, con igualdad si y sólo si todas las caras son triángulos.

(2) $3v \leq 2a$, con igualdad si y sólo si todos los vértices son trivalentes, es decir, tienen tres aristas.

Para demostrar la primera ecuación, obsérvese que si sumamos los números de lados de todas las caras estaremos contando cada arista dos veces, porque cada arista pertenece a dos caras. Es decir:

$$2a = a_1 + a_2 + ... + a_c,$$

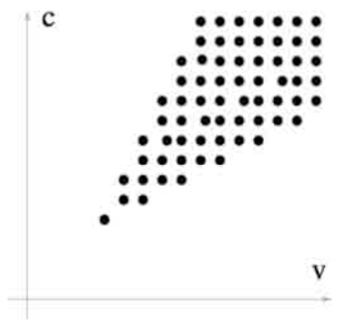
donde a_i es el número de lados de la i-ésima cara. Como a_i es al menos tres (con igualdad si y sólo si la cara es un triángulo) tenemos la desigualdad del enunciado (1). Del mismo modo, si sumamos las valencias de todos los vértices también habremos contado cada arista dos veces, porque cada arista incide en dos vértices, y de ahí deducimos el apartado (2).

El hecho de que tanto las dos ecuaciones como sus demostraciones sean análogas no es casual. Es reflejo del concepto de *dualidad* entre poliedros. Para cada poliedro, con vector de caras (v, a, c), existe un poliedro dual con vector de caras (c, a, v).

Para enunciar y demostrar el siguiente teorema nos conviene reescribir las dos desigualdades anteriores en términos sólo de v y c, sustituyendo $a = v + c - 2$. El resultado es que las desigualdades son equivalentes a que el cociente $(c-4) : (v-4)$ está entre $1/2$ y 2.

Teorema (Steinitz, 1906): el vector entero (v, a, c) es el f-vector de algún poliedro si y sólo si $a = v + c - 2$ y el cociente $(c - 4) : (v - 4)$ está entre $1/2$ y 2.

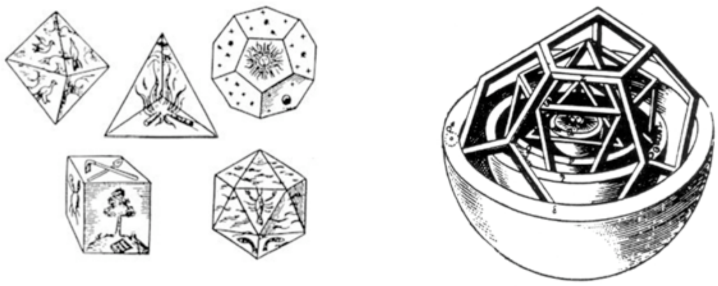
Que las condiciones son necesarias ya ha sido establecido. Para ver la suficiencia, dibujemos primero el espacio de soluciones de las ecuaciones del enunciado, en el plano $v - c$:



El "vértice" del dibujo corresponde al f-vector $(4, 6, 4)$, que es el del tetraedro. Más generalmente, los puntos de la diagonal son los f-vectores $(n, 2n - 2, n)$ de las pirámides con base un n-gono. Dejamos al lector la comprobación de que cualquier otro punto de la figura se puede obtener de uno de la diagonal sumándole un múltiplo de o bien $(2, -3, 1)$ o bien $(1, -2, 3)$. Estos dos vectores son, respectivamente, el cambio producido en el f-vector de un poliedro cuando "cortamos un vértice de grado tres" o "insertamos un vértice subdividiendo una cara triangular en tres". Por tanto, para terminar la demostración basta convencerse de que ambas operaciones se puden iterar un número indefinido de veces comenzando con una pirámide.

4. ¿Cuántos poliedros regulares hay? (Y ¿por qué?)

Un poliedro regular es un poliedro cuyos vértices tienen todos la misma valencia y cuyas caras son todas polígonos regulares con el mismo número de lados. Es bien sabido que existen sólo cinco poliedros regulares, los llamados sólidos platónicos: *tetraedro*, *octaedro*, *cubo*, *icosaedro* y *dodecaedro*.

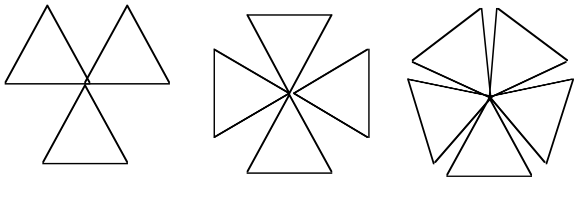


Los sólidos platónicos y su asociación con los elementos (izquierda) y las órbitas planetarias (derecha). Ambas ilustraciones son originales de Kepler

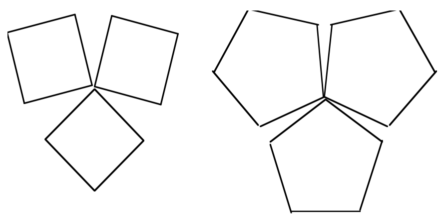
Es curioso que la lista de poliedros regulares ha querido relacionarse desde muy antiguo con propiedades profundas del mundo físico. Platón identificó cuatro de ellos con los cuatro "elementos" *agua*, *tierra*, *aire* y *fuego*, reservando el quinto (el dodecaedro) para representar el cosmos ("usado por los dioses para colocar las constelaciones en la esfera celeste"). Kepler, la mayor autoridad en astronomía de su tiempo, durante algún tiempo pensó que las órbitas de los seis planetas conocidos en su época (Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Jupiter y Saturno) podían situarse en seis esferas concéntricas cuyos radios eran precisamente los justos para que la segunda, tercera, cuarta y quinta estuvieran simultáneamente circunscrita a un poliedro regular e inscrita al siguiente. (Aunque hay que decir en su defensa que cuando sus descrubrimientos orbitales le mostraron que su modelo no era muy adecuado, entre otras cosas porque las órbitas son elípticas y no circulares, abandonó esta idea).

Pero vamos a demostrar que estos cinco son los únicos posibles poliedros regulares. Para ello, a cada poliedro regular le asociamos un par de números enteros (p, q), donde p representa la valencia de cada vértice (número de aristas que confluyen en él) y q representa el número de lados de cada cara. Es bien sabido que el ángulo de cada vértice en un polígono regular de q lados es $180 - 360/q$. Por otro lado, si tenemos un poliedro regular, los p polígonos que coinciden en un vértice dado se pueden "desarrollar" en el plano, de modo que la suma de los p ángulos en ellos es menor que 360. Veamos a qué conduce esta restricción geométrica:

- Con triángulos ($q = 3$), el número p de triángulos por vértice ha de ser tres, cuatro o cinco, porque cada ángulo es de 60 grados y la suma de ángulos alrededor de un vértice ha de ser menor que 360:



- Del mismo modo, con cuadrados y pentágonos sólo es posible colocar tres alrededor de cada vértice, porque 90 por 4 es ya igual a 360 y 108 por 4 es aún mayor:



- Con hexágonos o con más lados no es posible colocar ni siquiera tres.

Aunque el lector puede considerar que la "existencia" de estos cinco poliedros es obvia, pues los habrá visto con sus propios ojos innumerables veces, vamos a detenernos un momento en un argumento general por el cual dicha existencia puede ser garantizada "a priori". Para fijar ideas, centrémonos en el dodecaedro, aunque la demostración vale para todos ellos.

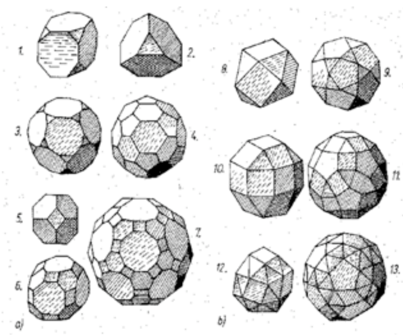
Nuestra descripción del dodecaedro como el poliedro con $(p, q) = (3, 5)$ nos dice que para construirlo necesitamos colocar tres pentágonos alrededor de cada vértice. Imaginemos los primeros tres pentágonos, todos regulares con lado de longitud unidad, colocados de manera simétrica incidentes a un vértice inicial. No sabemos, ni nos importa mucho, cuál es el ángulo diédrico con el que debemos colocar cada uno respecto al siguiente, pero un argumento de simetría nos garantiza que esto se puede hacer. Por ejemplo, comencemos con los pentágonos dispuestos en el plano de manera simétrica, como en la última figura, y levantemos el vértice central poco a poco sin romper la simetría hasta que los lados de pentágonos consecutivos coincidan. Extendamos la construcción a los vértices vecinos, y a los vecinos de los vecinos, y así "ad infinitum".

Pero surge una pregunta: ¿quién nos garantiza que al hacer esto los diferentes pentágonos que hemos ido colocando "pegarán bien" cuando lleguemos a las antípodas del punto inicial? ¿No puede ser que se solapen unos con otros en vez de darnos un poliedro? Por poner una analogía, supongamos que queremos hacer esta misma construcción para obtener los polígonos regulares. La idea sería disponer "ad infinitum" segmentos en el plano uno detrás de otro, cada uno con el mismo ángulo con respecto al anterior. Si el ángulo es de 90 grados, obtenemos un cuadrado. Más generalmente, si el ángulo es 180 - $360/n$ obtenemos un n-gono regular. Pero con un ángulo de, digamos, 100 grados, lo que obtenemos es una curva poligonal que da cinco vueltas sobre sí misma produciendo un "polígono estrellado de 18 lados". ¿Por qué en el caso del dodecaedro, en el que al ángulo diédrico no lo elegimos sino que viene dado por la construcción, no puede ocurrir algo así?

Hay una respuesta topológica. Obsérvese que en el párrafo anterior pedimos que la construcción se repita "ad infinitum". De este modo lo que obtenemos es una superficie abstracta sólo que ésta podría, a priori, constar de varias (¿infinitas?) hojas entremezcladas unas con otras. En términos de topología, si proyectamos centralmente esta superficie sobre una esfera circunscrita a toda la construcción, lo que obtendríamos sería un *"espacio recubridor no trivial de la esfera de dimensión dos"*. Pero el lector que haya estudiado algo de topología algebraica sabe que la esfera de dimensión dos no posee recubrimientos no triviales, por ser "simplemente conexa". En cambio, la circunferencia sí posee recubrimientos no triviales, lo cual da pié a la existencia de los polígonos estrellados como el del ejemplo.

(Nota: en dimensión tres existen poliedros estrellados, pero no con caras que sean polígonos "puros", sino polígonos estrellados a su vez. En el contexto topológico eso hace que el espacio recubridor sea "ramificado". La conexión simple de la esfera no impide la existencia de espacios recubridores *ramificados* no triviales).

Antes de abandonar el mundo de dimensión tres mencionemos también los poliedros "semiregulares", o "sólidos arquimedianos". En palabras de Pappus (S. IV a.C.) son "los sólidos, trece en total, descubiertos por Arquímedes, que están contenidos por polígonos equiláteros y equiangulares, pero no similares":



5. ¿Cuántos politopos regulares hay, y por qué?

Un *politopo* (convexo) de dimensión d es la envolvente convexa de un subconjunto finito S del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^d$. Envolvente convexa quiere decir el convexo más pequeño que contiene a S o, equivalentemente, el conjunto de puntos que pueden escribirse como combinación afín de los puntos de S con coeficientes positivos o nulos.

Sea como sea, los d-politopos poseen caras de dimensiones 0, 1, ..., hasta $d-1$. Las de dimensiones 0, 1, $d-2$ y $d-1$ se llaman, respectivamente, vértices, aristas, crestas y facetas. Las demás no tienen un nombre específico.

El término *politopo* lo inventó **Alicia Boole Scott** (1860 - 1940), hija de George Boole (el de las "álgebras de Boole") y geómetra aficionada. Alicia Boole tenía una magnífica "visión" del espacio 4-dimensional, y construyó modelos de los seis *politopos regulares de dimensión 4*, de los que vamos a hablar ahora.

Pero primero será bueno que demos la definición precisa de politopo regular. La traducción literal de la definición que dimos en dimensión tres sería que un *d-politopo regular es un politopo de dimensión d cuyos vértices son todos incidentes al mismo número de facetas y cuyas facetas son todas (d-1)-politopos regulares iguales*. Pero hay una cosa que no es automática y que deseamos incluir en la definición. En dimensión tres, el que el número de caras sea el mismo en todos los vértices granatiza una "simetría" absoluta entre todos ellos.

En cambio, en dimensión cuatro podría ocurrir que si tenemos seis tetraedros con un vértice común la simetría local del vértice sea "sólo" la de una bipirámide triangular. (La bipirámide triangular es el poliedro cuyas caras son seis triángulos equiláteros. La imagen "local" de este supuesto 4-politopo regular sería la de un cono sobre dicha bipirámide; podríamos visualizarlo como la partición de la bipirámide en seis tetraedros obtenida uniendo cada cara al baricentro).

Para evitar este tipo de objetos, que no son del todo regulares, introduzcamos el concepto de "figura de vértice". Dado un vértice v de un politopo P, consideremos un hiperplano afín H muy cercano a v y que separe a v de todos los demás vértices de P. Llamamos figura de vértice de P en v al politopo (de dimensión $d-1$) que se obtiene como intersección de H y P. Para aclarar el concepto, observemos que la figura de vértice de un poliedro regular de tipo (p, q) es un polígono de p lados. Además, si H es elegido adecuadamente, dicho polígono resulta regular. Dicho esto ya podemos dar una definición recursiva de politopo regular:

Un politopo regular de dimensión d es un politopo cuyas facetas son todas politopos regulares e iguales y cuyas figuras de vértice son todas (con una elección adecuada de los hiperplanos H) politopos regulares e iguales.

Fijémonos entonces en dimensión cuatro. Atendiendo a esta definición, un 4-politopo regular de dimensión cuatro debería estar caracterizado por cuatro números $((p, q), (r, s))$, donde (p, q) es el par que caracteriza a cada figure de vértice como poliedro regular, y (r, s) el que caracteriza a cada faceta. Pero hay una restricción combinatoria.

Teorema: la figura de vértice de una faceta coincide con una faceta de la figura de vértice.

La demostración de este hecho es inmediata, si observamos que las operaciones de tomar una "faceta" y una "figura de vértice" en un politopo consisten ambas en "intersecar con un hiperplano" y que, por tanto, conmutan.

Es decir, en la descripción anterior de los politopos de dimensión 4, se tiene que $q = r$. Más generalmente:

Teorema (Schläfli, 1860): A todo poliedro regular P de dimensión d se le puede asociar un vector $(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_{d-1})$ de números naturales, de modo que $(s_1, s_2, ..., s_{d-2})$ y $(s_2, s_3, ..., s_{d-1})$ son los vectores asociados a sus figuras de vértice y a sus facetas, respectivamente.

El vector de Schläfli de un n-gono es (n), y el de un poliedro regular es el par (p, q) que hemos utilizado para su clasificación.

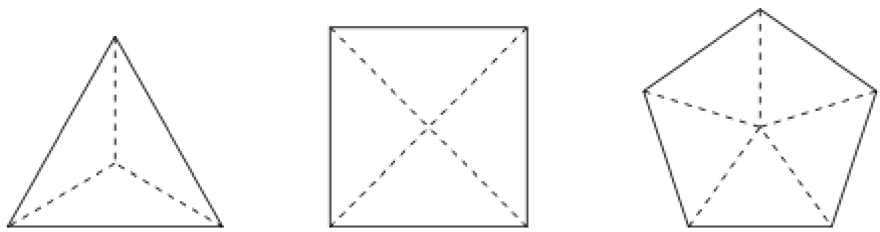
El Teorema de Schläfli restringe automáticamente el número de posibles politopos regulares de dimensión 4 a tan sólo 11. A saber, los que tienen como símbolos de Schläfli:

fig. de vértice	**3-cara (faceta)**	**símbolo de Schläfli**
tetraedro	tetraedro	$\{3,3,3\}$
tetraedro	cubo	$\{3,3,4\}$
tetraedro	dodecaedro	$\{3,3,5\}$
octaedro	tetraedro	$\{4,3,3\}$
octaedro	cubo	$\{4,3,4\}$
octaedro	dodecaedro	$\{4,3,5\}$
icosaedro	tetraedro	$\{5,3,3\}$
icosaedro	cubo	$\{5,3,4\}$
icosaedro	dodecaedro	$\{5,3,5\}$
cubo	octaedro	$\{3,4,3\}$
dodecaedro	icosaedro	$\{3,5,3\}$

Pero hasta ahora sólo hemos usado una "compatibilidad combinatoria". Nos queda por usar una "compatibilidad geométrica".

Lema: Sean F y V dos politopos regulares de dimensión $d-1$. Para que exista un politopo regular con faceta F y figura de vértice V es necesario, además de la "compatibilidad combinatoira", que el ángulo sólido en cada vértice de F sea menor que al ángulo con el que cada faceta de V se ve desde su baricentro.

Dicho de otro modo, es necesario que sea posble disponer, alrededor de un mismo punto del espacio de dimensión $d-1$, tantas copias de F como facetas tenga V. Por ejemplo, en el caso de dimensión tres y tomando como F un triángulo, lo que estamos diciendo es que el tetraedro, octaedro e icosaedro son posibles porque cada uno de los ángulos en el centro de los siguientes polígonos es mayor que 60 grados.



Con un argumento topológico ("la esfera de dimensión $d-1$ es simplemente conexa, para todo $d \geq 3$") es fácil concluir que la compatibilidad combinatoria (símbolo de Schläfli) y geométrica (ángulo sólido), además de ser necesarias, son suficientes para la existencia de un politopo regular.

Por tanto, la clasificación de los politopos regulares de dimensión cuatro queda reducida a medir ciertos ángulos (o, equivalentemente, ciertas longitudes) en los poliedros de dimensión tres.

Ejemplo (la 600-celda): El politopo regular de símbolo $(p, 3, 3)$ existe si, y sólo si, en el poliedro regular de símbolo $(p, 3)$ la longitud del lado es mayor que la distancia de cada vértice al baricentro. Con $p = 3$ y $p = 4$ es obvio que la respuesta es sí. Con $p = 5$ podemos hacer un sencillo cálculo. Es bien sabido que cada pareja de aristas opuestas de un icosaedro regular son lados de un rectángulo aúreo. Sea 1 el lado de la arista y $r = 1{,}618...$ la razón aúrea, que satisface $r^2 = r + 1$. Entonces, el diámetro del icosaedro es la raíz cuadrada de $1 + r^2 = r + 2 = 3{,}618 \approx 1{,}9^2$. La distancia del vértice al centro es la mitad de eso, o sea, ligeramente menor que uno. Por tanto, el politopo $(5, 3, 3)$ existe.

Ahora bien, el hecho de que esos dos parámetros (lado y distancia al centro) sean casi iguales (la razón es de $1 : 0{,}95$ más o menos) significa que cuando coloquemos 20 tetraedros alrededor de un vértice de $\mathbb{R}^4$ el resultado va a tener "muy poca curvatura". Es decir, vamos a necesitar muchos tetraedros para poder cerrar el politopo completo sobre sí mismo. La realidad es que el politopo regular con símbolo $(5, 3, 3)$ tiene nada más y nada menos que 600 facetas. Por esa razón se le conoce como la 600 celda.

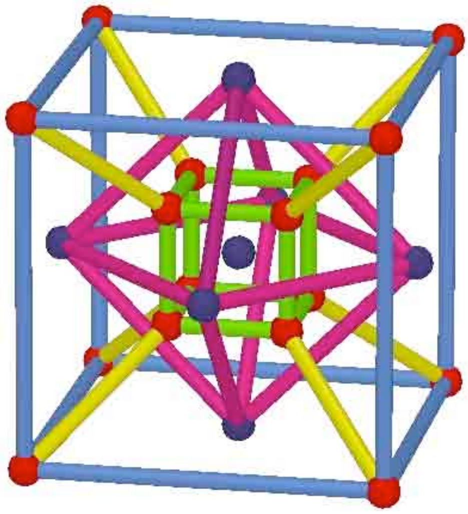
Con estas herramientas y teniendo un poco de familiaridad con los poliedros regulares, se deja al lector la comprobación de que *los únicos politopos regulares de dimensión 4 que existen son los de la siguiente lista*. Obsérvese que el método que usamos nos dice cuál es el número de Schläfli, pero no cuántas caras tendrá el poliedro final. Del mismo modo, la construcción tal como la explicamos en dimensión tres no permite predecir que el dodecaedro (o sea, el poliedro obtenido pegando tres pentágonos en cada vértice) resultaré tener 12 caras). Este dato sólo se puede obtener con métodos geométricos más finos.

Nombre	**fig. de vértice**	**faceta**	**Schläfli**	**f-vector**
símplice	tetraedro	tetraedro	$(3, 3, 3)$	$(5, 10, 10, 5)$
hipercubo	tetraedro	cubo	$(3, 3, 4)$	$(16, 32, 24, 8)$
120-celda	tetraedro	dodecaedro	$(3, 3, 5)$	$(600, 1200, 720, 120)$
hiperoctaedro	octaedro	tetraedro	$(4, 3, 3)$	$(8, 24, 32, 16)$
600-celda	icosaedro	tetraedro	$(5, 3, 3)$	$(120, 720, 1200, 600)$
24-celda	cubo	octaedro	$(3, 4, 3)$	$(24, 96, 96, 24)$

Obsérvese que esta tabla es compatible con el hecho de que el dual de un politopo regular es regular. Los pares (hipercubo, hiperoctedro) y (120-celda, 600-celda) son duales. El hipersímplice y la 24-celda son duales de sí mismos.

He aquí algunos "modelos tridimensionales" de los 4-politopos regulares:

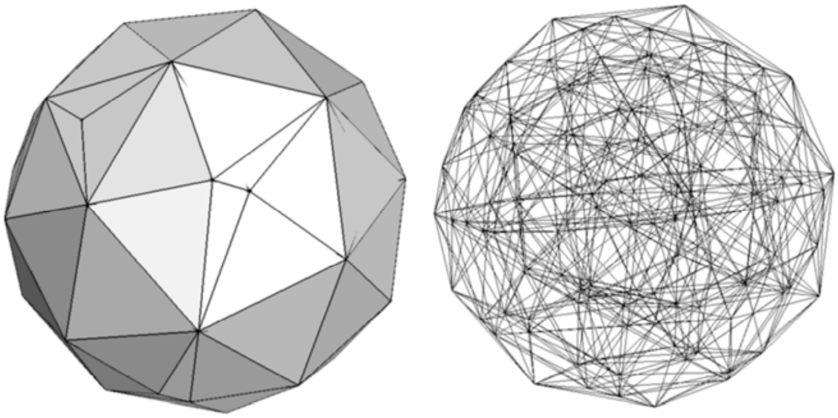
La 24-celda: Consta de 24 octaedros, 8 incidentes en cada uno de sus 24 vértices. Estos 24 vértices se pueden dividir (y de diferentes maneras, además) en los 16 de un hipercubo más los 8 de un hiperoctaedro. Esto es lo que quiere representar la siguiente figura:



La 120-celda: Consta de 120 dodecaedros, 4 incidentes en cada uno de sus 600 vértices:

Bathsheba Grossman, The 120-cell, www.bathsheba.com

La 600-celda: 600 tetraedros, 20 incidentes en cada uno de sus 120 vértices:



Politopos regulares en dimensión 5 o más: de la clasificación de los 4-politopos regulares se deducen 11 posibles símbolos de Schläfli para los de dimensión 5. A saber:

$$(3,4,3,3), \quad (3,3,4,3) \quad \text{y} \quad (p,3,3,q), \quad \text{con} \quad 3 \leq p,q \leq 5.$$

Pero la restricción geométrica ahora sólo permite tres poliedros regulares. A saber:

Nombre	**fig. de vértice**	**faceta**	**Schläfli**	**f-vector**
símplice	símplice	símplice	$(3,3,3,3)$	$(6,15,20,15,6)$
hipercubo	símplice	hipercubo	$(3,3,3,4)$	$(32,80,80,40,10)$
hiperoctaedro	hiperoctaedro	símplice	$(4,3,3,3)$	$(10,40,40,80,32)$

Que estos tres existen, no sólo en dimensión cinco sino en cualquiera, es "obvio": El hipercubo es el politopo $[-1,1]^d$, el hiperoctaedro es su dual, con dos vértices en cada eje de coordenadas, y el símplice se puede construir como pirámide sobre el símplice de una dimensión menor. Pero, lo que es más curioso, el hecho de que en dimensión cinco sólo existan estos tres, implica la misma propiedad para cualquier otra dimensión mayor. Es decir:

La lista completa de politopos regulares de todas las dimensiones consta de:

- *Los polígonos regulares de dimensión dos.*

- *El símplice, hipercubo e hiperoctaedro de dimensión arbitraria.*

- *Los cinco "politopos esporádicos" de dimensiones tres y cuatro: icosaedro, dodecaedro, 600-celda, 120-celda y 24-celda.*

6. ¿Cuántas caras puede tener un politopo?

Terminamos describiendo brevemente qué se sabe (o, más bien, qué no se sabe) sobre los posibles f-vectores de caras de poliedros de dimensión 4 o mayor.

En cualquier dimensión se tiene, en primer lugar, la fórmula de Euler-Poincaré: *la suma alternada de los números de caras de cada dimensión es 0 o 2 dependiendo de que la dimensión del politopo sea par o impar*. Es decir:

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots = 1 + (-1)^d.$$

Pero, por ejemplo, no existe hasta la fecha ninguna clasificación completa de los f-vectores de politopos de dimensión 4.

Sí se conoce la respuesta para politopos simpliciales (un politopo se llama simplicial si todas sus fcetas son símplices) y, por dualidad, para politopos simples (un politopo se dice simple si todas sus figuras de vértice son símplices).

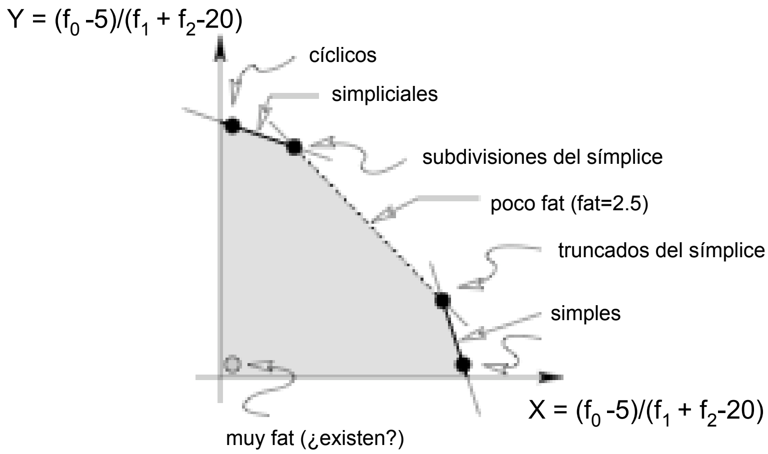
Teorema (Stanley, Billera, Lee, 1980): un vector $(f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ con coordenadas naturales es el f-vector de un d-politopo si y sólo si satisface:

(1) Las $d/2$ (si d es par) o $(d+1)/2$ (si d es impar) "ecuaciones de Dehn-Somerville". Se trata de igualdades lineales que generalizan, e incluyen, a la de Euler-Poincaré.

(2) Las $d-1$ "ecuaciones de McMullen": son desigualdades, la mitad de ellas lineales y la otra mitad de grado hasta $d/2$. Su demostración precisa conceptos avanzados de geometría y topología algebraicas.

Una pregunta abierta: ¿Existen 4-politopos en los que sea arbitrariamente grande el cociente $(f_1 + f_2)/(f_0 + f_3)$?

Al parámetro $(f_1 + f_2)/(f_0 + f_3)$ (con unas constantes de normalización) G. Ziegler lo llama "fatness" ("gordura"). No se conocen 4-politopos que lo tengan gordura mayor que 9, pero tampoco se conoce ninguna cota superior. Es bastante ilustrativo el siguiente esquema, tomado de [Ziegler, 2002]. El esquema representa los politopos de dimensión 4 mediante dos parámetros X e Y "homogéneos", de modo que si dos politopos tuvieran f-vectores (más o menos) uno múltiplo del otro aparecerían como el mismo punto en el esquema. Esto tiene sentido porque se posible pegar politopos de modo que el f-vector del resultado sea (más o menos) la suma de los f-vectores pegados.



Francisco Santos Leal
Universidad de Cantabria
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas, Estadística
y Computación
Av. de los Castros s/n, 39005 Santander
e-mail: ***santosf@unican.es***
http://personales.unican.es/santosf/