Historia

Sección a cargo de

Jesús Hernández Alonso

Joseph Diez Gergonne (1771–1859), nacido en Nancy, fue capitán de la Guardia Nacional y participó en las guerras de Napoleón. Llegó a profesor de Matemáticas de la Escuela Central de Nimes en 1795, y de Astronomía en la Universidad de Montpellier en 1816. En 1810 fundó la revista Annales de Mathématiques Pures et Appliquées, donde publicó numerosos artículos sobre geometría, así como comentarios de artículos ajenos.

Mario Otero nos presenta aquí —traducido al español desde el original en francés— un texto inédito de Gergonne, también de contenido fuertemente geométrico.

De cómo Gergonne vincula sus propios trabajos sobre tangencias a consideraciones históricas

por

Mario H. Otero

1. En un trabajo anterior, "Tres momentos de una construcción geométrica: Apollonius de Perga, François Viète, Joseph-Diez Gergonne"[1], publicado en la *Revista Brasileira de História da Matemática,* vol. 6, núm. 12, octubre de 2006, hemos dado algunos elementos básicos para presentar el texto de François Viète *Apollonius gallus* traducido por Joseph-Diez Gergonne al francés, traducción previamente inédita. A la vez, de esa manera se intentó situar alrededor de Viète una línea de desarrollo geométrico que va —en lo conocido— desde Apolonio hasta hoy mismo[2,3]. La bi-

[1]Apolonio de Perga (−262/−190), François Viète (1540/1603), Joseph-Diez Gergonne (1771/1859).

[2]En nuestro artículo citábamos que David Gisch y Jason M. Ribando (2004), en un trabajo titulado "Apollonius' problem: a study of solutions and their connections", señalan la pléyade de geómetras que entre los tres del título trataron esa misma construcción y sus generalizaciones. Aunque los autores dicen no conocer con exactitud las reconstrucciones árabes, señalan cómo, aparte de esos tres geómetras, Adrianus Romanus, Fermat, Descartes, Newton —y más recientemente Philip Beecroft en 1842—, entre otros muchos, trataron el tema. Se cuentan por docenas los que así lo hicieron. Mucho más tarde Frederick Soddy —premio Nobel de física en 1921— redescubrió el problema en 1936 y lo expresó en "The Kiss precise", bajo la forma de poema.

[3]Por otra parte, Antonio J. Durán, en su artículo "Historia" —al presentar en *La Gaceta de*

bliografía existente refleja —todavía parcialmente— esa presencia a lo largo de un prolongadísimo período.

Presentamos ahora un nuevo texto inédito que ya no es sólo una traducción hecha por Gergonne sino uno suyo, revelador de un momento de enroque entre su propio trabajo sobre tangencias y dos de los más importantes en la historia previa del tema. El nuevo texto —de alrededor del año 8 del calendario napoleónico— es "La résurrection de François Viète et de Pierre de Fermat par J. D.".

La estructura de este texto de Gergonne es bien clara. Presenta, en partes claramente distinguibles:

(i) cuál era la situación de su propio trabajo sobre tangencias,

(ii) qué antecedentes históricos encontró que lo reorientaron en su búsqueda, y

(iii) cómo en base a ello dirigió su investigación.

2. Por más que esto pueda discutirse, normalmente, en una tradición de investigación cada paso al interior de un tema se guía por los pasos, o bien inmediatamente anteriores, o bien por los mediatamente previos pero no muy alejados. Muy distinto es proceder —en medio de una búsqueda— a través del descubrimiento de antecedentes muy lejanos y además utilizando métodos analíticos y no ya sintéticos como era el caso en las investigaciones anteriores, por ejemplo sobre tangencias.

3. Gergonne había comenzado a trabajar analíticamente —aplicación del álgebra a la geometría— en el llamado problema de Apolonio, que encierra en realidad un haz de problemas correlacionados. Dada la complicación de los resultados obtenidos por él de ese modo, no siguió en esa línea, y nos dice Gergonne que *por azar* halló los de quienes habían trabajado antes en el problema. De este modo se da el caso de instancias de problemas muy alejados entre sí en el tiempo:

> *"J'imaginais ensuite de traiter un problème par les lieux géométriques et d'abord mes recherches me conduisirent aux propositions suivantes qui sont faciles à démontrer"* (p. 1 del texto).

Y enuncia doce proposiciones a las que llama principios —en realidad son teoremas—, que son principios sólo relativamente a los temas encarados: determinar un círculo por tres condiciones y una esfera por cuatro:

> *"En effet en combinant les conditions de deux à deux manières pour le cercle et de trois manières pour la sphêre on obtient pour le cercle deux lignes et pour la sphère trois surfaces dont chacune satisfait à une combinaison de conditions et dont les intersections sont par conséquent les centres des cercles ou des sphères qui remplissent les conditions du problème"* (p. 4).

la RSME la nueva sección de Historia de las Matemáticas— nos dice: "Poincaré, por ejemplo, se pregunta en *El valor de la ciencia*: *¿Es posible entender una teoría si desde el primer momento se le da la forma definitiva que impone una lógica rigurosa, sin mencionar para nada el camino por el que ha llegado a adoptar esa forma? No, realmente no es posible entenderla, incluso resulta imposible retenerla si no es de memoria*". Y Durán prosigue su argumentación en favor de la historia de las matemáticas para la enseñanza de ésta. Es un texto que recomendamos francamente.

Resulta especialmente interesante lo que agrega:

> *"On a même ainsi l'avantage de voir du premier coup d'oeil de combien des solutions chaque problème est susceptible, détermination qui autrement éxigerait une certaine contention d'esprit et laisserait toujours la doute d'avoir laissé échapper quelque cas"* (ibid).

Ocho son las únicas soluciones que Gergonne logra más tarde del problema básico. Las verificaciones computacionales dan hoy —en las mismas condiciones— ocho; se puede comprobar con el programa *Cinderella*[4].

4. Es a esta altura que Gergonne recurre al análisis histórico y lo hace con no despreciable cuidado:

> *"Il est probable qu'Apollonium qui le premier s'occupa des problèmes relatifs au cercle et dont l'ouvrage ne nous ait parvenu était d'abord tombé sur les solutions de cette forme, ce soupçon est d'autant mieux facile qu'on sait qu'il était très versé dans la connaissance des propriétés locales des sections coniques il est probable qu'ensuite quelques considérations particulières l'auront conduit à le convaincre que ces problèmes pourraient être résolus par la ligne droite et le cercle; c'est à dire pour parler le langage d'alors, qu'ils étaient de la classe du problème plein. Cars je crois que Pappus dans sa collection nous apprend que c'est ainsi qu'il les avait résolu"* (p. 4–5).

Y entre los antecedentes anota otros elementos:

(a) que las soluciones por lugares geométricos utilizando la recta y el círculo son las preferibles en la práctica, como ya sabía;

(b) que en Fermat estaba ya la solución respecto a las esferas, a lo que había llegado siguiendo a Viète respecto a los círculos, cuando éste restituía a Apolonio sobre la base de lo que Pappus había hecho;

(c) que ellos lo habían hecho con la recta y el círculo, el plano y la esfera;

(d) que esos geómetras eran de primer orden, genios, y que no habían tenido sucesores más o menos inmediatamente[5];

(e) que las soluciones de Viète y Fermat eran elegantes y sencillas pero, sin embargo, como soluciones sintéticas no permitían ver el camino recorrido ni el modo de poder generalizarlo;

(f) que para proseguir el trabajo todo aconsejaba que adquiriera una forma más natural.

> *"Je crois au reste avoir découvert en traduisant l'ouvrage de Viète /Apollonius gallus/ le fil qui l'a dirigé, je soupçonne avec beaucoup de fondement qu'il s'est d'abord occupé de la solution du dernier problème c'est à dire de la détermination d'un cercle tangent à trois cercles donnés et*

[4] Ver la bibliografía: "The interactive geometry software Cinderella".

[5] En eso se equivocaba porque sí los habían tenido; ver nuestro trabajo anterior.

qu'ensuite l'analyse ancienne l'a conduit par une marche rétrograde à reduire la solution de chaque problème à celle d'un des problèmes précédents et a ainsi déterminé la marche qu'il devait suivre dans ses solutions succesives. Quant à Fermat ses solutions sont entièrement calquées sur celles de Viète et ne sont pas que celles-ci étudiées aux trois dimensions de l'espace" (p. 6).

Luego Gergonne nos dice que, si se dedicaba a largos cálculos —como hizo Descartes— hubiera llegado a fórmulas de construcción muy penosa. Finalmente, procediendo analíticamente pero con la orientación que había aparecido —por azar, según él, de sus predecesores— obtuvo una solución que era a la vez elegante y universal.

5. No vamos a entrar a considerar en todos sus detalles el procedimiento geométrico que Gergonne ha utilizado —expuesto en las páginas 8 a 12 del texto—, y que ha desarrollado a partir del análisis histórico que ha presentado. Ya de por sí sus varios trabajos sobre las tangencias —sin contar el resto de su obra— hacen de él un geómetra distinguido.

6. No debemos exigirle a Gergonne una investigación histórica como la necesaria en nuestros días. Con todo, su texto posee características que tienen el rigor que, de un matemático o de un historiador de las matemáticas de su tiempo, podía esperarse.

TEXTO INÉDITO DE GERGONNE*

[1] **La resurrección de François Viète y de Pierre de Fermat**

por

J. D.

Me he ocupado de los problemas de la determinación de un círculo por tres condiciones y de la de una esfera por cuatro condiciones mucho antes de saber que alguien se hubiera ocupado de ello, traté de resolver algunos de los relativos al círculo por los medios de aplicación del álgebra a la geometría; pero pude darme cuenta que eran, en su mayoría, muy difíciles de traducirse en ecuaciones y que conducían a fórmulas muy complicadas y difíciles de construir.

*Los números entre corchetes que aparecen en el margen indican las páginas del manuscrito original.

Luego imaginé que podría considerar un problema mediante lugares geométricos y mis investigaciones primeramente me condujeron a las siguientes proposiciones, fáciles de demostrar.

1. El lugar geométrico del centro de todos los círculos que pasan por dos puntos dados es la perpendicular que pasa por el punto medio de la recta que une ambos puntos.
2. El lugar geométrico del centro de todas las esferas que pasan por dos puntos dados es el plano perpendicular en el punto medio de la recta que pasa por esos dos puntos.
3. El lugar geométrico del centro de todos los círculos que, pasando por un punto dado, son tangentes a una recta dada, es una parábola cuyo foco es el punto dado y cuyo vértice es el punto medio de la perpendicular bajada desde ese punto a la recta dada.

[2]

4. El lugar geométrico del centro de todas las esferas que pasando por un punto dado son tangentes a un plano dado es un paraboloide que tiene por foco el punto dado y por vértice el punto medio de la perpendicular bajada por ese punto al plano dado.
5. El lugar geométrico del centro de todos los círculos que pasando por un punto dado son tangentes a un círculo dado es una elipse o una hipérbola que teniendo por foco el centro y el punto dado y por vértice los puntos medios de la mayor y la más corta distancia desde el punto dado a la circunferencia del círculo dado, es una elipse o una hipérbola según que el punto dado sea interior o exterior al círculo dado.
6. El lugar geométrico del centro de todas las esferas que pasando por un punto dado son tangentes a una esfera dada, es un elipsoide o un hiperboloide que tiene por foco el punto dado y el centro de la esfera dada y por vértices los puntos medios de las distancias más corta y más larga desde el punto dado a la superficie de la esfera, es un elipsoide o un hiperboloide dependiendo que el punto dado sea interior o exterior a la esfera dada.
7. El lugar geométrico del centro de todos los círculos tangentes a dos rectas dadas es la recta que divide en partes iguales al ángulo formado por esas dos rectas o ella es el complemento de dicho ángulo.
8. El lugar geométrico del centro de todas las esferas tangentes a dos planos dados es el plano que divide en partes iguales el ángulo formado por los dos planos dados o el suplemento de dicho ángulo.

[3]

9. El lugar geométrico del centro de todos los círculos tangentes a un círculo y a una recta dada está formado por dos parábolas que tienen por foco común el círculo de centro dado y por vértices los puntos medios de la mayor y la menor distancia entre la circunferencia del círculo dado y la recta dada.

10. El lugar geométrico de todos los centros de las esferas tangentes a una esfera y a un plano dados es dos paraboloides que tienen por foco común el centro de la esfera dada y por vértice los puntos medios de los segmentos mayores y menores de las perpendiculares que se puedan bajar desde la superficie de la esfera dada al plano dado.
11. Los lugares geométricos del centro de todos los círculos que tocan a dos círculos dados exteriores entre sí son dos hipérbolas que tienen por foco común los centros de los dos círculos dados. En cuanto a su vértice, si se traza una recta por los dos centros, ella cortará a las dos circunferencias en cuatro puntos y los vértices serán en una de las hipérbolas los puntos medios de las distancias entre las intersecciones interiores y exteriores a los dos círculos. Para la otra estos vértices serán los puntos medios de las distancias entre la intersección de cada círculo comprendido entre los centros y la intersección del otro círculo exterior a los mismos centros. Si los círculos de éstas se cortan, la última hipérbola se transformará en una elipse. Para terminar, si están uno en otro, permanecerá sólo la elipse y la hipérbola desaparecerá.
12. Los lugares geométricos del centro de todas las esferas tangentes a dos esferas dadas exteriores entre sí, son dos hiperboloides que tienen por focos comunes los centros de las dos esferas dadas. En cuanto a sus vértices, si se traza una recta por los dos centros ella cortará las dos esferas en cuatro puntos: dos interiores y dos exteriores a los círculos, los vértices de uno de las hiperboloides serán los puntos medios de las distancias entre las intersecciones interiores y

    [4]

    exteriores, y por otro serán los puntos medios de la distancia entre la intersección interior de una esfera y la intersección exterior de la otra. Si las dos esferas se cortan, el último hiperboloide se transformará en un elipsoide. Para terminar, si una de las esferas está contenida en la otra, el elipsoide subsistirá y el hiperboloide desaparecerá.

Establecidos estos principios, nada es más fácil, por lo menos si se consideran las cosas teóricamente, que resolver los problemas relativos a la determinación de un círculo por tres condiciones o de una esfera por cuatro condiciones. En efecto, combinando las condiciones dos a dos de dos maneras para el círculo y de tres maneras para la esfera se obtienen para el círculo dos líneas y para la esfera tres superficies en las que cada una satisface una combinación de condiciones y sus intersecciones son en consecuencia los centros de los círculos o de las esferas que cumplen las condiciones del problema. Se tiene así incluso la ventaja de ver inmediatamente cuántas soluciones posee un problema, determinación que de otro modo requeriría una cierta precaución y dejaría siempre en la duda de si se ha omitido algún caso.

Es probable que Apolonio, que fue el primero que se ocupó de los problemas relativos al círculo y cuya obra no nos ha llegado, haya descubierto soluciones de esta forma; esta sospecha es tanto más plausible cuando se sabe que él era versado en el conocimiento de las propiedades locales de las secciones cónicas, es probable que, después, ciertas consideraciones particulares lo hayan conducido a convencerlo que esos problemas podrían ser resueltos

[5]
por la línea recta y el círculo; es decir, para hablar el lenguaje de entonces, eran de la clase del problema pleno. Porque creo que Pappus en su colección nos enseña que es así como los había resuelto.

Se concibe en efecto que por ligadas que estén en teoría las soluciones por lugares geométricos, las que emplean sólo la línea recta y el círculo son bien preferibles en la práctica. Estaba yo en estas reflexiones cuando encontré por azar en Fermat la solución del problema relativo a la esfera, y no tardé en saber que había sido conducido a ese trabajo por el de Viète sobre el círculo y que la intención de este último había sido la de restablecer las soluciones de Apolonio indicadas por Pappus. Me di finalmente cuenta de que unos y otros empleaban en sus soluciones sólo la línea recta, el círculo, el plano y la esfera.

La concurrencia de trabajos de tres geómetras de primer orden relacionados con problemas en los cuales pensaba desde hace tiempo, pero sin mucha insistencia, logró aumentar mi interés. Las soluciones de Viète y de Fermat no dejan sin duda nada que desear por su elegancia y simplicidad; desvelan todos los recursos que habían sabido crear con su inhabitual ingenio; pero ellas, como todas las soluciones sintéticas, tienen el inconveniente de que parecen caer de arriba y no dejan percibir el hilo que ha guiado al autor, también el orden de sucesión del problema, orden necesario para sus soluciones sucesivas que aparece de modo extraño y no se presenta naturalmente. En ese momento, por esas consideraciones, resolví retomar este trabajo en una nueva forma y proceder de una manera más natural.

[6]
Pienso además haber descubierto, traduciendo la obra de Viète, el hilo que lo ha dirigido; sospecho con mucho fundamento que se ocupó primeramente de la solución del último problema, es decir de la determinación de un círculo tangente a tres círculos dados y que luego el análisis antiguo lo condujo, procediendo hacia atrás, a reducir la solución de cada problema a uno de los problemas precedentes y así ha determinado la marcha que debía seguir en soluciones sucesivas. En cuanto a Fermat, esas soluciones están enteramente calcadas de las de Viète y no son más que éstas estudiadas en las tres dimensiones del espacio.

Vuelvo, como resultado de mi trabajo, sabiendo que el centro de cada uno de los círculos y de cada una de las esferas buscadas estaba siempre en la intersección de dos líneas o de tres superficies de segundo grado cuyos elementos eran todos arbitrarios. Imaginaba expresarlo vinculando esas superficie por ecuaciones, llevando estas ecuaciones a los mismos ejes y considerando luego las coordenadas de las dos líneas y las tres superficies como las dificultades de un mismo problema. La eliminación debía conducirme a la expresión analítica de las coordenadas del centro del círculo y de la esfera buscada, las cuales debían ser construibles mediante la línea recta y el plano y la esfera, puesto que estos problemas son de segundo grado.

Sin embargo, reflexionando un poco, vi que así iba a ser arrastrado en cálculos muy largos que

[7]
sin duda me conducirían a fórmulas difíciles de construir. Seguramente, siguiendo un procedimiento análogo es como Descartes, al tratar analíticamente el problema

del círculo tangente a tres círculos dados, llegó hasta una fórmula que él decía no poder encargarse de construir ni siquiera en un mes. Las reflexiones me habían hecho casi renunciar a mi trabajo cuando al fin se me presentó, para la resolución de ese problema, un camino puramente analítico y muy elegante, que me hizo ver que la consideración de la línea y del círculo tiene además la ventaja de ser universal. Es así que ese camino pueda aplicarse directamente a la determinación de una curva de igual grado $\frac{m(m-3)}{2}$, condición puramente analítica y que no exige figuras o construcciones especiales. Ese es el camino que me propongo recorrer aquí, cuyo plan voy a exponer en pocas líneas. Se sabe que la ecuación general de un círculo necesita tres constantes porque, en efecto, un círculo se determina por tres condiciones de esas tres constantes. Dos son las coordenadas del centro de ese círculo y la tercera es el radio, siempre que el círculo es general son constantes arbitrarias o indeterminadas.

Si se quiere que este círculo supuesto cualquiera pase por un punto dado, es decir que pase por un punto cuyas coordenadas son arbitrarias, estas coordenadas deberán satisfacer la ecuación del círculo de modo que substituyéndolas se obtendrá entre las tres constantes arbitrarias una ecuación

[8]

de relación, de modo tal que, siendo dadas dos cualesquiera, la tercera lo será también y se tendrá así todo lo necesario para describir el círculo buscado. En efecto, se concibe que eso debe ser así puesto que un círculo sujeto a pasar por un punto dado no requiere más que dos condiciones para estar determinado.

Si por el contrario se quiere que el círculo supuesto cualquiera sea tangente a una recta dada en su posición, es decir a una recta cuya posición se conoce, será necesario por eliminación determinar las coordenadas de los dos puntos donde, en general, ese círculo cualquiera corta a la recta dada; y para expresar la condición de contingencia entre ambos se igualará entre ellos los dos valores de cada coordenada, lo que llevará aún a una ecuación de relación entre las tres constantes arbitrarias que encerraba la ecuación del círculo, de modo tal que bastará conocer dos de ellas para tener la tercera y construir el círculo. Ello debe ser así pues cuando un círculo se toma como tangente a una recta dada, no son necesarias más que otras dos condiciones para determinarlo totalmente. Si se quiere que el círculo supuesto antes como cualquiera sea tangente a un círculo dado, es decir a un círculo del que se tenga la ecuación, resultará necesario determinar ecuaciones de los dos puntos donde, en general, ese círculo supuesto cualquiera corta al círculo dado y, para expresar la condición de contingencia de ambos, se igualarán entre sí los dos valores

[9]

de cada coordenada, lo que llevará una vez más a una ecuación de relación entre las tres constantes arbitrarias que contiene la ecuación del círculo buscado, de modo que será suficiente conocer dos para tener la tercera y construir el círculo. Ello debe ser así porque cuando un círculo está sujeto a ser tangente a otro círculo dado no se necesitan más que otras dos condiciones para determinarlo enteramente.

Si ahora se trata de determinar un círculo por tres condiciones tales como pasar por puntos cuyas coordenadas sean arbitrarias, o ser tangente a rectas, o a círculos cuyas coordenadas se conocen, se tomará la ecuación más general del círculo y se formará entonces, entre las tres constantes que encierra esta ecuación, las ecuaciones de relación relativas a las tres condiciones exigidas. Se tendrán así tres ecuaciones por medio de las cuales será fácil determinar y luego construir el círculo buscado.

Paso ahora a considerar la esfera. Se sabe que su ecuación general encierra cuatro constantes porque, en efecto, son necesarias cuatro condiciones para determinar una esfera. De estas cuatro constantes, tres serán las del centro de la esfera y la otra del radio, y en tanto la esfera es cualquiera, estas cuatro constantes son arbitrarias o indeterminadas.

Si se quiere que la esfera supuesta pase por un punto dado, es decir por un punto cuyas coordenadas son conocidas, estas coordenadas deberán satisfacer la ecuación de la esfera de modo que sustituyéndolas allí

[10]

se obtendrá entre las cuatro constantes arbitrarias una ecuación de relación de modo tal que, estando dadas tres cualesquiera, la cuarta lo estará también y se tendrá todo lo que es necesario para construir la esfera buscada; se concibe en efecto que la cosa debe ser así pues para una esfera que está sujeta a pasar por un punto dado sólo son necesarias otras tres condiciones para determinarla enteramente.

Si por el contrario se quiere que la esfera supuesta de antemano sea tangente a un plano dado, es decir del que se posee la ecuación, se podrá imaginar, por un punto cualquiera en la superficie de la esfera, dos planos paralelos a dos de los planos coordenados, a los cuales se relacionarán tanto la ecuación de la esfera como la del plano dado. Se determinarán luego las ecuaciones de las líneas de intersección del plano dado con un nuevo plano coordenado, y el círculo de intersección de la esfera buscada con este mismo plano; la condición de contingencia de la esfera buscada y del plano dado se reducirá ahora a la de estos círculos y rectas, y expresándolas como lo hemos dicho para el círculo se llegará a una ecuación de relación entre las cuatro constantes que encierra la ecuación de la esfera, de modo tal que bastará conocer tres de ellas para obtener la cuarta y construir la esfera. Ello debe ser así pues si una esfera está sujeta a ser tangente a un plano dado, no es necesario más que tres condiciones para determinarla enteramente.

[11]

Si por fin se quiere que la esfera supuesta de antemano sea tangente a una esfera dada, es decir a una esfera cuya ecuación se posee, se podrá imaginar, por un punto cualquiera de la superficie de la esfera buscada, dos planos paralelos a dos de los planos coordenados, se relacionará una y otra esfera a estos dos planos y se determinará su círculo de intersección con ellos; la condición de contingencia de las dos esferas se reducirá a la de cada círculo de una de las esferas con el círculo de la otra que se encuentra en el mismo plano coordenado con él, y expresándolo como lo hemos hecho para el círculo se llegará a una ecuación de relación entre las cuatro constantes que encierra la ecuación de la esfera buscada, de modo que será suficiente conocer tres cualesquiera para determinar la cuarta y construir la esfera. Eso debe ser así puesto que para una esfera que está sujeta a ser tangente a una esfera dada bastan tres condiciones para determinarla completamente.

Si planteamos ahora la cuestión de determinar una esfera por cuatro condiciones tales como pasar por puntos dados cuyas coordenadas sean conocidas, o ser tangente a planos o a esferas cuya ecuación se posee, se tomará la ecuación más general de la esfera y se formarán luego, con las cuatro constantes que encierra esta ecuación, las ecuaciones de relación relativas a las condiciones exigidas, se tendrá así, entre estas constantes, cuatro ecuaciones por medio de las cuales será fácil determinarlas e inmediatamente construir la esfera buscada.

> "Importa subrayar además que una elección adecuada de los ejes de coordenadas puede simplificar considerablemente
>
> [12]
>
> la solución de estos problemas así como las fórmulas a las cuales conduce. Además se puede renunciar a proceder de antemano a esa elección, es decir que se puede suponer primero ejes cualesquiera y luego modificar las fórmulas en relación con la nueva dirección que se asigna a esos ejes que suponemos son perpendiculares entre sí."

Los procedimientos que hemos esbozado conducen a la determinación del radio de los círculos y esferas buscadas y de las coordenadas de sus centros, pero como a menudo estas coordenadas no están dispuestas simétricamente en relación con los datos del problema, su expresión debe ser a menudo complicada y de una construcción difícil. Conviene entonces deducir de estas expresiones las distancias de los centros a puntos o a líneas dadas, en lugar de hacerlo simetrizando con los datos del problema. La habilidad al aplicar estos medios puede simplificar considerablemente la solución del problema.

Bibliografía

Apollonius of Perga, *Conics*, books I-III, Dana Densmore, Santa Fe, NM, 2000.

Durrande, J. B., Géométrie élémentaire. Théorie élémentaire des contacts des cercles, des sphères, des cylindres et des cônes, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* **11** (1820/21), 1–67.

Gergonne, Joseph-Diez, *La résurrection de François Viète et de Pierre de Fermat.* Texto hasta el presente inédito y firmado J. D.

Gergonne, Joseph-Diez, *Mémoire sur le cercle tangent à tríos cercles donnés, et sur la sphère tangente à quatre sphères données*, Mémoires de l'Academie des Sciences de Turin, 1814.

Gergonne, Joseph-Diez, Recherche du cercle qui en touche trois autres sur une sphère, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* **4** (1814).

Gergonne, Joseph-Diez, Recherche d'un circle qui en touche trois autres sur un plan, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* **7** (1817).

Gergonne, Joseph-Diez, Reflexion sur l'article précédent de Poncelet, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* **8** (1817).

Gergonne, Joseph-Diez, Un abonné. Sur la construction du cercle tangent à trois cercles donnés, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* **13** (1822).

Thomas, Ivo, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1957.

Viète, François, *The analytic art*, Kent State University, Kent, OH.

Bibliografía secundaria

Barbin, Evelyne, y Boyé, Anne, (eds.), *François Viète, Un mathématicien sous la Renaissance*, Vuibert, Paris, 2006.

Boyé, Anne, *L'Apollonius gallus et le problème des trois circles comme defense et illustration de la géométrie synthétique.* Thèse, Nantes (1998), Bibliothèque Sciences et Societés, Jussieu, Paris.

Boyé, Anne, *Viète géométre*, Barbin & Boyé, 2006.

Busard, H. L., Viète, François, y Gillispie, C. C., (ed.), *Dictionary of scientific biography*, Scribner's, New York, 1963.

Dhombres, Jean, *Saluer François Viète de Fontenay, mathématicien de la Renaisance.* Comunicación personal.

Durán, Antonio J., Historia, *La Gaceta de la RSME* **1** (1998), 229–233.

Eppstein, David, *Tangencies: Apollonian circles.* `http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/tangencies/apollonian.html`.

Fenaroli, Giuseppina, et al, *Collezione speciali esistenti nella Biblioteca Matematica dell'Università di Genova*, F. Barbieri y F. Cattelani (eds.), Pietro Riccardi (1828–1898) e la storiografia delle matematiche in Italia, Università degli studi de Modena, Modena, 1989.

Gillispie, Charles Coulston, (ed.), *Dictionary of Scientific Biography,* Scribner's, New York, 1970–1980.

Gisch, David, y Ribando, Jason M., Apollonius problem: a study of solutions and their connections, *American Journal of Undergraduate Research* **3** (2004), 15–25.

Otero, Mario H., *Joseph-Diez Gergonne (1771–1859): histoire et philosophie des sciences*, Université de Nantes, Nantes, 1997, 260 pp.

Otero, Mario H., Tres momentos de una construcción geométrica: Apollonius de Perga, François Viète, Joseph-Diez Gergonne, *Revista Brasileira de História da Matemática* **6** (2006), 197–218.

Peterson, Ivar, *Temple circles*, (2001). `http://www.maa.org/mathland/mathtrek_4_23_01.html`.

Ritter, Fréderic, *François Viète inventeur de l'algèbre moderne*, Dépot de la Revue Occidentale, Paris, 1895.

Santos, Sandra Augusta, y Travisan, André Luis, *O problema de Apolônio: aspectos históricos e computacionais.* `http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2004/ps/rp32-04.pdf`.

Togliatti, Eugenio G., *La biblioteca matemática dell'Università di Genova; formazioni e pleni sviluppi,* 1973.

The interactive geometry software Cinderella. `http://cinderella.de`.

Mario H. Otero, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay
Correo electrónico: `mhotero@adinet.com.uy`