

Geometría Fractal

por

M^a Asunción Sastre, Universidad Politécnica de Madrid

1. ¿Qué es un fractal?

A finales del siglo XIX surgieron conjuntos muy irregulares que poseían propiedades geométricas y analíticas sorprendentes. El primero de estos conjuntos fue el conjunto de Cantor (1890), y a continuación aparecieron muchos otros (triángulo de Sierpinski, curva de Koch, esponja de Menger, curva de Peano, etc.). A medida que se fueron creando las herramientas matemáticas necesarias para estudiarlos y comprenderlos, la teoría de Hausdorff y la teoría de Besicovitch, fue aumentando el interés por ellos. El origen de la geometría fractal o teoría geométrica de la medida está en el estudio de estos conjuntos irregulares y sus propiedades.

La geometría fractal es por tanto una rama muy joven de la matemática y la definición de conjunto fractal no es clara ya que todas las definiciones dejan fuera conjuntos que se consideran fractales. En 1986, Mandelbrot dio una definición bastante intuitiva de conjunto fractal: “*un conjunto en que las partes son similares al total, en algún sentido*”. La definición más aceptada entre los matemáticos: “*un conjunto que tiene dimensión topológica menor que su dimensión de Hausdorff*”, no aclara mucho para aquellos interesados en la geometría fractal que no posean una buena base matemática. Lo más generalizado es considerar que un fractal es un conjunto que tiene una o varias de las siguientes propiedades:

- Tiene detalles a todas las escalas.
- Es autosemejante.
- Tiene una definición algorítmica sencilla.

- Tiene dimensión topológica menor que su dimensión de Hausdorff.

A lo largo de esta charla veremos qué significan estas propiedades y cuáles de ellas tienen los conjuntos fractales más conocidos.

En 1977 Benoit Mandelbrot publicó el libro [10] describiendo numerosas aplicaciones de este tipo de estructuras para la investigación en ciencias aplicadas. El término fractal, procedente del latín “fractus” (fragmentado, irregular), fue introducido por Mandelbrot para designar estos conjuntos que no tenían ningún nombre concreto y desde entonces se conoce esta rama de las matemáticas como geometría fractal.

Se puede decir que la geometría fractal es el lenguaje de la naturaleza. A base de repetir instrucciones sencillas (contraer, estirar, eliminar, plegar,...), se generan formas y estructuras complejas. Con la ayuda del ordenador podemos describir y generar, con una reducida cantidad de información, numerosas formas y procesos de la naturaleza como una nube, un paisaje, una planta, etc.

Por otra parte, la capacidad gráfica de los modernos ordenadores permite obtener imágenes fractales realmente espectaculares permitiendo otras aplicaciones de la geometría fractal de carácter artístico y de ocio. La generación de paisajes fractales está siendo muy utilizada en la realización de numerosas películas. Además, la generación por ordenador de imágenes fractales ha dado lugar a concursos y exposiciones en la frontera entre el arte y las matemáticas. Una muestra de esta tendencia es el grupo “*The frontier between Art and Science*” creado en 1997 (ver [w7]). Otra de las tendencias en auge es la generación de música fractal con ordenador (ver [w10]).

A continuación vamos a introducir algunos de los primeros conjuntos fractales que aparecieron a finales del siglo XIX y que podemos denominar fractales clásicos. Introduciremos alguno de los conceptos básicos de la Geometría Fractal. También introduciremos los conjuntos de Julia y de Mandelbrot, describiendo diferentes algoritmos para generar estos fractales y los llamados fractales aleatorios.

2. El Conjunto de Cantor

Georg Cantor publicó por primera vez en 1883 el conjunto que lleva su nombre, como ejemplo de cierto tipo de conjuntos excepcionales. Se puede decir que el conjunto de Cantor es el de mayor importancia entre los “monstruos matemáticos” o primeros fractales, a pesar de ser menos vistoso que otros.

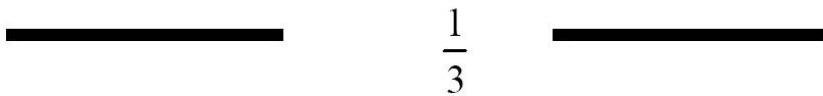


George Cantor
1845-1918

El conjunto de Cantor es un subconjunto de puntos del intervalo $[0, 1]$ que se construye a partir del siguiente proceso infinito. Partimos del intervalo unidad I_0



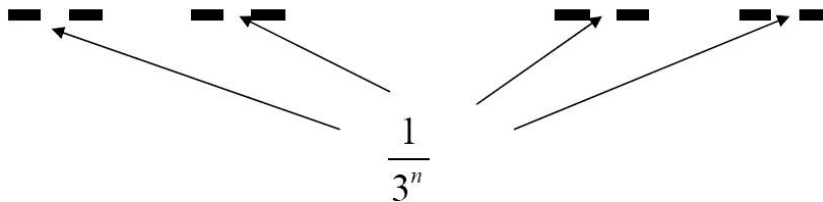
A este intervalo le quitamos el intervalo abierto central de longitud $\frac{1}{3}$, quedándonos los intervalos $I_1^1 = [0, \frac{1}{3}]$ y $I_1^2 = [\frac{2}{3}, 1]$



A cada uno de estos nuevos intervalos le quitamos a su vez el intervalo abierto central que ahora tendrá longitud $\frac{1}{9}$, obteniendo cuatro intervalos $I_2^1, I_2^2, I_2^3, I_2^4$ de longitud $\frac{1}{9}$



Así sucesivamente, en el paso n -ésimo tendremos 2^n intervalos $I_n^1, I_n^2, \dots, I_n^{2^n}$ de longitud $\frac{1}{3^n}$



El conjunto de Cantor es el conjunto de puntos que queda después de repetir este proceso infinitas veces, $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} I_n^i$.

Como las longitudes de todos los intervalos que eliminamos suman uno, pues en cada paso se eliminan 2^{n-1} intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$, que es la longitud del intervalo inicial, se tiene que el conjunto de Cantor tiene medida cero a pesar de contener la misma "cantidad" de puntos que todo el intervalo.

3. La dimensión de Hausdorff

La dimensión es una primera estimación del tamaño de un conjunto y nos indica la forma adecuada de medirlo: cantidad de puntos para dimensión cero, longitud para dimensión uno, área para dimensión dos, volumen para dimensión tres. Podemos imaginar que la dimensión es como la lente adecuada de un microscopio para ver el conjunto. Si tratamos de ver un conjunto pequeño con una lente de pocos aumentos, no lo veremos. Si los aumentos de la lente son demasiados, sólo veremos un borrón. Sólo podemos ver el conjunto con los aumentos adecuados, es decir, con su dimensión.



Felix Hausdorff
1868-1942

En el caso del conjunto de Cantor, la dimensión cero es “demasiado pequeña” (tiene infinitos puntos) y la dimensión uno es “demasiado grande” porque no nos permite “verlo”, ya que mide cero. En 1919, Hausdorff introdujo dimensiones fraccionarias y la forma de medir con estas dimensiones que generalizan las dimensiones enteras y la medida de Lebesgue. Actualmente se conocen como medida y dimensión de Hausdorff.

Aunque la definición de dimensión de Hausdorff va asociada a un proceso de medida, vamos a introducir intuitivamente la dimensión de semejanza que coincide en muchos casos con la dimensión de Hausdorff. La idea es ver cómo varía la medida de un conjunto cuando se hace una homotecia contractiva por un cierto factor r . Por ejemplo, si tenemos un rectángulo y lo reducimos por un factor $r = \frac{1}{3}$, tendremos que el rectángulo inicial se descompone en 9 rectángulos reducidos, por lo que cada uno de ellos medirá $\frac{1}{9}$ del inicial. Esto es lo que ocurre con los conjuntos de dimensión 2, si se reducen por un factor r , su medida cambia en un factor r^2 .



Análogamente, si se reduce un intervalo por un factor $r = \frac{1}{3}$, se tiene que el intervalo inicial se descompone en tres intervalos reducidos, por lo que cada uno de ellos medirá $\frac{1}{3}$ de la medida del inicial.



Es decir, cuando un conjunto de dimensión uno se reduce por un factor r , su medida cambia en la misma proporción, r^1 .

Si se repite este razonamiento para dimensión tres, se tiene que al reducirlo por un factor r su medida cambia en la proporción r^3 . Sin embargo, al reducir el conjunto de Cantor por el factor $r = \frac{1}{3}$, aparecen sólo dos partes iguales y cada una de ellas medirá $\frac{1}{2}$ de la medida del conjunto de Cantor. La idea de dimensión consiste en considerar que la medida de un conjunto que se reduce por un cierto factor r , debe cambiar su medida en la proporción r^s , siendo s la dimensión del conjunto. Apareciendo así las dimensiones fraccionarias. Puesto que el conjunto de Cantor se descompone en dos partes, las correspondientes a los intervalos $I_1^1 = [0, \frac{1}{3}]$ y $I_1^2 = [\frac{2}{3}, 1]$, semejantes al conjunto total a escala $\frac{1}{3}$, tenemos que su dimensión s será el número que cumple que $\frac{1}{3^s} = \frac{1}{2}$, es decir, la dimensión de semejanza (y también la dimensión Hausdorff) del conjunto de Cantor es $s = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309297$.

Para algunos conjuntos fractales, la dimensión de Hausdorff es muy fácil de calcular, ya que coincide con la dimensión de semejanza. Si un conjunto se descompone en n partes disjuntas y cada una de esas partes es una reducción del conjunto a escala r_k , la dimensión de Hausdorff coincide con la de semejanza y es el único valor s que verifica $r_1^s + r_2^s + \dots + r_n^s = 1$, ya que cada parte medirá r_k^s .

Cuando las n semejanzas tienen la misma razón de contracción r , la fórmula se simplifica y se tiene que $s = \frac{\log n}{\log \frac{1}{r}}$.

4. El triángulo de Sierpinski

Este conjunto fue introducido por Waclaw Sierpinski unos 40 años después que el conjunto de Cantor, como ejemplo de una curva en la que todo punto es de ramificación. La construcción geométrica del triángulo de Sierpinski es la siguiente. Se parte de un triángulo equilátero T . A este triángulo se le quita el triángulo (sin bordes) que resulta de unir los puntos medios de sus lados.



Waclaw Sierpinski
1882-1969



En este primer paso tenemos tres nuevos triángulos T_1, T_2 y T_3 .



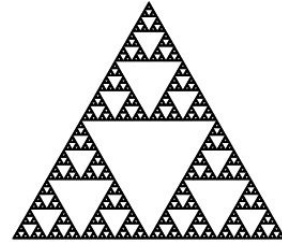
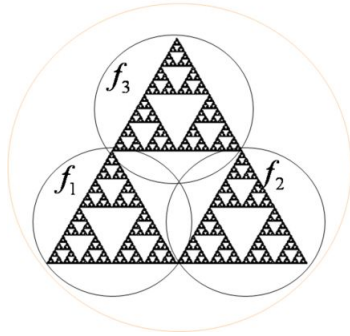
A cada uno de ellos le aplicamos el proceso anterior.



Así sucesivamente, tenemos 3, 9, 27, 81, ... triángulos, cada uno de ellos una copia a escala $\frac{1}{2}$ de los triángulos de la etapa anterior.

El triángulo de Sierpinski T es el conjunto de puntos que quedan después de aplicar este proceso infinitas veces.

Hay que observar que el triángulo de Sierpinski se descompone en tres partes, correspondientes a los tres triángulos de la primera etapa de su construcción, semejantes al conjunto total a escala $\frac{1}{2}$.



Es decir, si consideramos las tres homotecias de razón $\frac{1}{2}$ centradas en cada uno de los vértices del triángulo, se tiene que $T = f_1(T) \cup f_2(T) \cup f_3(T)$.

Esta propiedad, que es bastante general entre los conjuntos fractales, se denomina autosemejanza y nos permite calcular la dimensión de Hausdorff del Triángulo de Sierpinski que es $s = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,584962$.

5. Juegos del caos

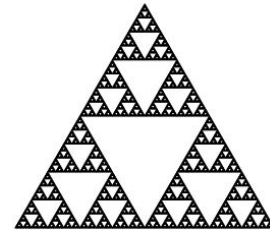
El triángulo de Sierpinski también surge como proceso límite de lo que Michael Barnsley llamó el Juego del Caos, que describimos a continuación:

- Se toma un punto P arbitrario del plano.
- Se tira un dado.
- Si sale 1 ó 2 se dibuja un nuevo punto a mitad de camino entre el punto inicial y el punto $A(0, 0)$, si sale 3 ó 4 se dibuja un nuevo punto a mitad de camino entre el punto inicial y el punto $B(1, 0)$, y si sale 5 ó 6 se dibuja un nuevo punto a mitad de camino entre el punto inicial y el punto $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- Este juego de tirar el dado y acercarse a uno de los tres puntos A , B o C se repite con el nuevo punto P_1 obtenido.
- Se itera este proceso tantas veces como puntos se deseen obtener.

Aparentemente, este juego debería proporcionarnos una nube amorfa de puntos, sin embargo, el resultado con 10.000 iteraciones, se puede ver en la siguiente figura.

La explicación de que con el juego del caos se llegue al triángulo de Sierpinski se debe al *teorema del*

punto fijo. El espacio de los compactos con la métrica de Hausdorff es completo. La función definida por $f = f_1 \cup f_2 \cup f_3$ es contractiva. Existe un único conjunto compacto T que es fijo para f y para cualquier compacto K se tiene que $f^n(K)$ tiende a T .





Variando los puntos a los que nos podemos acercar en cada iteración, la distancia a la que nos acercamos (no necesariamente $\frac{1}{2}$) y la probabilidad asignada para elegir el vértice, se obtienen diferentes fractales como el helecho de Barnsley que se muestra en la figura.

6. La curva de Koch

La curva de Koch fue introducida por Helge von Koch en 1904 y es un ejemplo de una curva que no tiene tangente en ningún punto.

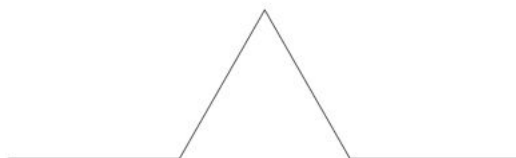
Para construir la curva de Koch consideramos el intervalo unidad.



Niels Fabian
Helge Von Koch
1870-1924



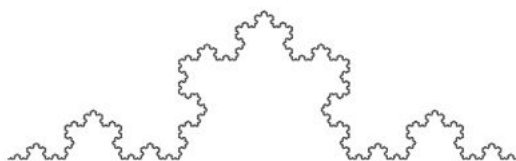
Reemplazamos el intervalo central de longitud $\frac{1}{3}$ por dos segmentos de la misma longitud formando un ángulo de 60 grados.



En cada uno de los 4 intervalos que se han formado, repetimos la operación.



Así sucesivamente. La curva de Koch es el límite de este proceso infinito.



La dimensión de Hausdorff de la curva de Koch es $s = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26185$, ya que es autosemejante con cuatro partes semejantes al total, a escala $\frac{1}{3}$.

7. Fractales aleatorios. Movimiento Browniano

El botánico británico Robert Brown describió en 1827 el movimiento de ciertas partículas de polen en suspensión como una sucesión de pasos de longitud y dirección aleatorias. En 1923, Wiener construyó un modelo matemático de tipo aleatorio que describe el movimiento browniano de forma muy satisfactoria y se puede generalizar a movimientos en cualquier espacio n -dimensional. Este modelo, que también se llama por extensión movimiento browniano, refleja el comportamiento de varios fenómenos naturales en los que interviene el azar. Aquí nos centraremos únicamente en su aplicación a la modelización de formas de la naturaleza de carácter fractal, como los paisajes, islas, perfiles de montañas, etc.

Un movimiento browniano, como todo movimiento, es continuo, pero sus constantes cambios de dirección hacen que no sea diferenciable, al igual que ocurre con la curva de Koch. Sin embargo, las características de regularidad del movimiento browniano son muy diferentes a las de la curva de Koch. Estas regularidades son de carácter estadístico en lugar de geométrico.

8. Desplazamiento del punto medio

Vamos a considerar el movimiento browniano unidimensional, es decir, el movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de una recta en sentido positivo o negativo aleatoriamente. El método del desplazamiento del punto medio se utiliza para modelizar perfiles montañosos y se extiende con facilidad a espacios de más dimensiones, permitiendo modelizar paisajes.

Consideramos el movimiento browniano $x(t)$ siendo t el tiempo que varía en $[0, 1]$. Representaremos el movimiento en unos ejes coordenados en los que el eje horizontal será el tiempo y el vertical $x(t)$. El algoritmo consiste en alterar la posición en un punto intermedio calculando el valor medio de los extremos más un cierto valor aleatorio gaussiano que puede ser positivo o negativo.

El algoritmo de desplazamiento del punto medio es el siguiente:

- Definimos una distribución gaussiana en $[-1, 1]$, según la cual obtendremos todos los números aleatorios que necesitemos.
- Hacemos $x(0) = 0$ y seleccionamos un número aleatorio $x(1)$.
- Dibujamos el segmento entre los puntos $(0, x(0))$ y $(1, x(1))$.
- Dividimos el intervalo de tiempo en dos iguales y calculamos el valor $x(\frac{1}{2})$ como la media entre $x(0)$ y $x(1)$ más un valor d_1 aleatorio reescalado

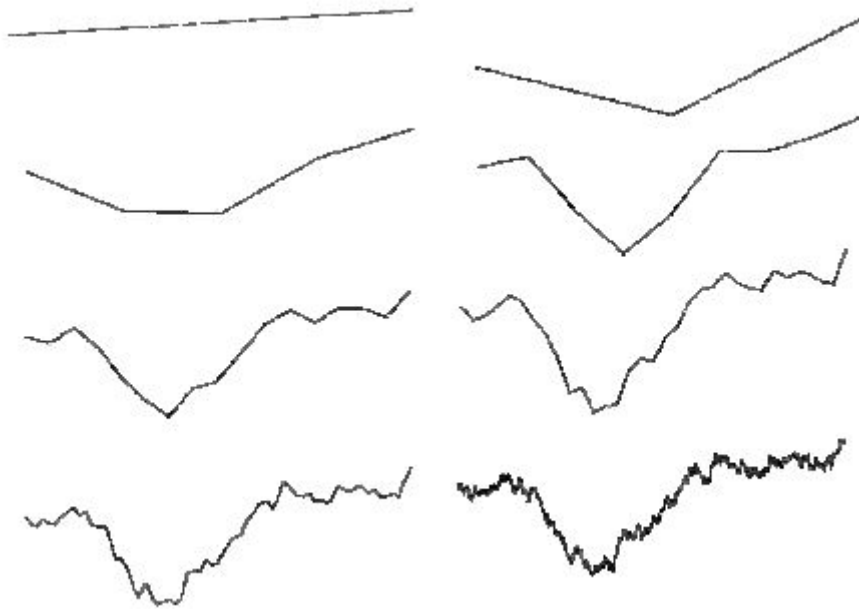
por $\frac{1}{2}$.

- Se borra el segmento y se pintan dos nuevos con el valor calculado $x(\frac{1}{2})$ y los anteriores $x(0)$ y $x(1)$. Cada intervalo de tiempo se divide en dos iguales y los valores $x(\frac{1}{4})$ y $x(\frac{3}{4})$ se calculan como la media de los valores en los extremos más dos valores aleatorios d_{21} y d_{22} reescalados por $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

- Se borran los segmentos anteriores y se pintan los que se obtienen con los nuevos valores y los anteriores.

- Se repite el proceso n veces, utilizando como factor de escala $\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}$ para obtener el número aleatorio d_{nk} , para $k = 1, 2, \dots, 2^n$.

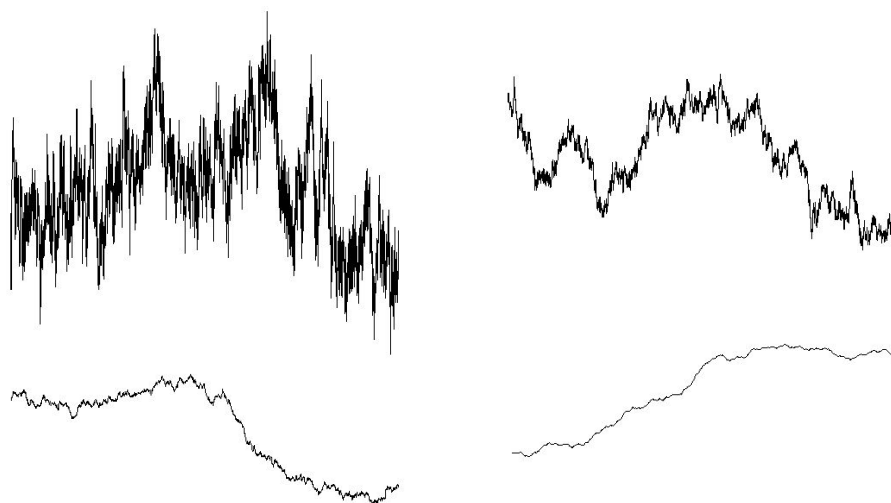
La figura siguiente muestra los primeros pasos del algoritmo.



Introduciendo un exponente H entre 0 y 1, conocido como exponente de Hurst, se obtienen los llamados movimientos brownianos fraccionarios. La relación del exponente de Hurst con la dimensión de Hausdorff es $D = 2 - H$.

Para simular movimiento browniano fraccionario podemos utilizar el algoritmo de desplazamiento del punto medio, con una ligera variación. El factor de escala inicial que multiplica al número aleatorio que se utiliza para calcular $x(\frac{1}{2})$ es $\sqrt{1 - 2^{2H-2}}$ y en los siguientes pasos debe ir multiplicándose por $\frac{1}{2^H}$.

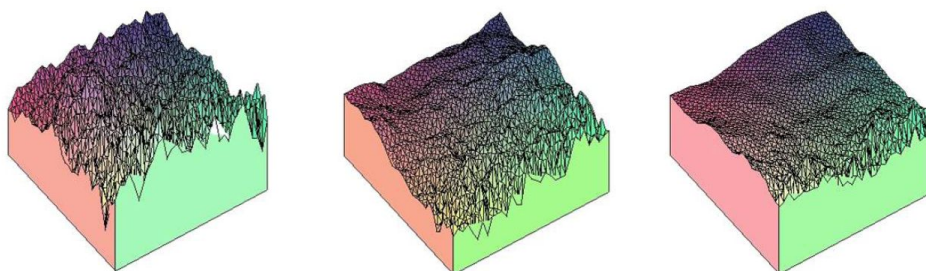
Se puede observar que si el exponente de Hurst está cerca de cero, los perfiles se hacen muy escarpados, mientras que según se acerca a uno, se suavizan notablemente, como se muestra en las siguientes figuras. Cuando $H = \frac{1}{2}$, se tiene el movimiento browniano clásico.



Movimiento browniano fraccionario con exponentes de Hurst 0.2, 0.4, 0.6 y 0.8

La generalización del movimiento browniano a dimensiones mayores se puede hacer con facilidad a partir del algoritmo de desplazamiento del punto medio. Esto nos permitirá generar paisajes. El algoritmo consiste en aplicar el algoritmo de desplazamiento del punto medio en cada uno de los lados de una rejilla triangular.

Nuevamente, podemos generar un paisaje más o menos escarpado dependiendo del exponente de Hurst, que en el algoritmo se traduce en el factor de escala del número aleatorio que se va generando, como se muestra en las siguientes figuras.

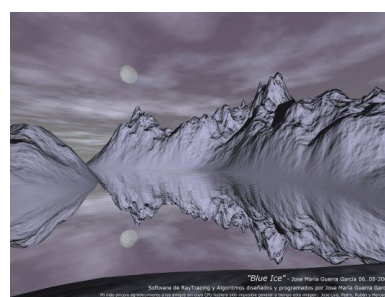


Movimiento browniano fraccionario 3D con diferentes exponentes de Hurst

Variaciones sobre el color que se asigna a cada franja de altura permiten generar diferentes imágenes. Por ejemplo, una gama de verde para alturas pequeñas, haciéndose más oscuro según aumenta la altura; una gama de marrón para alturas mayores y blanco a partir de una cierta elevación, se consiguen imágenes muy realistas. Otra variación es utilizar una gama de verde o marrón para alturas positivas y una gama de azul para alturas negativas, generando así la imagen de un posible paisaje.

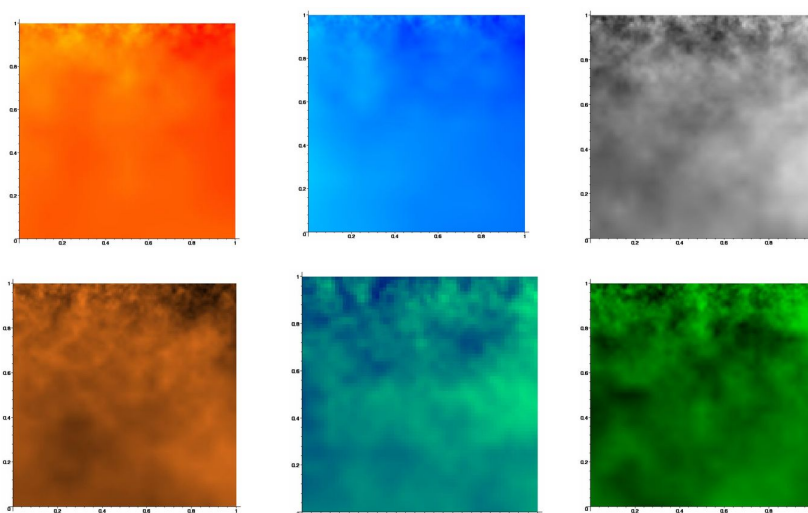


Iñigo Quílez Les, *Resplandor*, I Concurso Nacional Imágenes Fractales



José María Guerra García *Blue Ice*, Primer premio 2000

Una opción diferente es utilizar gamas de color para generar texturas: nubes, fuego, madera, humos, etc. Por ejemplo, con una gama de azul y blanco se generan nubes. Con una gama de rojos y amarillos se puede generar la textura del fuego.



Texturas

9. Conjuntos de Julia y Mandelbrot

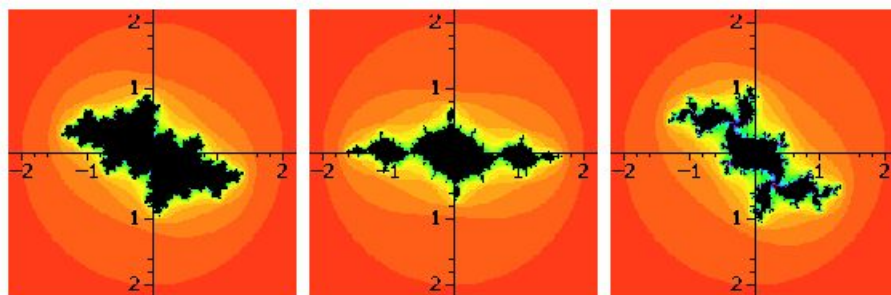
Consideremos la transformación del plano complejo \mathbb{C} en sí mismo dada por $f_c(z) = z^2 + c$, donde c es un número complejo. Es claro que si z es grande, la órbita de z , es decir la sucesión de puntos $z_n = f_c^n(z)$, diverge a infinito. La frontera de la región de atracción de infinito es el conjunto de Julia $\mathcal{J}(f_c)$.

Para $c = 0$ se tiene que $\mathcal{J}(f_0)$ es la circunferencia unidad.



Gaston Julia
1893-1978

Como el exterior del conjunto de Julia está formado por los puntos cuya órbita diverge a infinito, podemos representarlo asignando a los puntos del exterior diferentes colores en función de esta velocidad de divergencia. De esta manera y variando c obtenemos diferentes conjuntos de Julia.



Conjuntos de Julia para $c = -0,5 + 0,5i$, $c = -1,1 + 0,1i$ y $c = -0,2 + 0,75i$

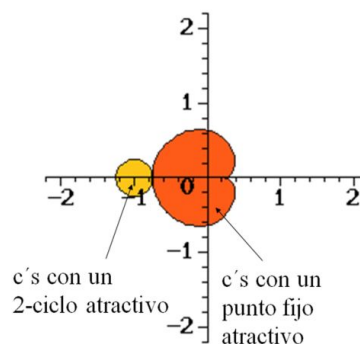
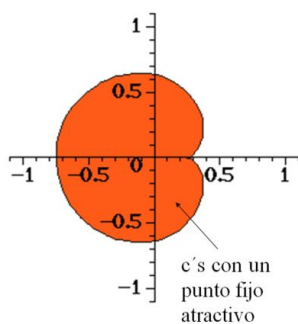
El conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} se define como el conjunto de parámetros c del plano complejo \mathbb{C} para los que el conjunto de Julia asociado a f_c es conexo. Para estudiar si el conjunto de Julia es conexo para un cierto valor c , se comienza estudiando si la función $f_c(z)$ tiene puntos fijos atractivos, es decir, cuando la derivada de la función tiene módulo menor que uno en el punto fijo. Como los puntos fijos son $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$ y $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$, hay un punto fijo



Benoit
Mandelbrot

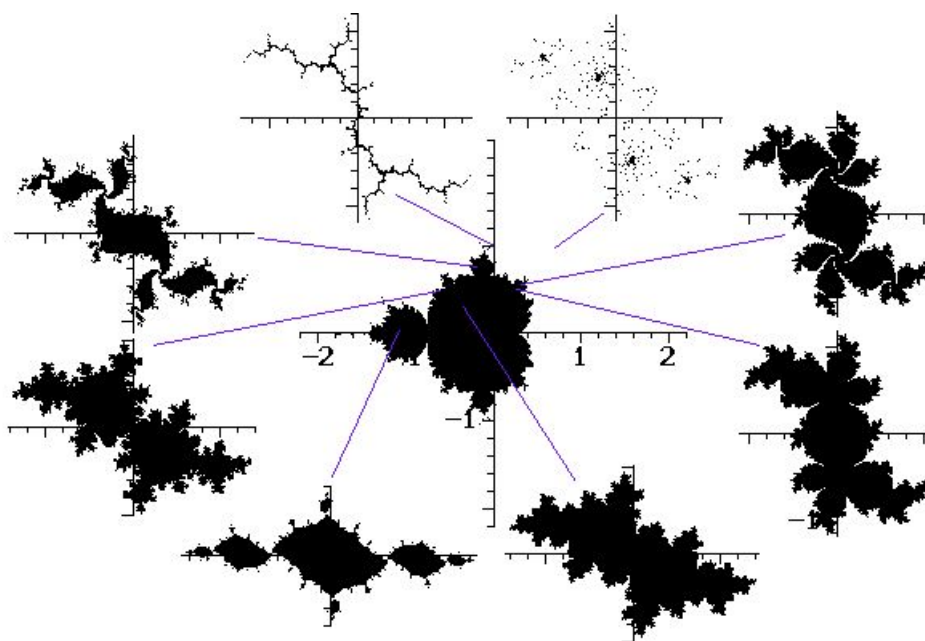
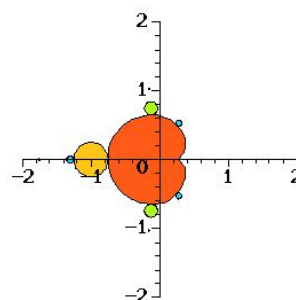
atractivo si y sólo si c está en la cardioide de ecuación $z = \frac{1}{2} \exp i\theta - \frac{1}{4} \exp 2i\theta$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Análogamente, un punto k -periódico (fijo para f_c^k , y cuya órbita es un ciclo de k puntos), es atractivo si la derivada de f_c^k tiene módulo menor que la unidad en dicho punto. Los puntos 2-periódicos son $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3-4c}$ y son atractivos si y sólo si c está en la circunferencia $|c+1| < \frac{1}{4}$.



Así sucesivamente se puede calcular dónde hay 3-periodos atractivos, 4-periodos, etc.

Aunque esta definición no es adecuada para computar imágenes del conjunto de Mandelbrot, nos permite entender el conjunto de Mandelbrot como un “mapa” de los conjuntos de Julia, como se muestra en la figura de debajo.

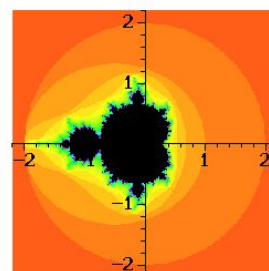


Para realizar imágenes del conjunto de Mandelbrot con el ordenador se utiliza la siguiente caracterización: el conjunto \mathcal{M} coincide con el conjunto de parámetros c del plano complejo para los que la órbita $f_c^k(0)$ está acotada. Este resultado es la base del conocido algoritmo de tiempo de escape que se describe a continuación.

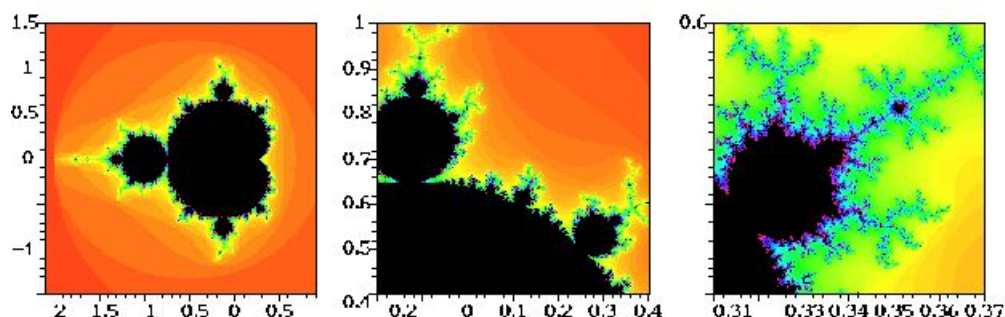
10. Algoritmo de tiempo de escape

Se considera un número N del orden de 100, y para cada c de la ventana que vamos a dibujar (eligiendo ventanas más pequeñas, se representa un zoom del conjunto), computamos términos de la sucesión $f_c^k(0)$. Si los N primeros términos no salen del círculo de centro cero y radio dos, se decide que C está en \mathcal{M} y se pinta en negro. Si, por el contrario, para un número $k < N$ algún término de la sucesión “escapa” del círculo anterior, se interrumpe la compu-

tación para ese c y se determina que está fuera de \mathcal{M} . Si a cada número k entre cero y N se le asigna un color y se representa cada número c en el color que corresponde al primer k tal que $f_c^k(0)$ sale del círculo, es decir, el momento en el que se “escapa” de la zona acotada, se obtienen las típicas imágenes del conjunto de Mandelbrot.



Esta representación sugiere que su estructura es altamente compleja. Esta complejidad se pone aún más de manifiesto si hacemos algunas ampliaciones del conjunto.



Se pueden realizar numerosas variaciones de este algoritmo, modificando la forma de asignar el color o aplicándolo a otras funciones diferentes. Por ejemplo, para que los cambios de color no sean tan bruscos, se puede introducir una función logarítmica (como en el método “dmj-Smooth” de D.M. Jones). También se puede asignar el color en relación a otras propiedades de los puntos de la órbita $f^n(c)$, como puede ser la distancia de los puntos de la órbita a una región dada, por ejemplo una astroide (método “astroid” de K.Mitchell, 1998). Hay numerosos métodos de coloreado ya implementados en programas para generar imágenes fractales, como “fractint” o “ultrafractal”, pero siempre se pueden diseñar nuevos métodos estableciendo cualquier propiedad que se nos ocurra para asignar el color. Ésta es la base para generar imágenes fractales.

Bibliografía

- [1] M.F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, 1993.
- [2] M.F. Barnsley, *SuperFractals*, Cambridge Univ. Press, 2006.
- [3] J. Barrallo, *Geometría fractal*, Anaya, 1993.
- [4] K.J. Falconer, *The Geometry of Fractal sets*, Cambridge Univ. Press, 1985.

- [5] K.J. Falconer, *Fractal Geometry. Mathematical foundations and applications*, John Wiley and Sons, 1995.
- [6] G.W. Flake, *The Computational Beauty of Nature*, MIT Press, 1999.
- [7] A. Giraldo y M.A. Sastre, *Geometría Fractal, aplicaciones y algoritmos con Maple*, Fundación general UPM, 2001.
- [8] A. Giraldo y M.A. Sastre, *Sistemas Dinámicos Discretos, Teoría, ejemplos y algoritmos*, Fundación general UPM, 2002.
- [9] M. de Guzmán, M. A. Martín, M. Morán, y M. Reyes, *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor, 1993.
- [10] B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W.H. Freeman & Co., 1977.
- [11] B. Mandelbrot, *Los objetos fractales: Forma, azar y dimensión*, Tustquets, 1987.
- [12] M. A. Martín, M. Morán, and M. Reyes, *Iniciación al caos. Sistemas Dinámicos*, Síntesis, 1995.
- [13] P. Mattila, *Geometry of sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [14] M. McGuire, *An Eye for Fractals*, Addison-Wesley, 1991.
- [15] H.O. Peitgen and P.H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer, 1986.
- [16] H.O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, *Chaos and fractals*, Springer, 1992.

Páginas web

- [w1] Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid, Páginas de los concursos Nacionales de imágenes fractales, <http://www.dma.fi.upm.es>
- [w2] Sistemas Dinámicos, Open Course Ware de la Universidad Politécnica de Madrid <http://ocw.upm.es/matematica-aplicada/introduccion-a-los-sistemas-dinamicos>
- [w3] Concurso internacional The Benoit B. Mandelbrot Fractal Art Contest 2006, <http://www.fractalartcontests.com/2006/entries.php>
- [w4] Concurso internacional The Benoit B. Mandelbrot Fractal Art Contest 2007, <http://www.fractalartcontests.com/2007/entries.php>
- [w5] Michael Frame, Benoit Mandelbrot, and Nial Neger, Fractal Geometry at Yale University, <http://classes.yale.edu/fractals>
- [w6] IBMPC's, editor. www Fractint pages, <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>
- [w7] D. M. Jones. Fractalus. <http://www.fractalus.com>
- [w8] F. Slijkerman. Ultrafractal. <http://www.ultrafractal.com>

[w9] Fractal-Art contest, Damien M. Jones

<http://www.fractalartcontests.com/>

[w10] David Strohbeen, Fractal music lab

<http://www.fractalmusiclab.com>

M^a Asunción Sastre Rosa

Universidad Politécnica de Madrid

Facultad de Informática

Departamento de Matemática Aplicada

Campus de Montegancedo

Boadilla del Monte

28660 Madrid

e-mail: [*masastre@fi.upm.es*](mailto:masastre@fi.upm.es)

<http://www.dma.fi.upm.es/sonia/>

