# PRINCIPIOS DE LÓGICA MATEMÁTICA

NOTA DEL SR. G. PEANO

**profesor de la Universidad de Turin**

(CONCLUSIÓN)

## § 4 signos $-, \cup, \Lambda$ [1]

Siendo $a$ una proposición, con $-a$ designamos su negación.

Si $a$, $b$, $c$ representan proposiciones, se tiene:

1. $-(-a) = a$ «Dos negaciones constituyen una afirmación.»

---

(1) El signo de negación $-$, en la forma empleada se debe en rigor á Boole.

En vez de $-a$, Schroeder escribe $a_1$; Jevons A; McColl $a'$.

En vez de $a \cup b$ escribió Leibnitz $a \, n \, b$ (donde $n$ es la inicial de *uel*), Jevons $a .|. b$ y el mayor número de autores $a + b$.

DEDEKIND (*Was sind und was sollen die Zahlen*, 1.88) en vez de $a \cap b$ y $a \cup b$ escribe

2. $$a=b .=. -a=-b.$$

3. $$a \supset b .=. -b \supset -a$$

«La proposición: de $a$ se deduce $b$, es equivalente á: de no $b$ se deduce no $a$.

Por comodidad, en la escritura alguna vez en lugar de escribir el signo — delante de toda la proposición, lo escribiremos delante del signo de relación $\varepsilon$, $=$, etc.:

4. $$-(x \varepsilon s) .=. x - \varepsilon s$$

5. $$-(x=y) =. x -= y.$$

Siendo $a$, $b$ proporciones, con $a \cup b$ indicaremos la afirmación de la verdad de una al menos de la $a$ y de $b$; esto es, ó es cierta la $a$, ó es cierta la $b$. La operación $\cup$ llámase también *adición lógica*. Se tiene:

6. $$-(ab) = (-a) \cup (-b)$$

«Negar que sean ciertas á un tiempo la $a$ y la $b$ es afirmar que, ó no es cierta la $a$ ó no es cierta la $b$» ó sea «la negación de un producto es la suma de las negaciones de los factores.»

7. $$-(a \cup b) = (-a)(-b)$$

«Negar que una al menos de las $a$ y $b$ sea cierta, equivale á afirmar que la $a$ y la $b$ son ambas falsas,» ó sea «la negación de una suma es el producto de las negaciones de los términos.»

Se tiene.

8 $$a \cup b = b \cup a;\ a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = a \cup b \cup c;\ a \cup a = a,$$

fórmulas que expresan la propiedad conmutativa y asociativa de la adición lógica, análoga á la indicada en el § 1.

9. $$a(b \cup c) = ab \cup ac,$$

que expresa la propiedad distributiva de la multiplicación lógica respecto á la adición, análoga á la algébrica $a(b+c) = ab + ac$.

---

$G(a, b)$ y $M(a, b)$ notaciones poco diferentes de las empleadas por CANTOR en sus estudios sobre *Mannichfaltigkeinten* (Math. Ann t. XV y siguientes).

Se podría emplear el signo V inicial de *vero* (verdadero), para indicar una proposición idénticamente cierta, y tratándose de clases, para indicar la clase *tutto* (todo). Este signo fué usado por Peirce; es el *módulo* de la multiplicación lógica. Para indicar lo absurdo, ó el nulo, usaremos el signo $\Lambda$, ó sea la letra anterior invertida. No introduciremos el signo V que corresponde por dualidad á $\Lambda$, porque no tendremos necesidad.

En vez de los signos $\Lambda$ y V, la mayor parte de los autores escriben 0 y 1, ó signos derivados. Sin embargo, es muy útil distinguir bien los módulos de las operaciones algebraicas de los de las operaciones lógicas.



Ejemplos: Se tiene:

$$x, y \varepsilon q . \supset \therefore xy = 0 . = : x = 0 . \cup . y = 0$$

«Siendo $x$ é $y$ dos números, decir que su producto es nulo, significa decir que se anula uno de los factores.» Tomando los negativos de los dos miembros de la igualdad, según las reglas 2 y 7, se puede escribir:

$$x, y \varepsilon q . \supset \therefore xy -= 0 =: x -= 0 . y -= 0$$

«Si el producto de dos números no es nulo, son ambos al mismo tiempo diversos de cero, y viceversa.»

Emplearemos, en fin, el signo $\Lambda$ para indicar lo *absurdo*.

De aquí $ab = \Lambda$, dice que las proposiciones $a$ y $b$ son contradictorias. Se tiene:

10. $$a - a = \Lambda;\ a\Lambda = \Lambda;\ a \cup \Lambda = a$$

«afirmar y negar una misma proposición es un absurdo» «si en un sistema de ecuaciones algunas son contradictorias, el sistema es absurdo.....» Se nota la analogía entre la $\Lambda$ y el 0, cuales son los módulos de las adiciones lógica y algébrica.

11. $$a \supset b . = . a - b = \Lambda$$

«En vez de decir que de $a$ se deduce $b$, se puede decir que la afirmación de $a$ y la negación de $b$ es un absurdo.» Por esto en toda deducción, $a \supset b$, se puede transportar el segundo miembro al primero, haciéndole preceder del signo $-$ y escribiendo en el segundo $\Lambda$, y viceversa. Así, por ejemplo, la proposición 9 del § 1:

$$a = b . b = c : \supset . a = c$$

puede escribirse, transportando la $a = c$ al primer miembro:

$$a = b . b = c . a -= c : = \Lambda$$

«El sistema de las proposiciciones $a$ es igual á $b$, $b$ es igual á $c$, y $a$ no es igual á $c$, es absurdo;» y transportando la $b = c$ al segundo miembro, se podrá reducir á la forma:

$$a=b . a -= c : \supset , b -= c.$$

Resulta de aquí que se puede prescindir del signo $\supset$, reduciendo siempre el segundo miembro á la $\Lambda$. Sin embargo, nosotros lo conservaremos para mayor variedad y por analogía con la forma común de expresar el pensamiento.

Si $a, b, \ldots$.. representan clases, á los signos $-$, $\cup$, $\Lambda$ atribuiremos las significaciones siguientes: $-a =$ «los no $a$»

$a \cup b =$ «al conjunto de los indivíduos que son ó $a$ ó $b$.»

$\Lambda =$ «nada.» De aquí $a \cap b = \Lambda$ significa «ninguna es $b$ »

De aquí que el signo $\Lambda$ se se leerá *absurdo* ó *ninguno*, según que se trate de proposiciones ó de clases; en los dos casos tiene la misma propiedad, como el signo $\supset$.

Respecto al signo de la deducción ($\supset$) entre dos proposiciones, observaremos aún lo que sigue: cuando $a$ y $b$ son proposiciones que contienen letras variables $x, y, \ldots$. con $a \supset b$ entendemos que «cualesquiera que sean $x, y \ldots$, siempre que satisfagan á la $a$ será cierta la $b$.

Así la $$x, y \varepsilon \mathrm{Q}. x - :\supset . x + y > 2\sqrt{xy}$$

significa que: «cualesquiera que sean las dos cantidades positivas $x$ é $y$, con tal que no sean iguales, será etc. Pero alguna vez se quiere afirmar la deducción sólo respecto de alguna ó algunas de las letras variables; para indicar esto, escribiremos como índice de $\supset$ la letra respecto à la que se quiere hacer la deducción. Así, siendo $a$ y $b$ proposiciones que contienen la letra $x$ además de otra letra, la expresión $a \supset_x b$ significa «cualquiera que sea $x$, de $a$ se deduce $b$.» Esta proposición cesa de ser una proposición absoluta, pero es una condición entre las letras restantes. Asi, se tiene:

$$a, b, c \,\varepsilon\, q : x \,\varepsilon\, q . \supset_x . ax^2 + b_x + c = 0 \therefore \supset : a = 0 . b = 0 . c = 0$$

Si $a, b, c$ son tres números, y si cualquiera que sea el número $x$, se tiene $ax^2 + \ldots = 0$, los tres números dados son nulos.»

Análogamente $a =_x b$ indica que, cualquiera que sea $x$, las proposiciones $a$ y $b$ son equivalentes, ó sea $a \supset_x b . b \supset_x a$.

$a =_x \Lambda$ significa que, cualquiera que sea el valor de $x$, la $a$ es absurda» ó sea «no existen de las $x$ que satisfagan á la condición $a$.»
$a - =_x \Lambda$ significa «existen de las $x$ que satisfacen á la condición $a$.»

**Conc'usión**

Los signos
$\varepsilon$ (*es*) $=$ (*es igual*), $\supset$ (*se deduce, ó está contenido*), $\cap$ (*es* en general sobreentendido), $\cup$ (*ó*), $-$ (*no*), $\Lambda$ (*absurdo ó ninguno*), permiten expresar cualquier relación lógica.



Conviene dar un nombre á dichos signos. Pero estos nombres, tomados en lenguaje común, los representan solo aproximadamente; porque los signos tienen siempre el mismo significado, mientras que las palabras no los tienen iguales. Para traducir en símbolo una proposición ordinaria, ocurre analizarla, ver el significado que tienen las diversas palabras y representar estos significados con símbolos equivalentes; pero sería erróneo el sustituir desde luego los símbolos $\varepsilon$, $\cap$, $\cup$, .... en lugar de las palabras *es, y, ó*.

En las páginas precedentes se enunciaron algunas propiedades de estos símbolos. Pero existen otras muchísimas: es de notar el *principio de dualidad*, por el que de toda identidad lógica se pasa á otra, cambiando los signos $\cap$ y $\cup$; se recordará solo que ya Boole llegó á resolver cualquier sistema de ecuaciones con una ó varias incógnitas, ligadas á clases conocidas con las operaciones $\cap$, $\cup$, $-$, repetidas un número arbitrario de veces.