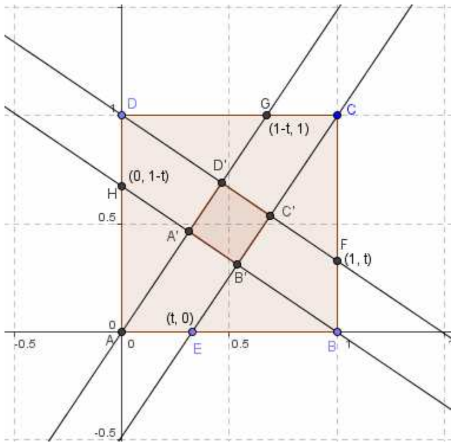
CONCURSO DEL VERANO
PAPIROFLEXIA Y MATEMÁTICAS

Consideremos el cuadrado de lado unidad, cuyos vértices son A (0, 0), B (1, 0), C (1, 1) y D (0, 1). Del lado AB, cogemos el punto E de coordenadas (t, 0). Y a partir de él, seleccionamos los puntos F (1, t), G (1 – t, 1) y H (0, 1 – t), mediante giro de 90º alrededor del centro del cuadrado unitario.

Hallamos las ecuaciones de las rectas que pasan por:



AG: $\dfrac{x-0}{1-t}=\dfrac{y-0}{1}\Leftrightarrow y=\dfrac{x}{1-t}$

BH: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-0}{t-1}\Leftrightarrow y=(x-1)\cdot(t-1)$

CE: $\dfrac{x-1}{1-t}=\dfrac{y-1}{1}\Leftrightarrow y=\dfrac{x-1}{1-t}+1$

DF: $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{t-1}\Leftrightarrow y=x\cdot(t-1)+1$

¿Cuánto tendrá que valer t para obtener el área deseada? El problema se reduce a calcular la longitud de uno de los lados de cuadrado menor, por ejemplo, el lado A’D’.

Hallemos entonces dichos puntos (A’ y D’) y calculemos su distancia.

- A’ se obtiene como intersección de las rectas AG y BH.

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{1-t} \\ y=(x-1)\cdot(t-1) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{1-t}=(x-1)\cdot(t-1)$$

$$x=(x-1)\cdot(t-1)\cdot(1-t);$$
$$x=x\cdot(2t-t^2-1)+t^2-2t+1;$$
$$(t^2-2t+2)\cdot x=t^2-2t+1;$$
$$x=\frac{t^2-2t+1}{t^2-2t+2};$$
$$y=\frac{x}{1-t}=\frac{1-t}{t^2-2t+2};$$
$$A'=\left(\frac{t^2-2t+1}{t^2-2t+2},\frac{1-t}{t^2-2t+2}\right)$$

- Del mismo modo, D’ procede de la intersección de AG y DF.

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{1-t} \\ y=x\cdot(t-1)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{1-t}=x\cdot(t-1)+1$$

$$x = x\cdot(t-1)\cdot(1-t)+1-t;$$
$$x = x\cdot(2t-t^2-1)+1-t;$$
$$(t^2-2t+2)\cdot x = 1-t;$$
$$x=\frac{1-t}{t^2-2t+2};$$
$$y=\frac{x}{1-t}=\frac{1}{t^2-2t+2};$$
$$D'=\left(\frac{1-t}{t^2-2t+2},\frac{1}{t^2-2t+2}\right)$$

El lado A'D' medirá:

$$d(A',D')=\sqrt{\left(\frac{1-t}{t^2-2t+2}-\frac{t^2-2t+1}{t^2-2t+2}\right)^2+\left(\frac{1}{t^2-2t+2}-\frac{1-t}{t^2-2t+2}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\left(\frac{t-t^2}{t^2-2t+2}\right)^2+\left(\frac{t}{t^2-2t+2}\right)^2}=\sqrt{\frac{t^4-2t^3+2t^2}{\left(t^2-2t+2\right)^2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{\cancel{\left(t^2-2t+2\right)}\cdot t^2}{\left(t^2-2t+2\right)^{\cancel{2}}}}=\sqrt{\frac{t^2}{t^2-2t+2}};$$

Podemos comprobar el resultado con el punto medio, y demostrar algebraicamente que el área es la quinta parte. Por lo tanto, la longitud del lado tiene que ser la raíz cuadrada de un quinto.

$$\sqrt{\frac{t^2}{t^2-2t+2}}=\sqrt{\frac{1}{5}};$$
$$\frac{t^2}{t^2-2t+2}=\frac{1}{5};$$
$$5t^2=t^2-2t+2;$$
$$4t^2+2t-2=0;$$
$$t=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot4\cdot(-2)}}{2\cdot4}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{8}=\begin{cases}\dfrac{-2+6}{8}=\dfrac{1}{2}\\[2ex]\dfrac{-2-6}{8}=\cancel{-1}\end{cases}$$

Resolvamos ahora los enigmas planteados.
¿Cuál será el valor de t para que el área del cuadrado interior sea la mitad que la del cuadrado mayor?

$$\sqrt{\frac{t^2}{t^2-2t+2}}=\sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{t^2}{t^2-2t+2}=\frac{1}{2};$$
$$2t^2=t^2-2t+2;$$
$$t^2+2t-2=0;$$
$$t=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}=\begin{cases}\cancel{-1-\sqrt{3}}\\ \sqrt{3}-1\end{cases}$$
$$t=\sqrt{3}-1$$

¿Y para que el área sea la tercera parte?

$$\sqrt{\frac{t^2}{t^2-2t+2}}=\sqrt{\frac{1}{3}};$$
$$\frac{t^2}{t^2-2t+2}=\frac{1}{3};$$
$$3t^2=t^2-2t+2;$$
$$2t^2+2t-2=0;$$
$$t^2+t-1=0;$$
$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\frac{\cancel{-1-\sqrt{5}}}{2}\\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{cases}$$
$$t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

¿Y para que el área sea la cuarta parte?

$$\sqrt{\frac{t^2}{t^2-2t+2}}=\sqrt{\frac{1}{4}};$$
$$\frac{t^2}{t^2-2t+2}=\frac{1}{4};$$
$$4t^2=t^2-2t+2;$$
$$3t^2+2t-2=0;$$
$$t=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot3\cdot(-2)}}{2\cdot3}=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{6}=\frac{-2\pm2\sqrt{7}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{3}=\begin{cases}\frac{\cancel{-1-\sqrt{7}}}{3}\\ \frac{\sqrt{7}-1}{3}\end{cases}$$
$$t=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

Si observamos la serie de datos obtenidos para t y los comparamos con el área buscada (1/n) encontramos una regularidad.

Para n = 2 (área = $\frac{1}{2}$), $t = \sqrt{3} - 1$.

Para n = 3 (área = $\frac{1}{3}$), $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Para n = 4 (área = $\frac{1}{4}$), $t = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$.

Para n = 5 (área = $\frac{1}{5}$), $t = \frac{\sqrt{9}-1}{4} = \frac{1}{2}$.

Luego, para un n cualquier, el radicando siempre es (2n-1) y el denominador (n-1). Es decir, para obtener un cuadrado de área $\frac{1}{n}$, tenemos que coger

$$t = \frac{\sqrt{2n-1}-1}{n-1}$$

Demostración:

$$t^2 = \frac{2n-1-2\sqrt{2n-1}+1}{(n-1)^2} = \frac{2n-2\sqrt{2n-1}}{(n-1)^2};$$

$$t^2 - 2t + 2 = \frac{2n-2\sqrt{2n-1}}{(n-1)^2} - 2\frac{\sqrt{2n-1}-1}{(n-1)} + 2 =$$

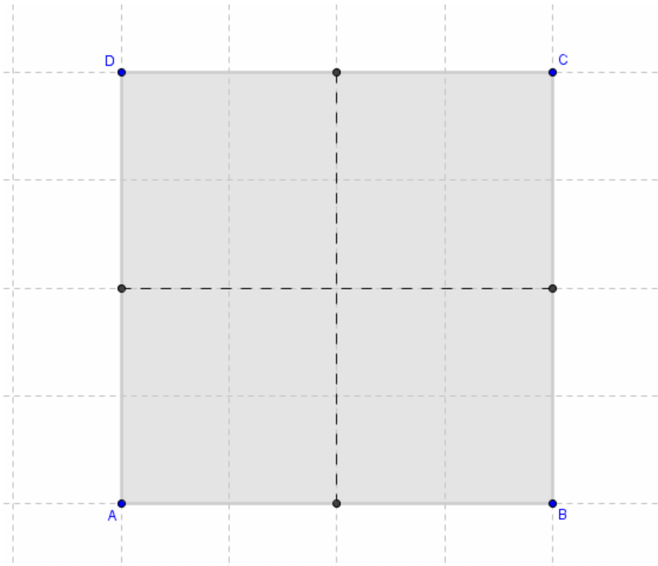
$$= \frac{\cancel{2n} - \cancel{2\sqrt{2n-1}}}{(n-1)^2} - \frac{2n\sqrt{2n-1} - \cancel{2\sqrt{2n-1}} - \cancel{2n} + \cancel{2}}{(n-1)^2} + \frac{2n^2 - \cancel{4n} + \cancel{2}}{(n-1)^2} =$$

$$= \frac{2n^2 - 2n\sqrt{2n-1}}{(n-1)^2} = \frac{n\cdot\left(2n-2\sqrt{2n-1}\right)}{(n-1)^2} =$$

$$= n\cdot t^2$$

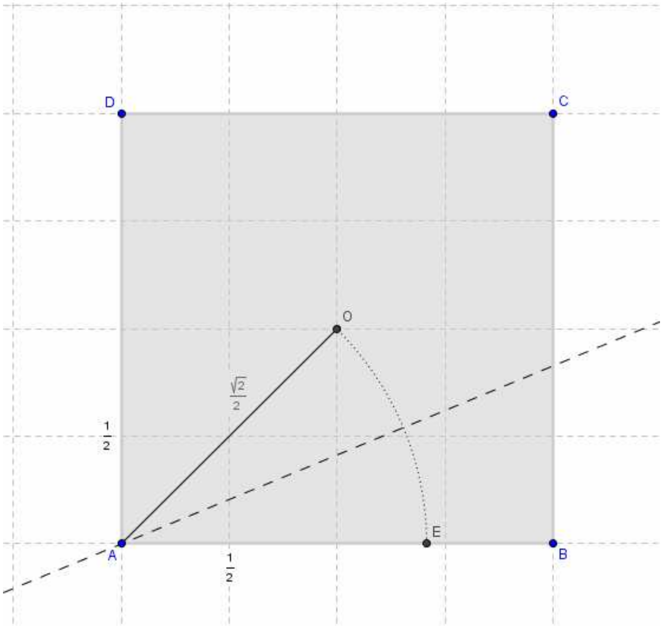
$$d(A', D') = \sqrt{\frac{t^2}{t^2-2t+2}} = \sqrt{\frac{t^2}{n\cdot t^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \qquad \text{c.q.d.}$$

CUADRADO DE ÁREA MITAD



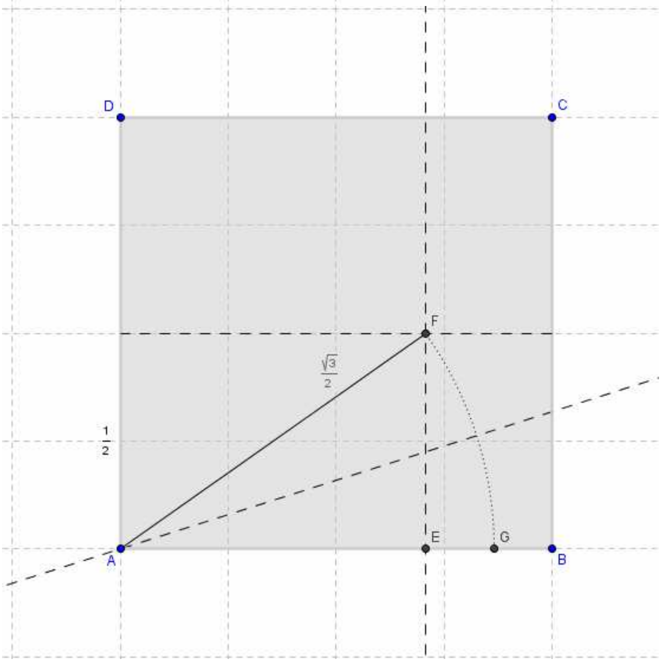
$$t = \sqrt{3} - 1$$

Partimos de una hoja cuadrada en blanco, que hemos doblado por el medio tanto horizontal como verticalmente.



El punto central O se encuentra de A a una distancia de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

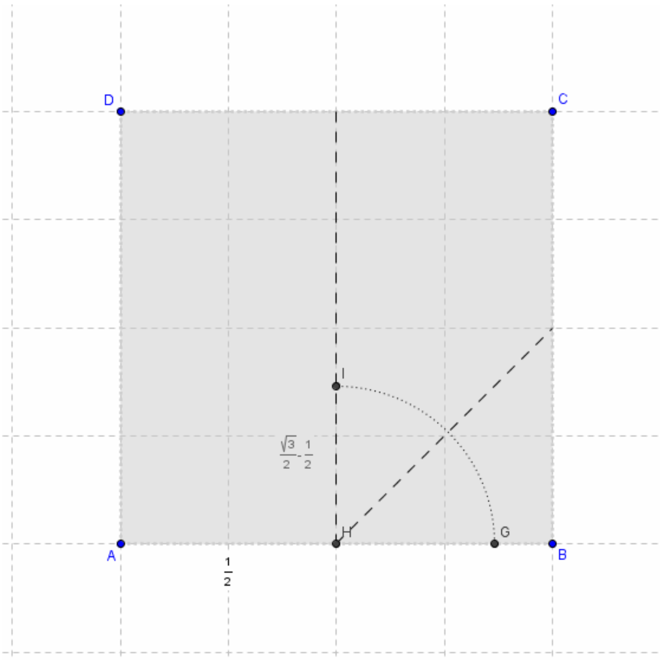
Doblando por la bisectriz de $\widehat{BAO}$, obtenemos el punto E que está a la misma distancia de A que O.



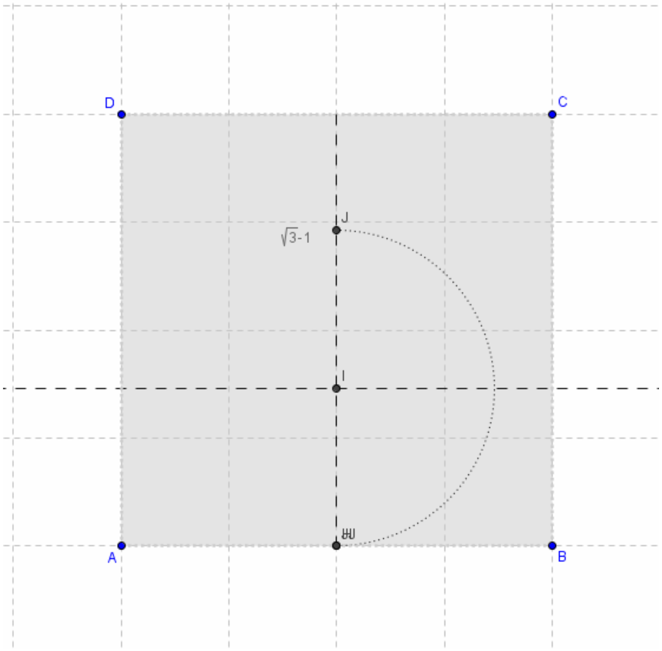
Trazamos la perpendicular que pasa por E, obteniendo el punto de corte F con la recta horizontal (a altura ½). Este punto está a una distancia $\frac{\sqrt{3}}{2}$ del vértice A.

Proyectamos dicho punto sobre el lado, igual que en el paso anterior, doblando por la bisectriz del ángulo que forman.

Ya tenemos la raíz de 3. ¿Cómo haremos para restarle 1? En realidad el punto está a una distancia igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que le restaremos $\frac{1}{2}$ y luego duplicaremos su valor.

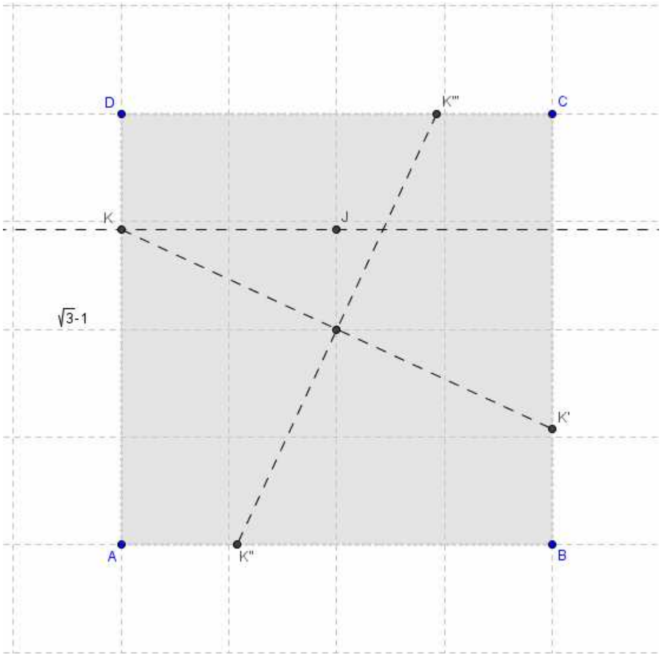


Tomando como centro H, el punto medio del lado, doblamos la otra mitad sobre la perpendicular, obteniendo el punto I. Su distancia a H es de $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$. Faltará duplicar esta cantidad y proyectarla sobre un lado.



Doblamos por la recta horizontal que pasa por el punto I. La imagen del punto H es otro punto J que dista $\sqrt{3}-1$ unidades de H.

Sólo falta proyectarlo sobre uno de los lados.

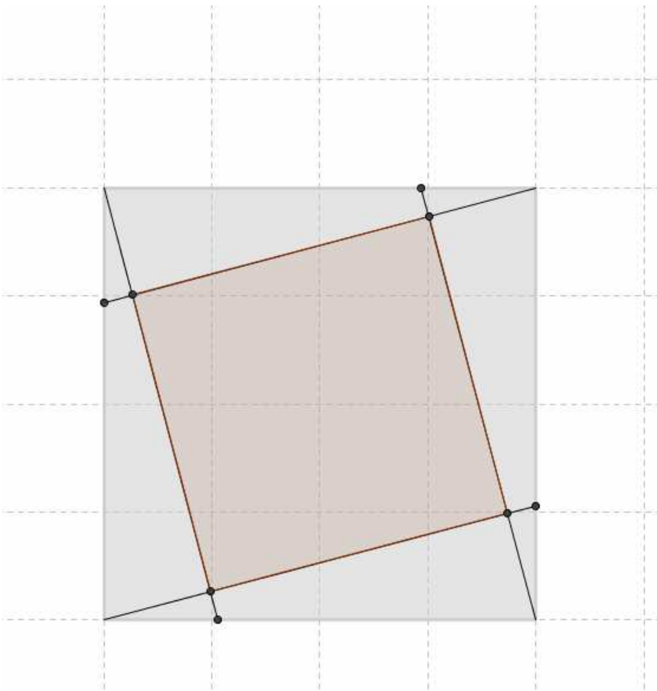


Trazamos la recta perpendicular que pasa por el punto J y obtenemos un punto en uno de los lados (K).

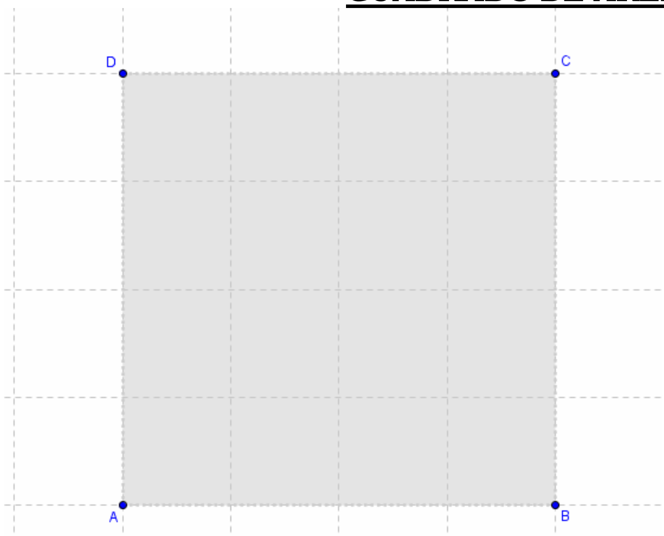
Doblando por la recta que pasa por el centro y por el punto K, obtenemos otro punto en el lado opuesto (K’).

Trazamos la perpendicular a dicha recta que pasa por el centro. Esto se consigue juntando los dos puntos K y K’. Así hallamos los otros dos puntos que nos faltaban (K’’ y K’’’).

Uniendo los vértices del cuadrado inicial con los puntos obtenidos mediante doblado, se dibuja el cuadrado de área mitad buscado.

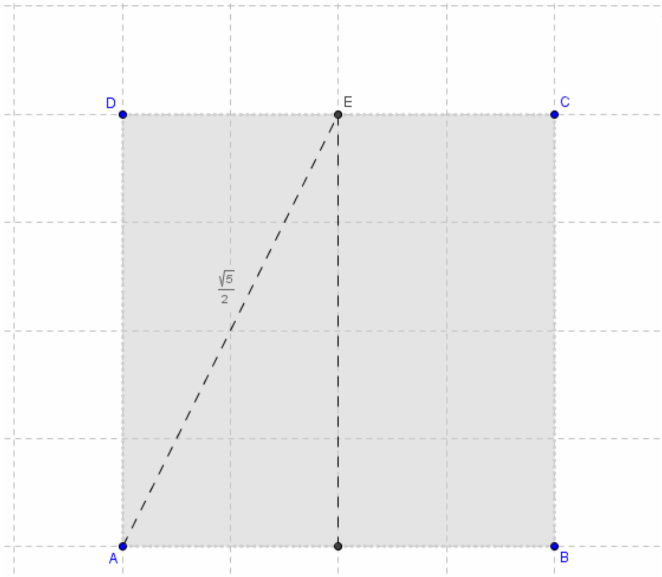


<u>CUADRADO DE ÁREA UN TERCIO</u>



$$t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

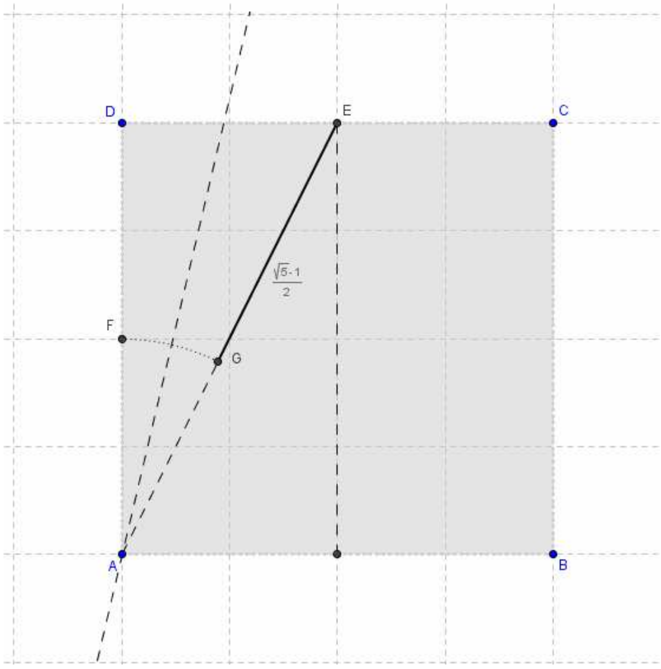
Partimos de una hoja cuadrada en blanco.



Doblamos por la mitad para obtener el punto E.

Doblamos por la recta AE.

$$\left|\overline{AE}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

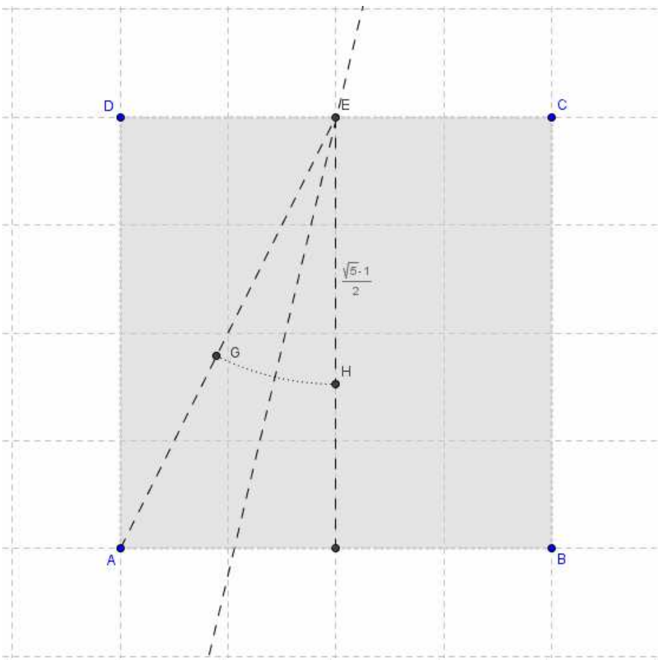


Hallamos el punto medio del segmento AD, que llamaremos F.

Doblando por la bisectriz $\widehat{DAE}$, proyectamos el punto F sobre el segmento AE. Tenemos el punto G, cuya distancia a E es de:

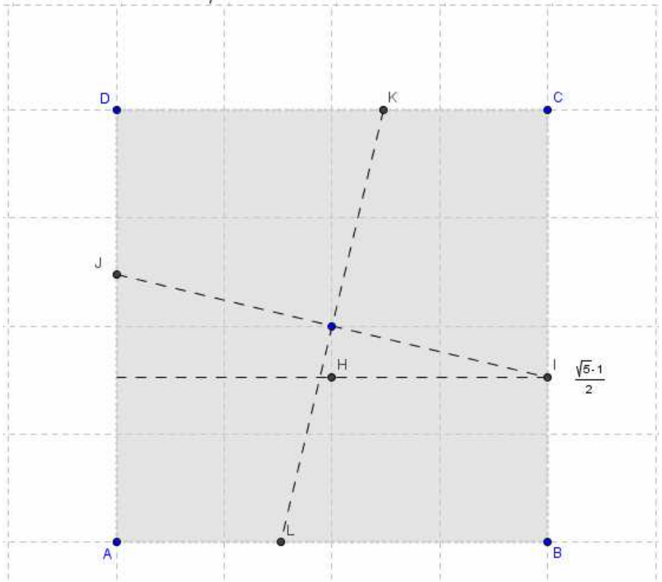
$$\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Justo lo que buscabamos.



Doblando por la bisectriz del ángulo $\widehat{E}$, trasladamos el punto G sobre el doblez central, obteniendo el punto H.

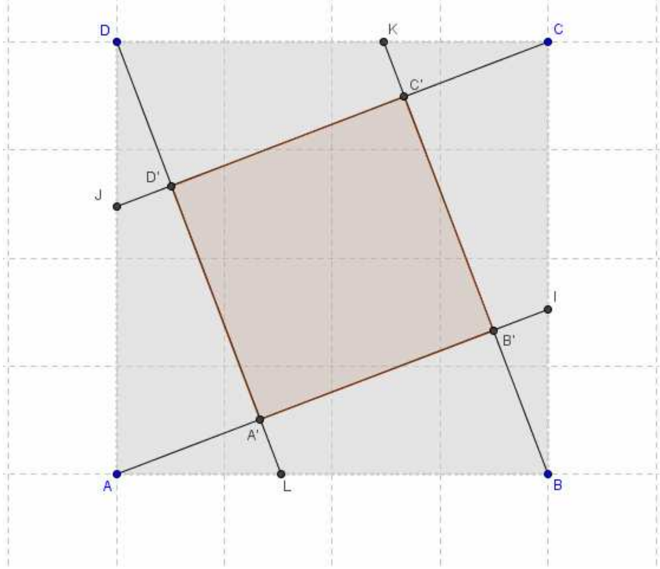
Sólo falta hallar su imagen sobre uno de los lados del cuadrado y obtendremos uno de los puntos buscados.



Doblamos por H, siguiendo la recta paralela a AB (doblamos A sobre AD y B sobre BC) para obtener el punto I.

Siguiendo la recta que une I y el centro del cuadrado obtenemos J.

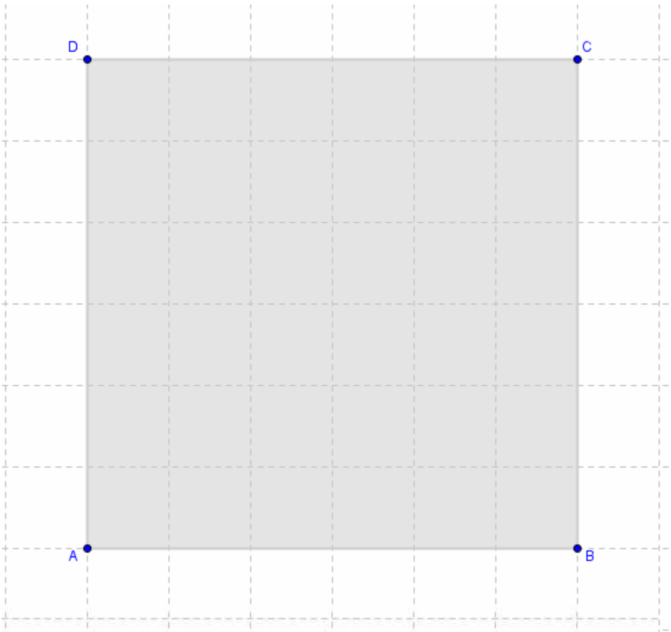
Y haciendo coincidir I y J, se consigue la recta perpendicular que pasa por el centro. Sus intersecciones con los lados dan los puntos K y L.



Uniendo cada vértice con el punto de corte correspondiente, se obtiene el cuadrado buscado, cuya área es la tercera parte del área del cuadrado inicial.

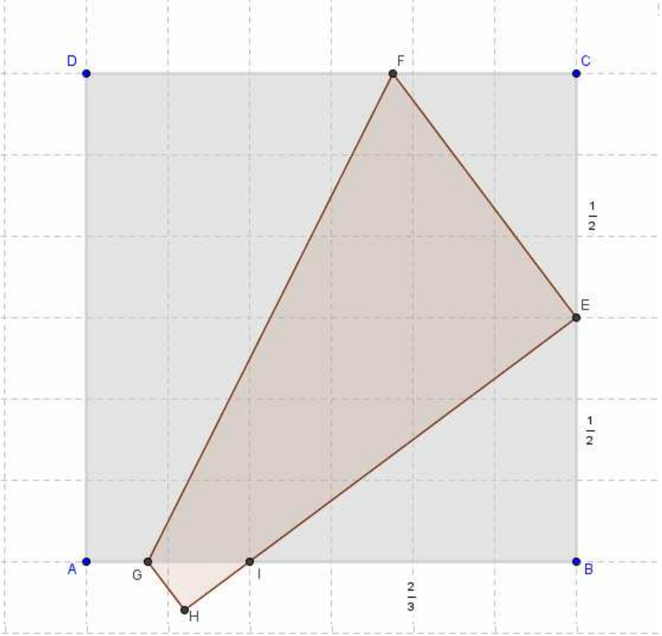
CONCURSO DEL VERANO
PAPIROFLEXIA Y MATEMÁTICAS

CUADRADO DE ÁREA UN CUARTO



$$t = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

Partimos de una hoja cuadrada que vamos a dividir en nueve partes iguales, es decir, en tres filas y tres columnas. Para ello hacemos uso de:

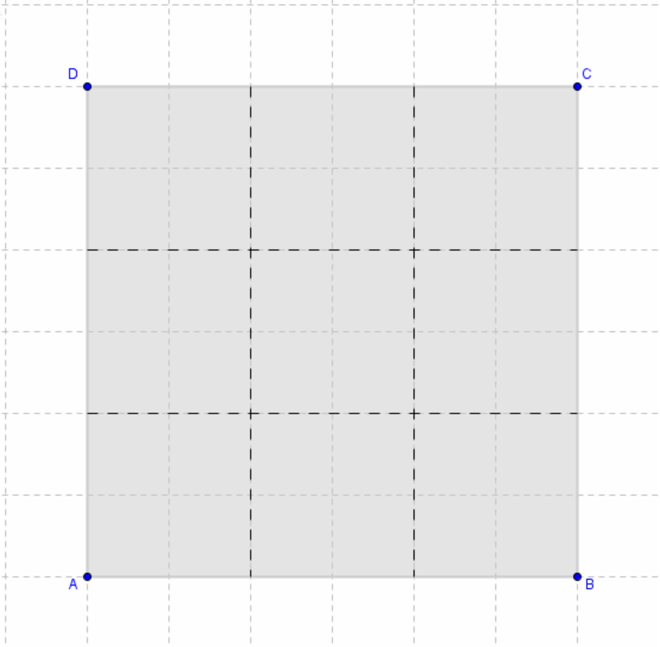


Primer teorema de Haga

Si hacemos coincidir el vértice D con el punto medio del lado BC, obtendremos un punto I sobre AB que divide el segmento dos partes tales que:

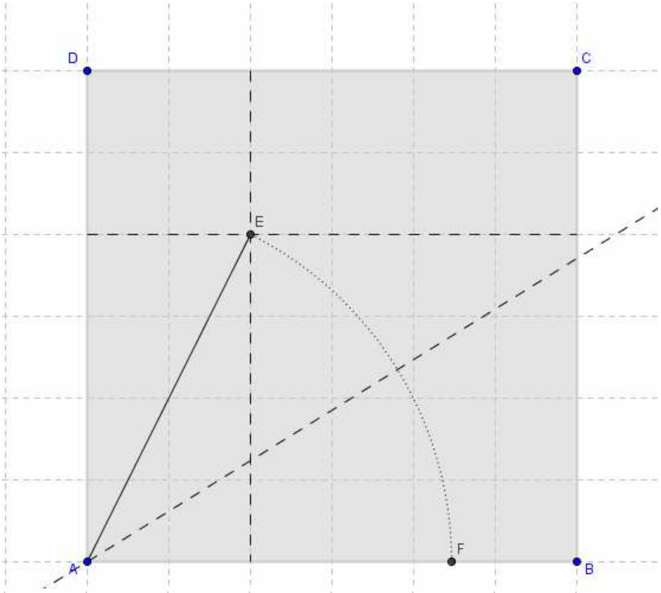
$$\left|\overline{AI}\right| = \frac{1}{3}$$

$$\left|\overline{BI}\right| = \frac{2}{3}$$



Podemos suponer que tenemos trazadas las 4 líneas que dividen el cuadrado en 9 cuadrados más pequeños. Cada columna es la tercera parte del cuadrado inicial.

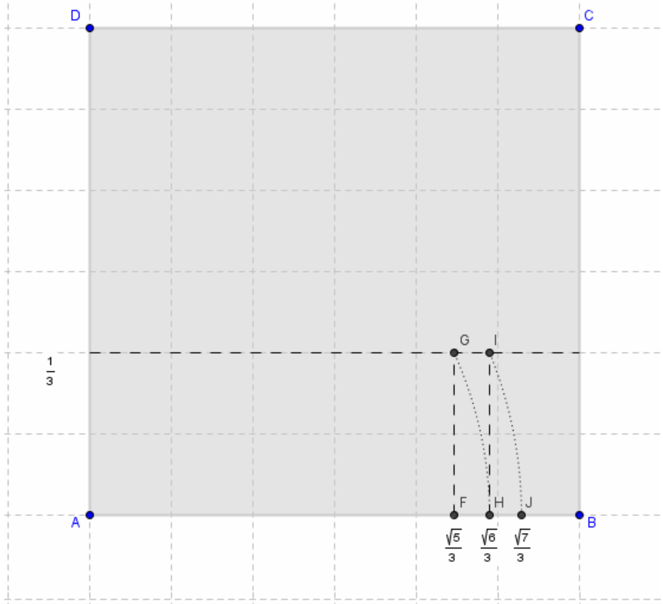
Miguel Herraiz Hidalgo



Cogemos el punto E de coordenadas $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Doblando por la bisectriz de $\widehat{BAE}$, encontramos la imagen de E sobre el segmento AB. Lo hemos llamado F.

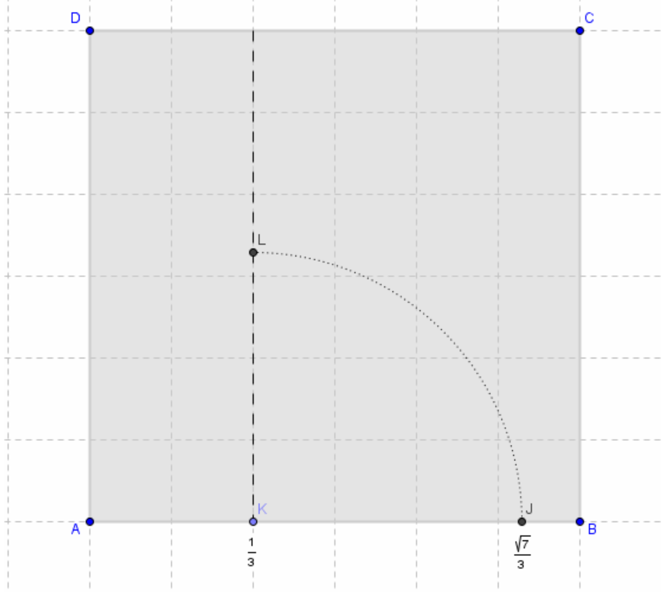
$$\left|\overline{AF}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



Trazando la perpendicular al lado AB por F, obtenemos el punto G, intersección de dicha recta y el doblez a altura 1/3.

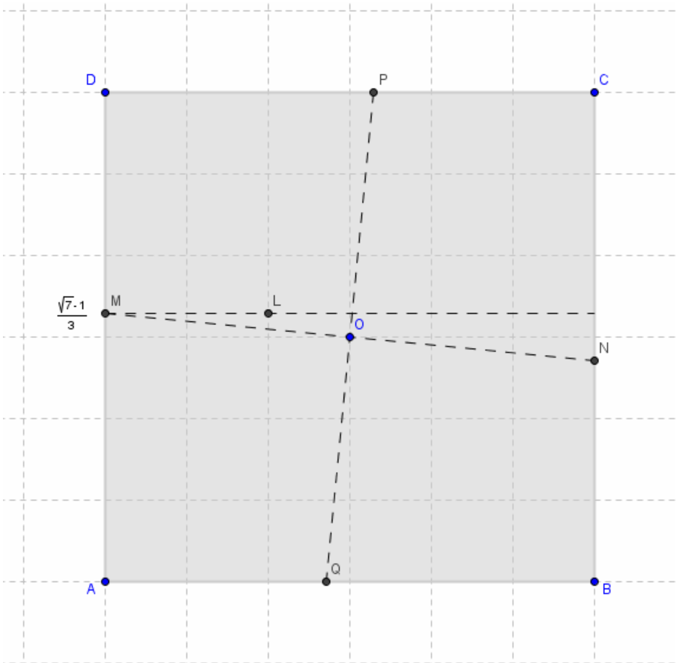
Proyectamos dicho punto sobre el segmento AB, como hicimos con E y F, y obtenemos H, que dista $\frac{\sqrt{6}}{3}$ unidades de A.

Repetimos el proceso con H, para obtener el punto J sobre AB, cuya distancia es $\frac{\sqrt{7}}{3}$ con respecto a A.



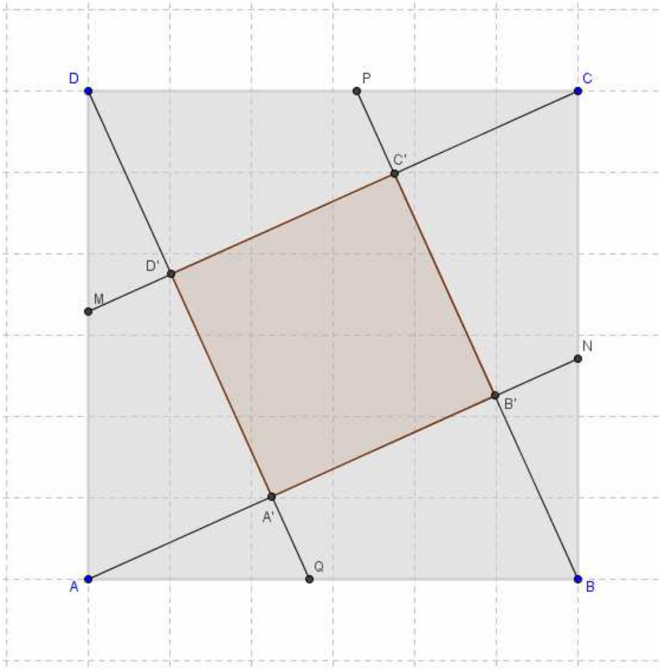
Desde el punto K, situado a 1/3 de distancia de A, doblamos y hacemos coincidir el segmento KB con la perpendicular (obtenida al principio). La imagen de J será el punto L, de altura $\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$ ¡!

Luego sólo falta proyectar dicho punto sobre uno de los lados y tendremos el punto buscado.



Doblando por L, perpendiculamente a AD, se obtiene el punto M. Para obtener el resto de puntos del cuadrado, doblamos por la recta que pasa por M y el punto medio O del cuadrado. Así hallamos N.

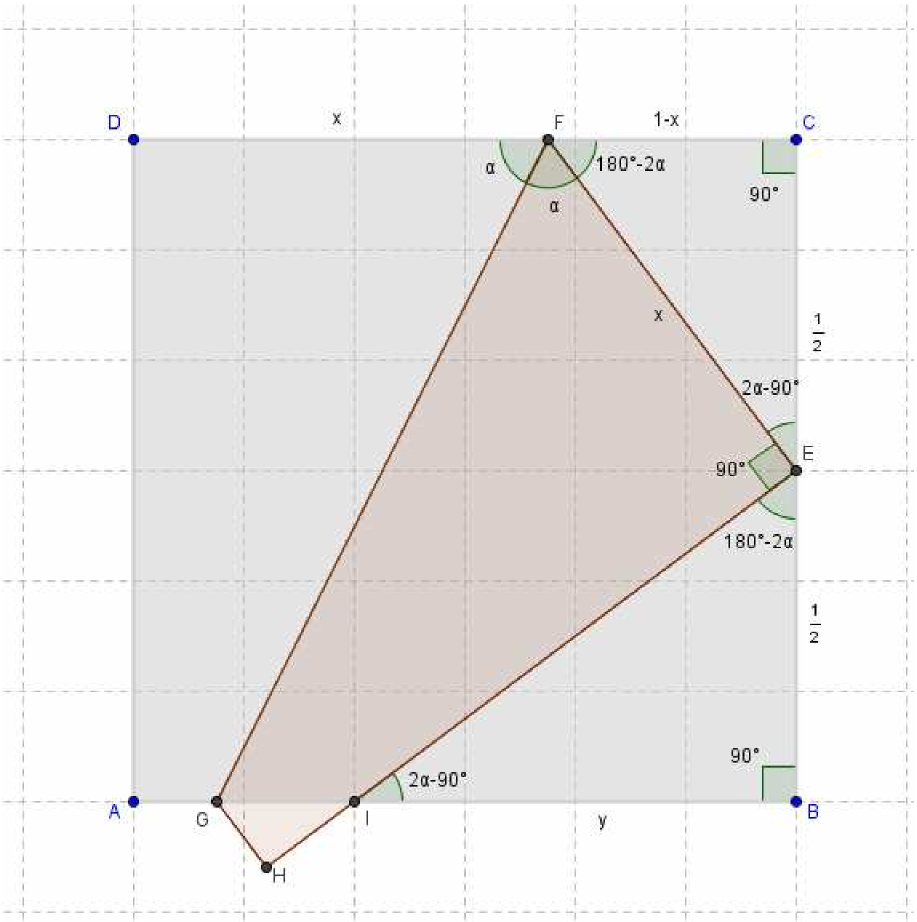
P y Q se consiguen haciendo coincidir M y N y doblando bien el papel.



Y uniendo los vértices con los puntos de corte correspondientes dibujamos el cuadrado A'B'C'D' cuya área es la cuarta parte del área inicial.

DEMOSTRACIONES

PRIMER TEOREMA DE HAGA:



Vamos a demostrar que el segmento BI mide $\frac{2}{3}$. Para ello nos fijamos en que los triángulos $\vartriangle CFE$ y $\vartriangle BEI$ son semejantes, ya que tienen los tres ángulos iguales.

Calculando primero el valor de x, usando el teorema de Pitágoras, obtendremos el valor de los lados del primer triángulo.

$$x^2 = (1-x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\cancel{x^2} = 1 - 2x + \cancel{x^2} + \frac{1}{4}$$

$$2x = \frac{5}{4}$$

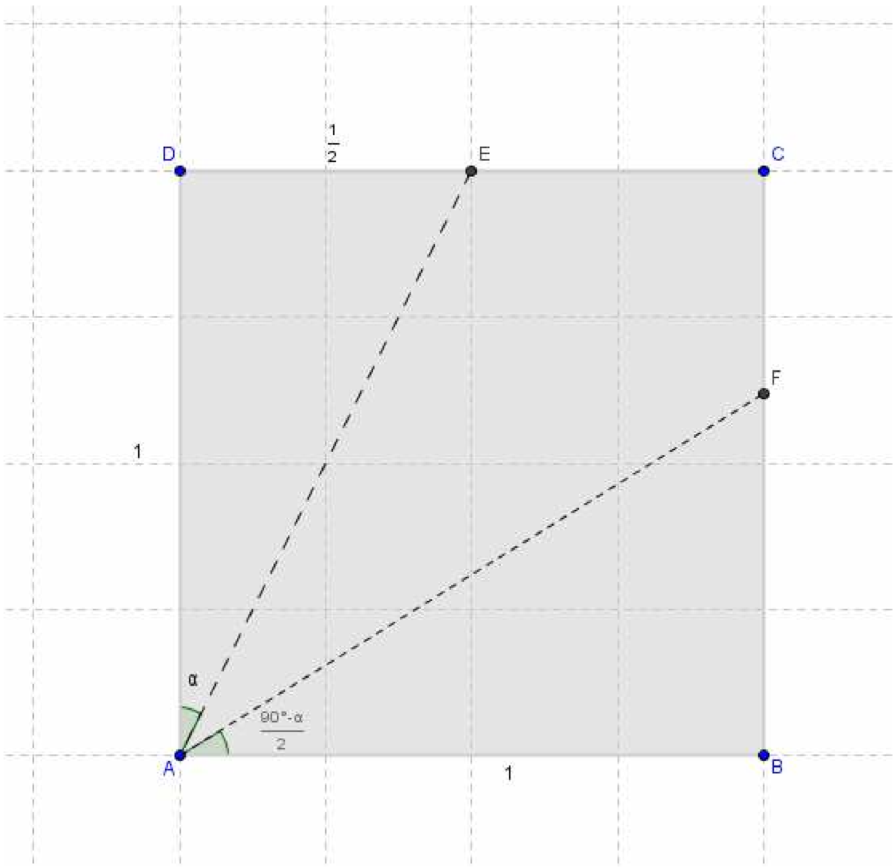
$$x = \frac{5}{8}$$

Con lo que los catetos medirán $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{8}$, y la hipotenusa $\frac{5}{8}$.

Comparando lados homólogos, es fácil hallar el valor de y = $\left|\overline{BI}\right|$

$$\frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3} \qquad \text{c.q.d.}$$

DEMOSTRACIÓN DE OTRA SOLUCIÓN (no propia) **PARA EL CUADRADO DE ÁREA UN TERCIO.**



Empezamos con una hoja cuadrada (tomamos como unidad la longitud del lado) y doblamos por el punto medio del segmento CD. Obtenemos el punto E.

Doblamos y desdoblamos por la recta $\overleftrightarrow{AE}$. La longitud del segmento marcado será:

$$\left|\overline{AE}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ahora, doblamos por la bisectriz del ángulo $\widehat{BAE}$, obteniendo sobre el lado BC el punto F. Vamos a demostrar que:

$$\left|\overline{BF}\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Para ello haremos uso de las razones trigonométricas para el ángulo mitad.

$$tg\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

En nuestro caso partíamos de un ángulo $\alpha=\widehat{EAD}$ y queremos conocer el valor del segmento BF, que será la tangente del ángulo $\widehat{BAF}=\frac{90-\alpha}{2}$.

$$tg\left(\frac{90-\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(90-\alpha)}{1+\cos(90-\alpha)}}=\sqrt{\frac{1-sen\alpha}{1+sen\alpha}}$$

Para ángulos complementarios $sen\alpha=\cos(90-\alpha)$. ¿Y cuánto vale $sen\alpha$?

$$sen\alpha=\frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Sustituyendo en la anterior fórmula:

$$tg\left(\frac{90-\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}}=\sqrt{\frac{\frac{5-\sqrt{5}}{\cancel{5}}}{\frac{5+\sqrt{5}}{\cancel{5}}}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)}{\left(5+\sqrt{5}\right)\cdot\left(5-\sqrt{5}\right)}}=\sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)^2}{20}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)^2}{2^2\cdot 5}}=\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$