Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós Domínguez[1]

La sección de Historia de La Gaceta se hace eco del centenario del nacimiento del lógico y matemático austriaco Kurt Gödel.

En conmemoración de esta efeméride presentamos la traducción al español de: K. Gödel, "The present situation in the foundations of mathematics", conferencia impartida por Gödel en el congreso conjunto de la MAA y la AMS que tuvo lugar en Cambridge, Massachusetts, del 29 al 30 de diciembre de 1933, y que aparece recogida en los *Collected Works* (vol 3) de Gödel, editados por Solomon Feferman en *Oxford University Press*, pp. 45–53. Queremos expresar nuestro agradecimiento tanto a Oxford University Press como a S. Feferman, por habernos concedido su permiso para la traducción, que ha sido realizada por J. M. Almira. En su versión inglesa, este artículo está precedido (pp. 36-44) por una excelente introducción de S. Feferman, cuya lectura recomendamos encarecidamente.

Además, la sección se completa con el artículo "La obra de Gödel en lógica matemática y teoría de conjuntos" de Ignacio Jané. Este trabajo introduce al lector de La Gaceta en la obra del genial Gödel.

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: `josef@us.es`

La situación presente en los fundamentos de las matemáticas

por

Kurt Gödel

El problema de dar un fundamento a las matemáticas (y por matemáticas entiendo aquí la totalidad de los métodos de demostración utilizados actualmente por los matemáticos) puede considerarse descompuesto en dos partes distintas. Primero estos métodos de demostración tienen que ser reducidos a un número mínimo de axiomas y reglas primitivas de inferencia, que tienen que ser establecidas con tanta precisión como sea posible, y entonces, en segundo lugar, debe buscarse una justificación en uno u otro sentido para estos axiomas, esto es, un fundamento teórico del hecho de que ellos llevan a resultados que están de acuerdo entre sí y con los hechos empíricos.

La primera parte del problema ha sido resuelta de un modo completamente satisfactorio, consistiendo la solución en la llamada "formalización" de las matemáticas, lo que significa que se ha inventado un lenguaje de una precisión perfecta, mediante el cual es posible expresar cualquier proposición matemática con una fórmula. Algunas de estas fórmulas se toman como axiomas y entonces se establecen ciertas reglas de inferencia que nos permiten pasar de los axiomas a nuevas fórmulas y así deducir más y más proposiciones, siendo el aspecto más destacable de las reglas de inferencia que éstas son puramente formales, esto es, se refieren sólo a la estructura externa de las fórmulas, no a su significado, de modo que podrían ser aplicadas por alguien que no sabe nada de matemáticas, o por una máquina. [Esto tiene como consecuencia que nunca puede haber dudas sobre en qué casos se aplican las reglas de inferencia y, por tanto, se obtiene el grado más elevado de exactitud posible].

El importante hecho de que todas las matemáticas se puedan reducir a unos pocos axiomas formales y reglas de inferencia fue descubierto por Frege y Peano. Pero cuando se intentó por primera vez dar un tal sistema formal para las matemáticas, o sea, un sistema de axiomas y reglas de inferencia, surgió una seria dificultad. A saber, si los axiomas y reglas de inferencia se formulaban en el modo que parecía natural a primera vista, ellos implicaban contradicciones obvias, y se hizo claro que había que imponer ciertas restricciones en el tratamiento de los conjuntos infinitos. El modo en que estas restricciones deben realizarse parece estar exclusivamente determinado por los dos requisitos de evitar las paradojas y mantener todas las matemáticas (incluyendo la teoría de conjuntos). Al menos hasta el momento, sólo se ha encontrado una solución que verifique estos dos requisitos, aunque ya han transcurrido más de 30 años desde el descubrimiento de las paradojas. Esta solución es la teoría de tipos. (Me refiero a la teoría simple de tipos, no a la forma complicada, que requiere del axioma de reducibilidad).

Podría parecer que el sistema de axiomas de la teoría de conjuntos, como ha sido presentado por Zermelo, Fraenkel y von Neumann, suministra otra solución, pero resulta que este sistema no es otra cosa que una generalización natural de la teoría de tipos o, más bien, es en lo que se convierte la teoría de tipos si se eliminan ciertas restricciones superfluas. Esto se ve muy claramente, por ejemplo, a partir del artículo de von Neumann "Über eine Widerpruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre" [1929] y tiene lugar como sigue: La restricción sobre las reglas lógicas introducida por la teoría de tipos consiste esencialmente en esto, que la noción general de clase o conjunto es descartada y reemplazada por una serie infinita de diferentes nociones de clase. Es decir, para comenzar a hablar de clases se pide primero que un sistema de cosas (llamadas individuos) esté dado (podríamos, por ejemplo, tratar los enteros como individuos); entonces podemos formar clases de esos individuos y hablar sobre todas esas clases. Entonces puedes avanzar un paso más y formar el concepto de una clase cuyos elementos son estas clases de individuos, i.e., de una clase de clases de individuos (llamada clase de segundo tipo) y hablar de estas clases. Así puedes avanzar indefinidamente en esta jerarquía sin que jamás puedas formar la noción más general posible de clase o siquiera hablar de todas las clases. Pero, para esta jerarquía de clases, en los *Principia Mathematica* se han impuesto las siguientes restricciones, que son innecesarias desde el punto de vista de la búsqueda de un sistema formal que evite las paradojas lógicas y mantenga la totalidad de las matemáticas, que es la única cuestión que nos ocupa.

1. En los *Principia Mathematica* sólo se han admitido los llamados tipos puros, i.e., no se pueden formar clases que contengan clases de diferentes tipos entre sus elementos.
2. Las proposiciones del tipo $a \in b$ se tratan como carentes de sentido (i.e. no son ni verdaderas ni falsas) si a y b no son de tipos apropiados (si, por ejemplo, a es de tipo superior a b). Esta complicación se puede evitar sencillamente estableciendo que $a \in b$ es falso si a y b no tienen tipos apropiados.

Borrar estas primeras dos restricciones no es muy esencial, puede verse fácilmente que ninguna contradicción puede surgir de ello (y para cada proposición demostrable en el nuevo sistema existe una equivalente en *Principia Mathematica*). La situación es bastante diferente con la tercera restricción, que voy a explicar a continuación. En la teoría de Russell el proceso de pasar al siguiente tipo superior -por ejemplo, de clases de individuos a clases de clases de individuos- puede repetirse sólo un número finito de veces; es decir, a cada clase que aparece en el sistema de *Principia Mathematica* le corresponde un número finito n que indica en cuántos pasos la clase en consideración puede ser alcanzada comenzando en el nivel de los individuos. Este número n puede ser arbitrariamente grande pero debe ser finito.

Ahora bien, no existe razón alguna por la que parar el proceso de formación de tipos en este punto (como ha sido resaltado, por ejemplo, por Hilbert). Puede, por ejemplo, formarse la clase de todas las clases de tipo finito que, por supuesto, no es de tipo finito, pero podría llamarse de tipo ω. (La definición general del tipo ω sería que una clase pertenece a éste si contiene sólo clases de tipo finito entre sus elementos, pero para cada entero arbitrariamente grande n, contiene elementos de un tipo superior a n). Está claro cómo se puede continuar este proceso indefinidamente. Podemos hacer que la clase de todas las clases de tipo finito tenga una interpretación análoga a la clase de los individuos, esto es, la tomamos como base para una nueva jerarquía de tipos y, de este modo, formamos las clases de tipo $\omega + 1$, $\omega + 2$, y seguimos este proceso para cada ordinal transfinito.

Existe una objeción a este proceso de formación de clases de tipo infinito que podría haber sido una de las razones por las que Russell se abstuvo de realizarlo. A saber, que para poder establecer los axiomas de un sistema formal, incluyendo todos los tipos hasta un ordinal dado α, la noción de este ordinal α tiene que presuponerse como conocida, ya que aparecerá explícitamente en los axiomas. Por otra parte, una definición satisfactoria de los ordinales transfinitos se puede obtener dependiendo exclusivamente de los axiomas del sistema que se va a establecer. No creo que esta objeción sea seria por la siguiente razón: Los primeros dos o tres tipos ya bastan para definir ordinales muy grandes. De modo que se puede comenzar estableciendo los axiomas para estos primeros tipos, para lo cual no es necesario ningún ordinal, entonces definir un ordinal transfinito α en términos de estos primeros tipos y, por medio de él, establecer los axiomas del sistema incluyendo todas las clases de tipo menor que α (Llamémosla S_α). Al sistema S_α le podemos aplicar nuevamente el mismo proceso, es decir, tomamos un ordinal β mayor que α, que se pueda definir en términos del sistema S_α y, mediante su uso, establecemos los axiomas para el sistema S_β que incluye todos los tipos menores que β, y así sucesivamente.

El lugar que ocupa el sistema de axiomas para la teoría de conjuntos en esta jerarquía puede ser caracterizado por una cierta propiedad de cierre como sigue: Hay dos formas distintas para generar tipos. La primera consiste en avanzar desde un tipo dado al siguiente y la segunda en reunir una sucesión transfinita de tipos, como hicimos, por ejemplo, para formar el tipo ω. Ahora, la afirmación hecha por los axiomas de la teoría de conjuntos es esencialmente esto, que estos dos procesos no nos llevan fuera del sistema si el segundo proceso se aplica solamente a aquellas sucesiones de tipos que puedan definirse dentro del mismo sistema. [Es decir: si M es un conjunto de ordinales definibles en el sistema y a cada ordinal de M le asignamos un tipo contenido en el sistema, entonces el tipo obtenido agrupando esos tipos también está en el sistema]. Pero sería un error suponer que con este sistema de axiomas para la teoría de conjuntos deberíamos haber alcanzado un final para la jerarquía de tipos. Pues todas las clases que aparecen en este sistema pueden ser consideradas como un nuevo dominio de individuos y usadas como un punto de partida para la creación de tipos aún mayores. No hay final para este proceso [y la totalidad de sistemas así obtenida parece formar una totalidad de carácter similar a la del conjunto de los ordinales de la segunda clase numérica].

Así pues, estamos frente a una situación extraña. Partimos buscando un sistema formal para las matemáticas y en vez de eso encontramos una infinidad de sistemas y, cualquiera que sea el sistema que elijamos de esta infinidad, existe uno más comprehensivo, es decir, uno cuyos axiomas son más fuertes. En la práctica podemos, sin problemas, confinarnos a uno de estos sistemas (por ejemplo, el sistema para la teoría de conjuntos) porque todos los métodos y demostraciones matemáticas que se han desarrollado hasta ahora están en este sistema y, aparte de ciertos teoremas de la teoría de conjuntos, toda la matemática desarrollada hasta ahora está contenida en sistemas incluso mucho más débiles, que incluyen sólo unos pocos de los primeros tipos. Sin embargo, la situación creada por la existencia de una infinidad de sistemas, cada uno de los cuales se puede extender con más conceptos y axiomas, puede ser considerada insatisfactoria y desacreditadora de la teoría de tipos, que nos conduce a esta situación.

Pero, de hecho, este carácter de nuestros sistemas se convierte en un fuerte argumento en favor de la teoría de tipos. Pues resulta perfectamente acorde con ciertos hechos que se pueden demostrar de forma independiente. Se puede demostrar que cualquier sistema formal -esté o no basado en la teoría de tipos, siempre que esté libre de contradicción- debe ser necesariamente deficiente en sus métodos de demostración. O, por ser más exacto: Para todo sistema formal podemos construir una proposición -de hecho, una proposición sobre la aritmética de los enteros- que es ciertamente verdadera si el sistema está libre de contradicciones pero no puede ser demostrada en el sistema dado. Ahora, si el sistema bajo consideración (llamémosle S) está basado en la teoría de tipos, resulta que exactamente el siguiente tipo superior no contenido en S es necesario para demostrar esta proposición aritmética, esto es, dicha proposición se convierte en un teorema demostrable si añadimos al sistema S el siguiente tipo superior y los axiomas asociados.

Este hecho es interesante también desde otro punto de vista. Demuestra que la construcción de tipos cada vez mayores no es de ninguna manera ociosa, sino que es necesaria para demostrar teoremas incluso de una estructura simple, a saber, proposiciones aritméticas, con lo que quiero decir lo siguiente: Digo que una proposición es "aritmética" si afirma que una cierta propiedad P es verificada por todos los enteros, donde P es una propiedad que es decidible para cada entero particular mediante un procedimiento general. El teorema de Goldbach, que afirma que cada número par es la suma de dos números primos, sería, en este sentido, un ejemplo de proposición aritmética. Un caso especial del teorema general sobre existencia de proposiciones indecidibles en todo sistema formal es que existen proposiciones aritméticas que no se pueden demostrar ni siquiera con el análisis sino sólo mediante métodos que implican el uso de cardinales infinitos extremadamente grandes y cosas similares.

Ahora, volviendo a la teoría de tipos, me parece que hay un sentimiento bastante extendido entre los lógicos de que hay algo incorrecto en esta teoría y que debe existir otro método más satisfactorio de evitar las paradojas. Pienso que este sentimiento está justificado con respecto a la forma de la teoría tal como ha sido presentada en *Principia Mathematica*. Pero si se eliminan las restricciones superfluas que mencioné anteriormente, la mayoría de las objeciones que se han arrojado contra ella ya no se sostienen. [Por ejemplo, la necesidad de enunciar los axiomas lógicos separadamente para cada tipo desaparece, pues podemos introducir una variable que toma valores en cualquier conjunto de tipos dado, si eliminamos la restricción relativa a la puridad de los tipos.] Como he mencionado anteriormente, la teoría de tipos, si la entendemos en la forma más general que expliqué, es hasta ahora la única solución al problema de restringir las reglas de la llamada lógica ingenua para evitar las paradojas y mantener toda la matemática, y es muy verosímil que permanezca así. Todas las otras soluciones que se han presentado hasta ahora o bien se quedaron en vagas promesas, es decir, no se han seguido hasta el punto de establecerlas como un sistema formal, o llevaron a contradicciones.

Voy ahora a ocuparme de la segunda parte de nuestro problema, a saber, el problema de dar una justificación de nuestros axiomas y reglas de inferencia. Con respecto a esta cuestión, debe decirse que la situación es extremadamente insatisfactoria. Nuestro formalismo funciona perfectamente bien y está perfectamente libre de objeciones siempre que lo consideremos como un mero juego con símbolos, pero en el momento que adjudicamos un significado a nuestros símbolos, surgen serias dificultades. Hay esencialmente tres tipos de dificultades:

La primera está relacionada con la noción no constructiva de existencia. Es decir: amparados por los axiomas de nuestros sistemas se nos permite, por ejemplo, formar una proposición del tipo “Existe un entero que tiene cierta propiedad P” y, aunque podríamos no disponer de medios para comprobar si tal entero existe o no, aplicamos la ley del tercio excluso a esta proposición, exactamente como si en cierto reino objetivo de las ideas esta cuestión tuviera respuesta, independientemente del conocimiento humano. Este tratamiento tiene extrañas consecuencias, como cabría haber esperado desde el principio. Por ejemplo, frecuentemente podemos probar la existencia de un entero con una propiedad dada, sin que nadie sea capaz realmente de nombrar un tal entero o siquiera describir un procedimiento a partir del cual podamos obtener un tal entero (las llamadas demostraciones de existencia no constructivas).

El segundo punto flaco, que es aún más serio, está relacionado con la noción de clase. Como expliqué antes, el concepto general de clase ha sido eliminado de nuestros sistemas y descompuesto en una serie infinita de conceptos de clases de diferente tipo. Pero extraigamos de esta serie un concepto arbitrario, por ejemplo la noción de “clase de primer tipo”, esto es, una clase de enteros.

Como una clase de enteros, al menos si es infinita, sólo puede estar dada mediante una propiedad característica común a todos sus miembros, la noción de “clase de enteros” es esencialmente la misma que la de “propiedad de enteros”, y este concepto aparece como una idea primitiva en nuestros sistemas. No solo eso, sino que además las palabras “todo” y “existe” se aplican a propiedades de enteros de exactamente el mismo modo que a los enteros, utilizando por ejemplo la ley del tercio excluso. Este modo de proceder es particularmente objetable en lo referente a propiedades, porque da lugar no sólo a proposiciones existenciales no constructivas sino también al llamado método de definición impredicativa, que consiste esencialmente en esto, que una propiedad P se define mediante una afirmación de la siguiente forma: Un entero x debe poseer la propiedad P si cierta afirmación sobre x es verdadera para todas las propiedades (incluyendo a la propia P). De nuevo, como en el caso de la ley del tercio excluso, este proceso de definición presupone que la totalidad de las propiedades existe de algún modo, independientemente de nuestro conocimiento y nuestras definiciones, y que nuestras definiciones sirven simplemente para seleccionar algunas de estas propiedades previamente existentes. Si asumimos esto, el método de definición impredicativa es totalmente correcto (como ha sido destacado por Ramsey), pues no hay nada que objetar en la caracterización de un elemento particular de una totalidad previamente dada haciendo referencia a la totalidad al completo. Hacemos esto, por ejemplo, si hablamos del edificio más alto de una ciudad.

Pero la situación pasa a ser completamente diferente si tratamos las propiedades como *generadas* por nuestras definiciones. Pues es ciertamente un círculo vicioso generar un objeto haciendo referencia a una totalidad en la que este mismo objeto se supone que ya está presente. Russell, para evitar este círculo vicioso, se vio obligado a descomponer la noción de propiedad de un tipo dado en una infinidad de subtipos [de modo que una propiedad que haga referencia a cierta totalidad de propiedades, nunca pertenece a dicha totalidad]. Este mecanismo evita los círculos viciosos pero también hace imposible una teoría adecuada para los números reales, muchos de cuyos teoremas fundamentales parecen depender de forma esencial de definiciones impredicativas.

El tercer punto flaco en nuestros axiomas está relacionado con el axioma de elección, del que, sin embargo, no quiero entrar en detalles porque es de menos importancia para el desarrollo de las matemáticas.

El resultado de la anterior discusión es que nuestros axiomas, si son interpretados como afirmaciones significativas, necesariamente presuponen un tipo de Platonismo que no puede satisfacer a ninguna mente crítica y que ni siquiera produce la convicción de que son consistentes. Sin embargo, es debido a otras razones que resulta extremadamente inverosímil que ellos realmente den lugar a contradicciones. Pues las consecuencias de los métodos objetables, como las definiciones impredicativas, han sido desarrolladas en todas las direcciones, especialmente en la teoría de conjuntos y la teoría de funciones, sin haber alcanzado jamás alguna inconsistencia. Así pues, surge la conjetura de que, aunque hemos fallado en dar un significado libre de objeciones a los símbolos de nuestros sistemas formales, quizás podamos demostrar la ausencia de contradicciones mediante métodos inobjetables. Y parece razonable esperar que esto sea posible, porque la afirmación a demostrar -la afirmación de que un sistema dado es no-contradictorio- es de un carácter muy simple y no implica el uso de ninguno de los conceptos objetables, como el de “propiedad de los enteros”. De hecho, la ausencia de contradicción significa simplemente que si comenzamos con ciertas fórmulas (llamadas axiomas) y realizamos sobre ellas ciertas operaciones (dadas por las reglas de inferencia) tantas veces como deseemos, nunca obtendremos dos fórmulas contradictorias, es decir, dos fórmulas una de las cuales es la negación de la otra. En nuestra demostración de consistencia no tenemos por qué preocuparnos del significado de los símbolos de nuestros sistemas porque las reglas de inferencia nunca hacen referencia a su significado, y por tanto, la cuestión [de la consistencia] pasa a ser una cuestión de tipo combinatorio sobre el manejo de los símbolos de acuerdo con las reglas dadas.

Por supuesto, el punto clave en la deseada demostración de consistencia es que ésta debe desarrollarse según métodos absolutamente inobjetables, es decir, debe evitar las demostraciones no constructivas de existencia, las definiciones impredicativas y cuestiones similares, pues es precisamente una justificación de estos métodos dudosos lo que estamos buscando. Ahora, lo que queda de la matemática si descartamos estos métodos [y retenemos sólo aquellas cosas que se pueden construir y las operaciones que se pueden realmente llevar a cabo] es la llamada matemática intuicionista, y el dominio de esta matemática intuicionista no está de ningún modo tan unívocamente determinado como podría parecer a primera vista. Pues es cierto que hay distintos conceptos de constructividad y, en consecuencia, diferentes estratos de matemáticas intuicionistas o constructivistas. Conforme ascendemos en la serie de estos estratos, nos estamos acercando a las matemáticas ordinarias, no constructivas, y al mismo tiempo los métodos de demostración y construcción que admitimos pasan a ser menos satisfactorios y menos convincentes. El más bajo de estos estratos, esto es, la forma más estricta de matemáticas constructivas, se puede describir aproximadamente mediante las siguientes dos características:

1. La aplicación del concepto de “todo” o “cualquiera” se restringe a aquellas totalidades infinitas para las que podemos dar un procedimiento para generar todos sus elementos (como podemos hacer, por ejemplo, para la totalidad de los enteros con el proceso de formar el siguiente entero mayor, y no podemos hacerlo con la totalidad de las propiedades de los enteros).
2. La negación no se puede aplicar a proposiciones que afirman que algo se verifica para todo elemento, porque esto produciría proposiciones existenciales. O, por ser más exacto: las negaciones de las proposiciones generales (esto es, proposiciones existenciales) sólo tienen significado en nuestro sistema en el sentido de que hemos encontrado un ejemplo pero, por brevedad, no lo damos explícitamente. A saber, sirven solamente como una abreviación y podríamos deshacernos de ellas si lo deseásemos.

Del hecho de que hemos eliminado el concepto de existencia y las reglas lógicas relacionadas con él, se sigue que nos hemos quedado con esencialmente un único método para demostrar proposiciones generales, a saber, la inducción completa aplicada al proceso de generación de nuestros elementos.

Y finalmente, requerimos que podamos introducir sólo aquellas nociones que son decidibles para cualquier elemento particular y sólo aquellas funciones que puedan ser calculadas para cualquier elemento particular. Tales nociones y funciones se pueden definir siempre mediante inducción completa y, por tanto, podemos decir que nuestro sistema (lo llamaré A) está basado exclusivamente en el método de inducción completa tanto en sus definiciones como en sus demostraciones. Este método posee un grado de evidencia particularmente elevado y de ahí que sería la cosa más deseable que la ausencia de contradicciones en las matemáticas ordinarias no constructivas se pudiera probar con métodos permitidos en este sistema A. Y, efectivamente, todos los intentos de demostración de consistencia llevados a cabo por Hilbert y sus discípulos trataron de cumplir exactamente este requisito. Mas, por desgracia, la esperanza de tener éxito en esta dirección se ha desvanecido completamente a la vista de algunos hechos recientemente descubiertos. Se puede demostrar de manera bastante general que no puede existir una prueba de consistencia para un sistema formal S que pueda ser expresada en los términos del propio sistema formal S. Ahora, todas las pruebas intuicionistas que han sido construidas cumpliendo los requisitos del sistema formal A se pueden expresar fácilmente en el sistema del análisis clásico e incluso en el sistema de la aritmética clásica, y hay razones para creer que esto se mantendrá cierto para cualquier demostración que uno pueda construir.

Así que parece que ni siquiera podemos probar la consistencia de la aritmética con los métodos del sistema A porque esta demostración, si cumple con las reglas del sistema A, sería también expresable en la aritmética clásica, lo que es imposible. Sin embargo, se han obtenido resultados parciales interesantes, siendo el de mayor alcance el siguiente teorema demostrado por Herbrand: Si tomamos una teoría que es constructiva en el sentido de que cada afirmación de existencia realizada en los axiomas está apoyada por una construcción, y si añadimos a esta teoría el concepto no constructivo de existencia y todas las reglas de la lógica vinculadas a él, por ejemplo la ley del tercio excluso, nunca caeremos en contradicciones. Uno podría pensar que esto es lo que queríamos. Pero desafortunadamente en la aritmética clásica hacemos más que aplicar las reglas de la lógica (digamos, la ley del tercio excluso) a expresiones que contienen el concepto no constructivo de existencia. También aplicamos la inducción completa a estas expresiones, a saber, formamos propiedades de enteros utilizando la noción no constructiva de existencia y, para demostrar que estas propiedades pertenecen a todos los enteros, aplicamos inducción completa, y ese es el punto en el que el resultado de Herbrand falla. El método de Herbrand podría ser generalizado también a sistemas que adopten la subdivisión de Russell de tipos en subtipos pero, como mencioné antes, para sistemas mayores que contengan toda la aritmética o el análisis la situación es desesperanzadora si insistimos en dar una demostración de consistencia con los medios del sistema A.

Ahora, si observamos la matemática intuicionista tal como ha sido desarrollada por Brouwer y sus seguidores, nos percatamos de que ellos de ninguna manera se han confinado al sistema A. El primer lugar donde sus límites son transgredidos es en el concepto de "absurdo". En nuestro sistema A tenemos prohibidas las negaciones de las proposiciones generales o, debería decir, sólo las admitimos en el sentido de que realmente hemos encontrado un contraejemplo. Brouwer, sin embargo, introduce una forma distinta para negar proposiciones generales, llamada "absurdo", y por la afirmación de que una propiedad p es absurda entiende que uno ha logrado derivar a partir de p una contradicción (por supuesto, mediante los métodos intuicionistas de demostración). Ahora, podría suceder, y realmente sucede, que podamos derivar una contradicción de la proposición "para todo x, $F(x)$ es verdadero" mediante métodos intuicionistas de demostración sin que nadie sea capaz de ofrecer un contraejemplo, es decir, un x para el que $F(x)$ es falso, de modo que tenemos un perfecto sustituto para los teoremas de existencia no constructivos. Y mucho más que esto es cierto. Si investigamos los axiomas de las matemáticas intuicionistas tal como han sido establecidos por Heyting, un discípulo de Brouwer, encontramos que para la noción de absurdo se obtienen exactamente las mismas proposiciones que las que se obtienen para la negación en la matemática ordinaria –al menos, esto es cierto en el dominio de la aritmética–. Así que hemos logrado, mediante la noción de absurdo, dar una interpretación y, por tanto, también una demostración de consistencia para la aritmética clásica, que era imposible sólo con los medios del sistema A. El carácter de los axiomas asumidos por Heyting sobre el concepto de absurdo puede verse a partir del siguiente ejemplo: $p \Rightarrow \neg\neg p$, que significa: si p se ha probado, entonces la hipótesis $\neg p$ lleva a una contradicción. Esto es evidente, porque p y $\neg p$ ya constituyen una contradicción. Los axiomas de este tipo no violan el principio fundamental de las matemáticas constructivas, que sólo se puede hablar con sentido de las cosas que realmente podamos construir y las operaciones que podamos realmente llevar a cabo. Así que los axiomas de Heyting relativos al absurdo y conceptos similares sólo difieren del sistema A por el hecho de que el sustrato sobre el que las construcciones se llevan a cabo son las demostraciones en vez de los números u otros conjuntos enumerables de objetos matemáticos. Pero por este mismo hecho ellos violan el principio, que enuncié anteriormente, de que la palabra "cualquiera" es aplicable sólo a aquellas totalidades para las que disponemos de un proceso finito para generar todos sus elementos. Pues la totalidad de todas las posibles demostraciones ciertamente no posee esta cualidad y, sin embargo, la palabra "cualquiera" se aplica a esta totalidad en los axiomas de Heyting, como pueden ver con el ejemplo que mencioné anteriormente, que dice: "Dada *cualquier* demostración de una proposición p, podemos construir una reducción al absurdo para la proposición $\neg p$". Las totalidades cuyos elementos no se pueden generar mediante un procedimiento bien definido son en cierto sentido vagas e indefinidas hasta sus fronteras. Y esta objeción se aplica en particular a la totalidad de las demostraciones intuicionistas debido a la vaguedad del concepto de constructividad. Por tanto, esta fundación de la aritmética clásica mediante el uso del concepto de absurdo es de dudoso valor. Mas queda la esperanza de que en el futuro uno pueda encontrar otros métodos más satisfactorios de construcción, más allá de los límites del sistema A, que nos permitan dar un fundamento para el análisis clásico y la aritmética. Esta cuestión promete ser un fructífero campo para ulteriores investigaciones.

Traducido del inglés por J. M. Almira
Departamento de Matemáticas
Universidad de Jaén
Correo electrónico: jmalmira@ujaen.es