MAT ^{2}

MATerials MATemàtics
Volum 2008, treball no. 2, 21 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Algunos momentos matemáticos del cine

Alfonso Jesús Población Sáez

La intención original de este artículo era elegir las diez mejores escenas matemáticas llevadas a la pantalla en largometrajes comerciales (algo así como un *Top Ten* de las matemáticas en el cine). Sin embargo, como sucede en cualquier selección del mismo estilo, el resultado puede no ser demasiado objetivo: depende del gusto del que realiza la lista, pueden dejarse fuera películas no conocidas, etc. Hablando de matemáticas y no siendo precisamente una disciplina súper abundante cinematográficamente, el asunto se simplifica un poco, aunque aparecen nuevas interrogantes en cuanto a los criterios que nos marquen el orden de preferencia: ¿genialidad del argumento utilizado?, ¿cantidad de referencias matemáticas presentes en el film?, ¿originalidad en la utilización de las matemáticas?, ¿fidelidad a la disciplina?, ¿presentación adecuada del mundillo matemático?

Después de meditarlo algún tiempo, he decidido realizar dos listas independientes de películas. Una, con cinco películas, para aquellas en las que las matemáticas aparecen explícitamente, ordenadas según su nivel de profundidad, y otra para aquellas en las que, sin entrar en demasiados detalles técnicos, han utilizado nuestra disciplina de un modo correcto y original en el desarrollo de la trama, o han logrado divulgar al público en general algunos detalles de nuestra tarea profesional. Como queda dicho, la selección puede no ser compartida por otras personas, por lo que parece más prudente titular estas páginas, mejor que con algo del tipo "*las diez mejores*", como se ha hecho finalmente.

1. Matemáticas Explícitas

Ahora me toca a mí. (*It's my turn*, Claudia Weil, EE. UU., 1980)

La película no es muy conocida, ha sido pocas veces emitida por televisión, es difícil de localizar, y en conjunto, como película, es más bien mediocre, pero es la única en la que se enuncia completamente un teorema y se demuestra con todo detalle, al punto de haber sido referenciada por textos específicos de álgebra homológica.

Jill Clayburgh interpreta a Kate Gunzinger, una profesora universitaria de matemáticas un tanto despistada y avasallada por casi todo el mundo, que decide en un momento dado tomar sus propias decisiones harta de tener que ceder siempre (de ahí el título de la película). Al inicio de la película, en una de sus clases, nos demuestra el conocido como ***lema de la serpiente***:

Lema: *Se considera el siguiente diagrama conmutativo en una categoría abeliana*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde las filas son sucesiones exactas. Existe entonces una sucesión exacta

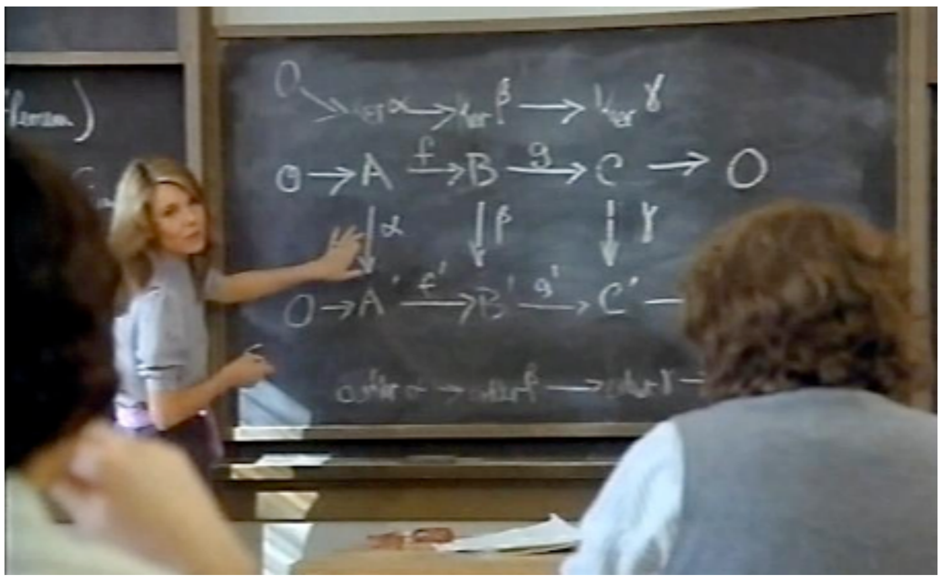
$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{coker}(\alpha) \to \mathrm{coker}(\beta) \to \mathrm{coker}(\gamma) \to 0$$

Nota: La categoría de la que se habla en la película es la de grupos abelianos, pero el resultado es igualmente válido para módulos sobre un anillo, o para espacios vectoriales sobre un cuerpo.

Sigamos las explicaciones de Kate (puntualizándolas donde sea necesario), aunque eso sí, lo haremos a partir de la versión original, ya que como se comenta en [POB], el doblaje al castellano omitió algunas palabras clave para seguir la demostración. Los diálogos de la película van en cursiva.

Kate: *Dejadme mostraros cómo construir la aplicación S que es lo más divertido del lema. Supongamos que tenemos un elemento en el* $\mathrm{Ker}(\gamma)$, *es* *decir, un elemento en C, de modo que γ lo lleva a cero en C'. Podemos volver a B vía la aplicación g que es suprayectiva...*

En ese momento se produce la primera interrupción de un estudiante “listillo”, de apellido Cooperman (en la foto el alumno que se ve de espalda).



Cooperman: *¡Un momento, un momento! No es la única solución.*

Kate prosigue su explicación como puede.

Kate: *Lo es, Sr. Cooperman*, (enlazando con la explicación anterior)... *hasta llegar a un elemento en la imagen de f, ¿de acuerdo? Entonces volvemos a un punto fijo b aquí* (señala a B). *Tomando β de b, llegamos a cero en C' por la conmutatividad del diagrama. Está por tanto en el núcleo de la aplicación g'* (el alumno hace gestos negativos con la cabeza), *y por ello en la imagen de f' por la exactitud de la sucesión inferior ...*

Cooperman: *¡No!*

Kate: ... *podemos retroceder...*

Kate: ... *a un elemento de A'...*

Cooperman: *¡No está bien definido!*

Kate: *Está bien definido gracias a la imagen de α. Y define un elemento en* Coker(α). *Esta es la serpiente* (dibuja una flecha en el diagrama, desde Ker(γ) hasta Coker(α)).

Repasemos la demostración. Sea $x\in \operatorname{Ker}\gamma \subseteq C$. Como g es suprayectiva[1], existe un $b\in B$ tal que $g(b) = x$. Por la conmutatividad del diagrama ($g' \circ \beta = \gamma \circ g$), $g'(\beta(b)) = \gamma(g(b)) = \gamma(x) = 0$ (porque $x\in \operatorname{Ker}\gamma$), o sea que $\beta(b)\in \operatorname{Ker} g'$. Como la sucesión inferior es exacta, $\operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im}(f')$, es decir, existe $y\in A'$ tal que $f'(y) = \beta(b)$. Se define entonces $S(x) = y + \operatorname{Im}\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "S"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[r] & \operatorname{Coker}\gamma &
\end{tikzcd}$$

Queda para el lector interesado la prueba que tanto demanda el alumno Cooperman, es decir que S está bien definida (o sea que $S(x)$ sólo depende de x y no de las elecciones de b y de z), y las demostraciones de que S es un homomorfismo y que la sucesión resultante es exacta. En ningún caso es demasiado complicado; basta tener un poco de paciencia para escribirlo todo correctamente.

Hace años el álgebra homológica no era una materia atractiva: demasiado formalismo, aburrida y poco útil para todos aquellos que no se dedicaran a la topología algebraica. Hacia 1958 esta actitud cambió cuando Serre la utilizó para la caracterización de anillos regulares locales y utilizó este criterio para demostrar que cualquier localización de uno de estos anillos es asimismo regular (hasta entonces sólo se conocían casos particulares). Casi a la vez se logró demostrar (Auslander y Buchsbaum) que todo anillo regular local es un dominio de factorización única. Con el tiempo, al ampliarse el campo de

[1]Recordemos (aparece también en la pizarra de la película) que una sucesión

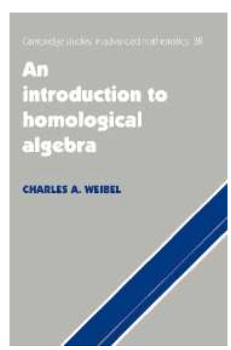
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es exacta si, y sólo si, la imagen de cada una de las cuatro aplicaciones coincide con el núcleo de la siguiente. De esta condición se deduce que la sucesión es exacta si, y sólo si, f es inyectiva, g es suprayectiva y g induce un isomorfismo de $\operatorname{Coker}(f) = B/f(A)$ sobre C.

aplicación del álgebra homológica, ésta se ha ido convirtiendo en una parte necesaria dentro de la formación de los licenciados en matemáticas, aunque su enseñanza sigue siendo dificultosa para el profesor por la pesadez de sus definiciones y la escasez de sus aplicaciones. Esta situación es la que trata de reflejar esta escena de la película que, claramente, está perfectamente documentada.

El asesoramiento matemático de la película corrió a cargo de Benedict H. Gross (no aparece en los títulos de crédito), profesor de la Universidad de Harvard, especialista en teoría de números, responsable junto a Don Zagier del teorema de Gross–Zagier acerca de L-funciones sobre curvas elípticas. Su labor no sólo fue excelente sino premonitoria: en el año de producción de la película, 1980, el problema al que se hace referencia en otra escena de la clasificación de grupos simples no estaba resuelto; sin embargo en 1985 pudo probarse después de décadas de intenso trabajo, mucho antes de lo que se esperaba. Establece cinco tipos diferentes para cualquier grupo simple finito, entre los que están los grupos cíclicos de orden primo, algunas clases de grupos de Lie y los grupos esporádicos (de los que existen 26 variedades), de los que habla la película. Este teorema contiene unos 100 teoremas individuales y su demostración completa ocupa 15.000 páginas por lo que se le conoce también como el teorema enorme. Y no son nada gratuitas las afirmaciones de los protagonistas sobre la importancia de su deducción, ya que el papel que desempeñan los grupos simples es similar al de los números primos en teoría de números. Cualquier número natural tiene una única factorización en producto de números primos; cada grupo finito puede representarse como producto de un subgrupo normal por un grupo cociente. Así, es posible construir grupos finitos a partir de grupos simples. Por eso el objetivo prioritario de la teoría de grupos finitos fue durante mucho tiempo el dar una clasificación completa de los grupos simples.

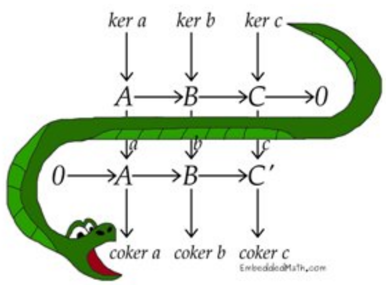
Volviendo a la escena comentada, Charles A. Weibel, profesor de la Universidad de Rutgers en su libro *An Introduction To Homological Algebra*, cuya segunda edición fue publicada en octubre de 1995 por Cambridge University Press, afirma que *"no se incluye la demostración del teorema de la serpiente porque lo mejor es visualizarla. De hecho, una prueba bastante clara es la mostrada por Jill Clayburgh al inicio de la película "Ahora me toca a mí"*.

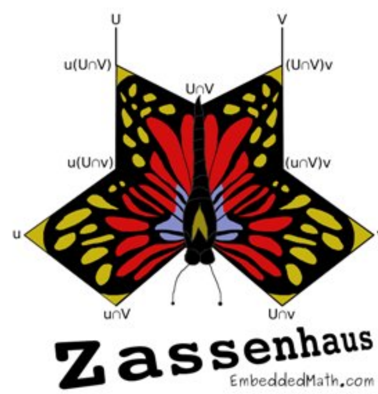


En internet, dicha secuencia puede verse (en inglés) en el enlace

http://www.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/swf/myturn_snake.html

Finalmente, como curiosidad, en los EE. UU. se comercializan gorras, jarras, camisetas, relojes, pins y demás *merchandising* con dibujos relativos a teoremas varios (no deja de ser un modo de recordarlos). A modo de ejemplo véanse los modelos para el lema de la serpiente y el de la mariposa de Zassenhaus, ambos de álgebra homológica:





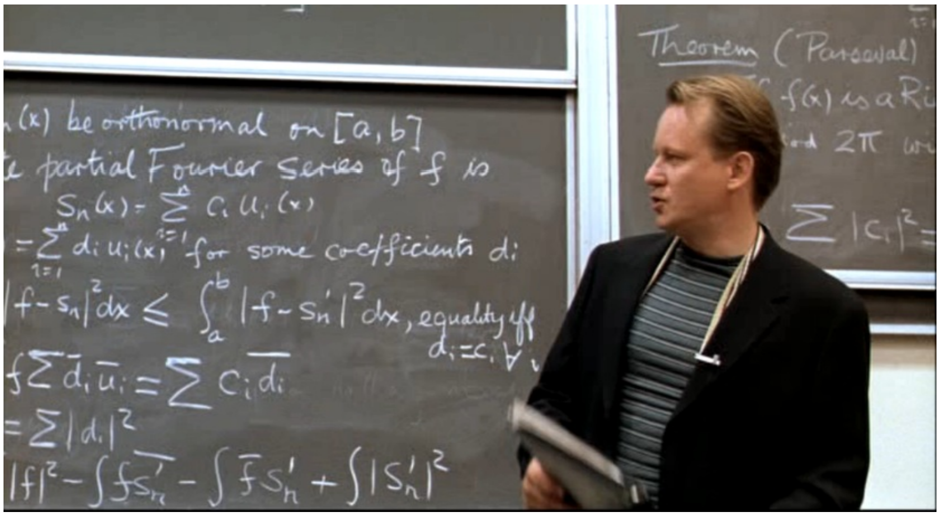
El Indomable Will Hunting (*Good Will Hunting*, Gus Van Sant, EE.UU., 1997)

Al principio de la película el profesor Lambeau (Stellan Skarsgård) aparece dando clase a sus alumnos. Acaba de explicar y de demostrar el *teorema de Parseval,* uno de los resultados básicos del análisis de Fourier. En la pizarra se vislumbra parte de dicha demostración. Se describe del siguiente modo:

Teorema (Parseval): *Si $f(x)$ es una función de periodo 2π integrable Riemann, con serie de Fourier $f(x) = \sum c_i u_i$, entonces*

$$\sum |c_i|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

Anteriormente Lambeau ha demostrado otro resultado previo sobre conjuntos ortonormales (ver imagen):



Teorema: *Sea* $\{u_n(x)\}$ *un conjunto ortonormal en* $[a,b]$ *y* $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x)$ *la serie parcial finita de* f. *Sea* $s'_n = \sum_{i=1}^{n} d_i u_i(x)$ *para ciertos coeficientes* d_i.

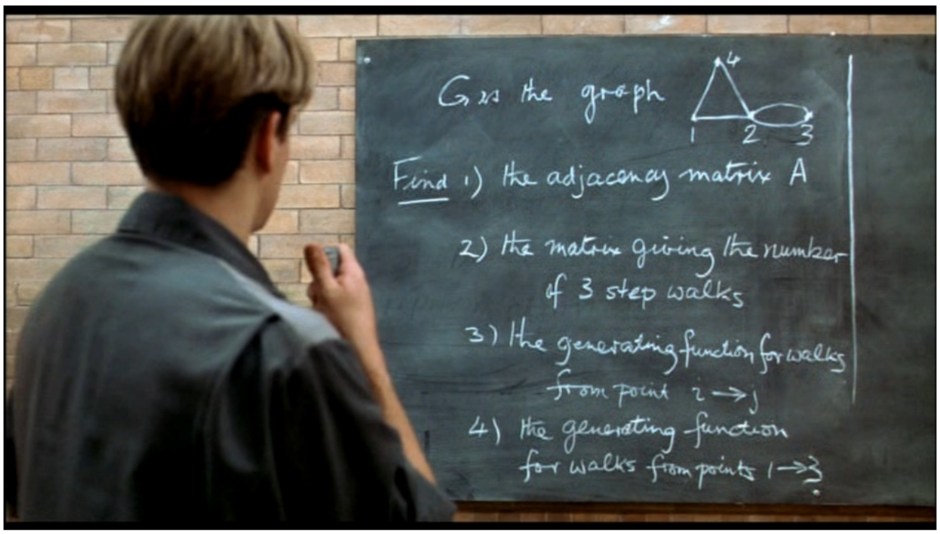
Entonces

$$\int_a^b |f - s_n|^2 \, dx \leq \int_a^b |f - s'_n|^2 \, dx$$

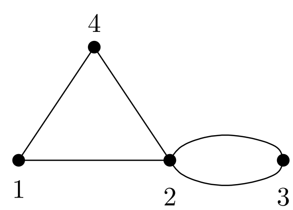
verificándose la igualdad si, y sólo si $d_i = c_i$ *para todo* i.

Llama la atención el que estos resultados estén perfectamente descritos matemáticamente, hipótesis incluidas, y sin embargo el profesor rebautice a Parseval (tanto en la versión original como en la subtitulada) como *Percival*. Claramente todo está preparado, salvo la línea final que es la que vemos que escribe él. En otra escena, Lambeau repasa unos ejercicios que ha propuesto al protagonista Will (Matt Damon) y comenta que ha aplicado *McLaurin* (se refiere al *desarrollo de McLaurin*). En la versión doblada y en la subtitulada en castellano, se dice/escribe McLoren, síntomas de que, a las gentes del mundo cinematográfico no les importan demasiado ciertos aspectos, seguramente para ellos, "menores". ¿Harían lo mismo si algún actor propusiera a Quevedo como autor de *La Celestina*? ¿O es que es menos cultura la científica que la del resto de disciplinas?

Al finalizar la clase, Lambeau trata de motivar a sus alumnos retándoles a resolver un problema difícil de "*sistemas de análisis de Fourier*" prometiendo a cambio una buena calificación y la inclusión del "genio" en el boletín de la universidad. Para darle mayor interés no sólo desafía a sus alumnos, sino que extiende la proposición a matemáticos o físicos cualificados (profesores del MIT, medallistas Fields, etc.). Cuando leemos sin embargo el problema que aparece, ni tiene que ver con el análisis de Fourier (es de teoría de grafos), ni es de la complejidad con que se le presenta.



Su enunciado dice así:
Dado el grafo



Encontrar:

1) la matriz de adyacencia A.

2) la matriz que da el número de trayectorias de longitud tres

3) la función que genera las trayectorias de $i \to j$

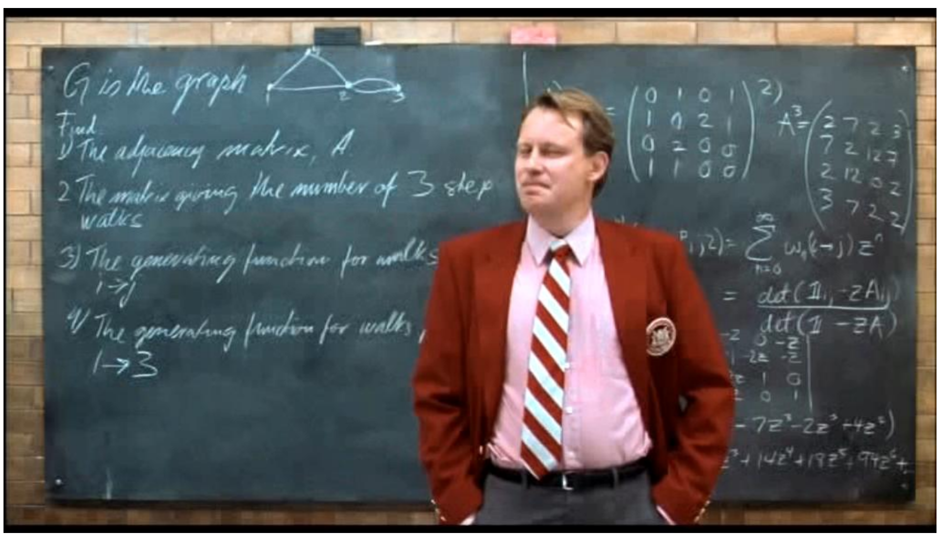
4) la función que genera las trayectorias de $1 \to 3$

Veamos si es tan complicado.

1) Recordemos que se define ***matriz de adyacencia*** de un grafo a la matriz booleana cuyo elemento (i, j) vale 1 si el vértice v_i es adyacente a v_j, y 0 si no lo es. En el caso de un multigrafo con bucles, la matriz no tiene porqué ser booleana.

   En nuestro caso los $a_{ii} = 0$, porque no hay bucles. El vértice 1 y el 2 se unen por un solo lado, por lo que $a_{12} = a_{21} = 1$, como les sucede a los vértices 1 y 4 y al 2 con el 4. En cambio hay dos lados entre el segundo y el tercer vértice, por lo que $a_{23} = a_{32} = 2$. En definitiva la matriz de adyacencia será

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



2) El número de trayectorias de longitud tres viene dado por

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Su interpretación es clara. Por ejemplo, el a_{11} indica que existen dos trayectorias de longitud tres que comienzan en el primer vértice y acaban en él: 1–2–4–1 y 1–4–2–1. Las tres que llevan el primer vértice al cuarto (a_{14}) son: 1–4–1–4, 1–2–1–4 y 1–4–2–4. Un poco más laborioso sería encontrar A^n que dé el número de trayectorias de longitud n, aunque en absoluto complicado. Habría que calcular primero los autovalores de A (que diagonaliza porque es simétrica). El polinomio característico resulta $p(\lambda) = \lambda^4 - 7\lambda^2 - 2\lambda + 4$, una de cuyas raíces es inmediata, $\lambda = -1$. Las otras tres, también reales, tiene una expresión más engorrosa, aunque cualquier asistente matemático (DERIVE, por ejemplo) nos los proporciona, o en su defecto, una aproximación numérica. Después el teorema de Cayley-Hamilton nos facilita una evaluación recursiva de las potencias de A que nos evita casi por completo los cálculos más tediosos.

3) Por no extendernos demasiado, digamos simplemente que la función generatriz vendrá dada por la siguiente expresión (DERIVE, Mathematica o Maple efectúan rápidamente la operación cuyo resultado es una matriz 4×4 cuyos elementos son funciones). Obsérvese la relación entre la matriz del sumatorio y la de adyacencia A anterior.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & z & 0 & z \\ z & 0 & 2z & z \\ 0 & 2z & 0 & 0 \\ z & z & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$$

La función que genera las trayectorias de los vértices 1 al 3 es el elemento f_{13} de la matriz anterior, esto es,

$$f_{13}(z) = \frac{2z^2}{4z^3 - 6z^2 - z + 1} = 2z^2 + 2z^3 + 14z^4 + 18z^5 + O(z^6)$$

Dada A la matriz de adyacencia del grafo G, las entradas a_{ij}^n de las potencias de A, A^n, proporcionan el número de trayectorias (se pueden repetir vértices y aristas) de longitud n que conectan el vértice i con el vértice j. Dichos valores coinciden con los sucesivos coeficientes de los elementos de la función generatriz. Así en el ejemplo anterior, el número de trayectorias de longitud m que unen los vértices 1 y 3 viene dado por el correspondiente coeficiente de z^m.

El nivel de dificultad del ejercicio no es por tanto acorde con lo manifestado por Lambeau, ya que un alumno que haya seguido un curso elemental de teoría de grafos puede resolverlo sin excesivas complicaciones. Dos referencias interesantes sobre teoría de grafos son [C–Z] y [HAR].

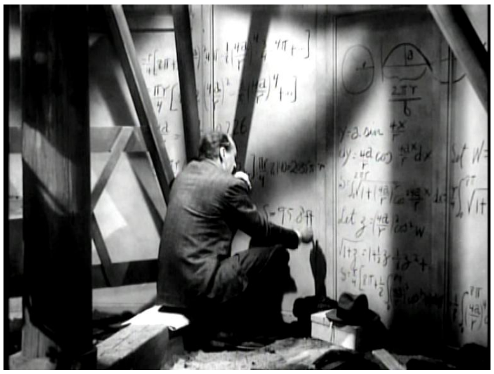
La película contiene otros momentos en los que se alude a las matemáticas. Una de las más destacables se eliminó del montaje final aunque puede seguirse en el contenido extra del DVD: un ejemplo en el que Will y Lambeau verifican el **teorema de Szemerédi** (*Toda sucesión de números enteros de densidad positiva contiene progresiones aritméticas de longitud arbitraria*). En [POB] pueden verse más detalles sobre éste y otros momentos interesantes de la película desde el punto de vista matemático.

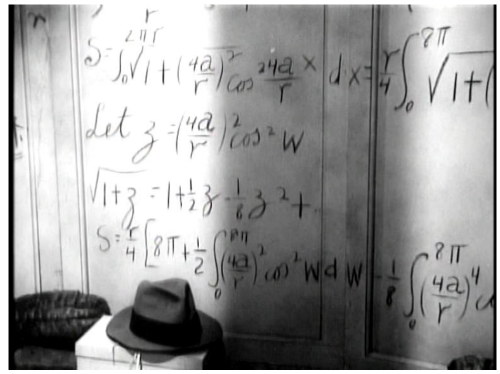
Clandestino y Caballero (*Cloak and dagger*, Fritz Lang, EE. UU., 1946)

En la etapa norteamericana de la filmografía del realizador alemán Fritz Lang hay una tetralogía de películas acerca del peligro que suponía el auge del nazismo para el mundo basándose en las vivencias que él mismo había experimentado en primera persona. De ellas sólo una fue estrenada comercialmente en España (*El hombre atrapado,* producida en 1941; aquí se estrenó en 1983). Las otras (*Los verdugos también mueren* (1942), *El Ministerio del Terror* (1943) y *Clandestino y Caballero* (1946)) sólo han podido verse recientemente en su edición en DVD, aunque la última, fue emitida en varias ocasiones por la segunda cadena de la televisión pública española.

Alvah Jesper (Gary Cooper) es un pacífico físico nuclear al que la OSS (Oficina de Servicios Estratégicos) encomienda localizar al profesor Polda, un colega experto en energía atómica que está trabajando para los nazis, averiguar hasta donde ha llegado su colaboración (por eso precisan de un experto en el tema), y convencerle de que está en el lado equivocado por las buenas o por las malas. Reticente en un principio, acaba aceptando la misión, convirtiéndose así en un "clandestino" (apelativo con el que eran conocidos los espías de la OSS), sin dejar de ser un caballero (de ahí el título del film). Sus pesquisas le llevan hasta Italia donde conoce a su enlace, Gina (Lili Palmer) que le facilita todo lo que necesita. En un momento dado, Gina debe encontrar otro alojamiento, y Alvah la espera escondido dentro de un tiovivo de feria.

Cuando vuelve a buscarlo, ve con sorpresa que el científico ha llenado de ecuaciones las paredes del interior del carrusel.





Vemos el esbozo de una circunferencia de radio r, y lo que parece un arco de cicloide. Debajo las siguientes expresiones:

$$y = a \sin \frac{4x}{r}$$
$$dy = \frac{4a}{r} \cos \frac{4ax}{r}\, dx$$
$$S = \int_0^{2\pi r} \sqrt{1 + \left(\frac{4a}{r}\right)^2 \cos^2 \frac{4ax}{r}}\, dx = \frac{r}{4} \int_0^{8\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{4a}{r}\right)^2 \cos^2 w}\, dw$$
$$\text{Let } z = \left(\frac{4a}{r}\right)^2 \cos^2 w$$
$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \cdots$$
$$S = \frac{r}{4}\left[8\pi + \frac{1}{2}\int_0^{8\pi} \left(\frac{4a}{r}\right)^2 \cos^2 w\, dw - \frac{1}{8}\int_0^{8\pi} \left(\frac{4a}{r}\right)^4 \cos^4 w\, dw + \cdots\right]$$

Al momento tiene lugar la siguiente conversación:

–Alvah (ante la atónita expresión de Gina)*: Me mantenía ocupado mientras te esperaba.*

–Gina: *Pero, ¿qué es?*

–Alvah: *La integral de una onda senoidal. No es tan difícil como parece. Para que te hagas una idea: imagínate a uno de esos caballitos dando vueltas y subiendo y bajando al mismo tiempo.*

En efecto, las expresiones que Gary Cooper ha escrito corresponden exactamente a la resolución del problema que ha descrito: el cálculo mediante una integral de la distancia que recorre cada uno de los caballitos del carrusel en su desplazamiento vertical a la vez que gira circularmente. Para ello da una parametrización de la curva que describe el objeto (la expresión de y, una función seno), y posteriormente emplea la fórmula para el cálculo de una longitud de arco de curva ($\int \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$). Obtiene la derivada de la función (escrita como dy) y la sustituye en la expresión de la integral. Todo es correcto, salvo la errata del factor "a" que seguramente sea un fallo del actor en la memorización de las expresiones (porque por mucho que nos agrade Gary Cooper, es bastante cuestionable que entendiera lo que estaba escribiendo): en lugar de la dy correspondiente, ha "añadido" una constante a; debería haber escrito

$$dy = \frac{4a}{r}\cos\frac{4x}{r}\,dx$$

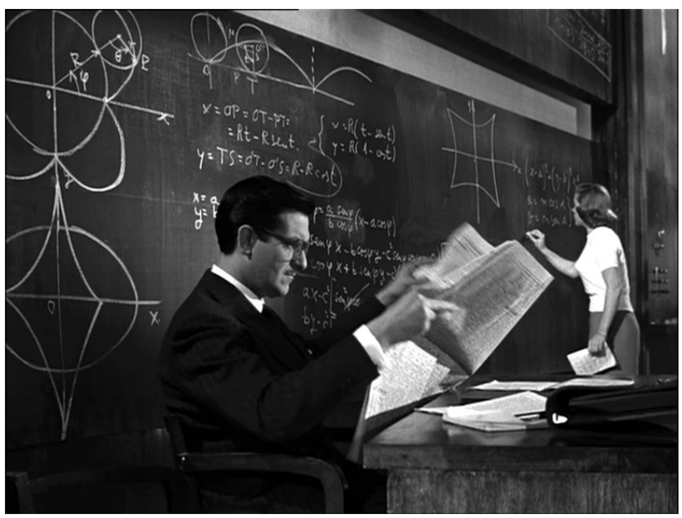
Hace entonces "correctamente" el cambio de variable $w = (4x)/r$. (Obsérvese que salvo la constante "a" todo cuadra, hasta el cálculo de los extremos de integración mediante el teorema del cambio de variable). Como dicha integral no tiene primitiva en términos de funciones elementales, ya que es una integral elíptica de segunda especie (o sea de la forma $\int \sqrt{1-\alpha^2 \operatorname{sen}^2 x}\,dx$ sin más que pasar el cuadrado del coseno a cuadrado de seno mediante la fórmula fundamental de la trigonometría circular), calcula una aproximación sustituyendo la función integrando por los primeros términos del desarrollo en serie de MacLaurin de la función $\sqrt{1+z}$; concretamente toma el polinomio de segundo grado resultante, e integra éste, término a término.

El director declaró en una larga entrevista acerca de su filmografía que el personaje de Alvah estaba basado en el físico Jacob Robert Oppenheimer, aunque también guarda muchas similitudes en su faceta de espía con el jugador de béisbol Morris Berg.

Muerte de un ciclista (Juan Antonio Bardem, España/Italia, 1955)

El cine patrio ha aportado gran cantidad de escenas en las que aparecen las matemáticas, casi todas relativas al mundo escolar (ahí se pone de manifiesto el especial "cariño" que los españoles profesamos a esta disciplina: la mayor parte de las veces en las que se desea poner un ejemplo del padecimiento del alumno en un aula, se expone dentro de la clase de matemáticas), y mayoritariamente con matemáticas de niveles elementales. Parece oportuno destacar por tanto la célebre escena del examen de Geometría de esta película, en la que el protagonista, sometido a una creciente tensión por el crimen que ha cometido, manda callar a una de las mejores alumnas del curso. Recordemos su exposición:

Alumna: *. . . queda sólo por demostrar que el contorno aparente del toro es igual a la envolvente de las circunferencias. Si suponemos que el centro de la circunferencia describe una elipse de semiejes* m *y* n*, las ecuaciones paramétricas de esta elipse serán* $\begin{cases} a = m\cos\alpha \\ b = n\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$*. Para obtener la envolvente de esta familia de circunferencias, habrá que derivar* $2(x-a)(-m\operatorname{sen}\alpha)+2(y-b)(m\cos\alpha)=0$*, y eliminando* α *entre estas ecuaciones, resulta la ecuación (1) de la envolvente de las circunferencias, cuyos centros describen la elipse (2), cuya proyección ortogonal sobre el plano* $z=0$ *de la circunferencia base de la superficie canal. Es decir la toroide, con lo que queda demostrado. Por tanto el toro es la única superficie. . .*

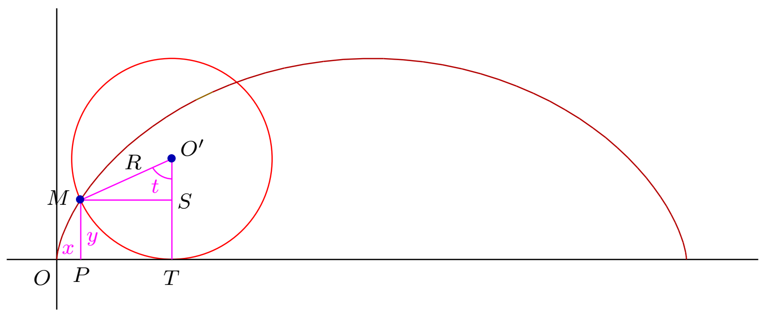


Al parecer el tema que está desarrollando la alumna versa sobre las curvas mecánicas y sus envolventes. En la pizarra observamos las gráficas de la cicloide y la epicicloide y la obtención de las ecuaciones paramétricas de la primera.

Recordemos que **la cicloide** es la curva descrita por un punto de una circunferencia cuando ésta rueda sin deslizar sobre una recta. Para obtener sus ecuaciones, llamemos M al punto móvil de la circunferencia que parte del origen de coordenadas O. Las coordenadas de M después de que la circunferencia haya girado un ángulo t (ver dibujo) las obtiene del siguiente modo:

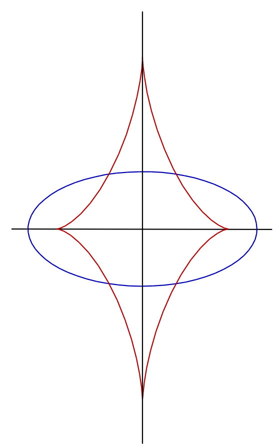
Como $OT = \text{arco}(MT) = Rt,$ y $PT = R\,\text{sen}\,t,$ se tiene que

$$x = OP = OT - PT = Rt - R\,\text{sen}\,t = R(t - \text{sen}\,t)$$
$$y = TS = O'T - O'S = R - R\cos t = R(1 - \cos t).$$



También observamos la gráfica de la evoluta (lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva) de la elipse.

Dada la elipse $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\,t \end{cases}$ en coordenadas paramétricas, se calculan las expresiones



$$\alpha = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'} \quad \text{y} \quad \beta = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}$$

En este caso,

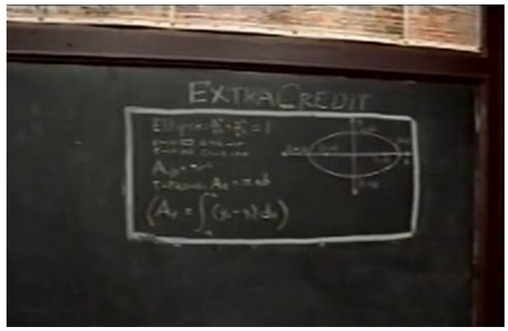
$$\alpha = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t, \quad \beta = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\text{sen}^3\, t$$

Eliminando el parámetro t, se obtiene la ecuación de la evoluta de la elipse

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{\beta}{a}\right)^{2/3} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{2/3}$$

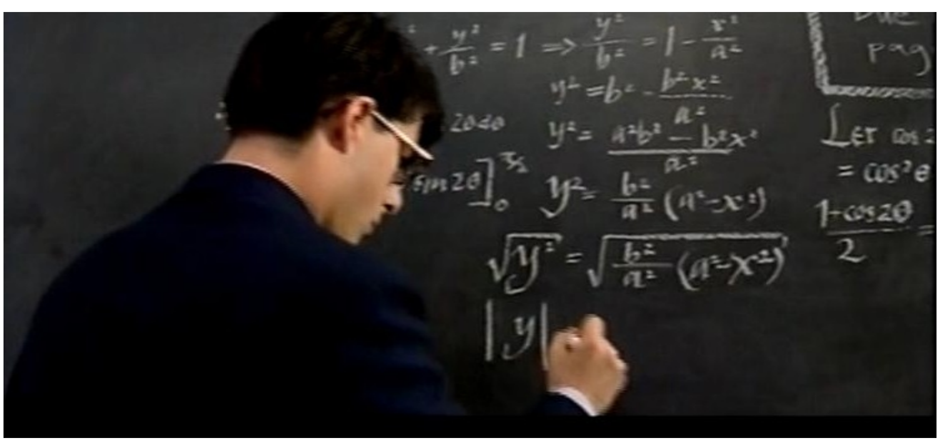
que es la astroide representada en naranja, cuya gráfica aparece también en el fotograma previo. Finalmente, dada una circunferencia de radio R, si dibujamos una familia de circunferencias de radio r ($r < R$) cuyos centros estén en la circunferencia inicial (la que la alumna denomina "superficie canal"), su envolvente (la de la familia de circunferencias) son otras dos circunferencias de radio $R + r$ y $R - r$. Dibujando y proyectando todas ellas sobre un plano, aparece la superficie toroidal que se menciona.

Academia Rushmore (*Rushmore*, Wes Anderson, EE. UU., 1998).



Si alguien nos dijera que tratáramos de resolver la ecuación más difícil del mundo, probablemente nos lo tomaríamos a guasa. ¿Quién podría determinar cual es esa ecuación? ¿Cómo seríamos nosotros capaces de llevar a cabo esa tarea? ¿Cómo animarnos a ello? Si somos alumnos, es fácil responder a la última cuestión: "*Si alguien de vosotros soluciona el problema, me encargaré personalmente de que no vuelva a abrir un libro de matemáticas el resto de su vida*". Motivador, aunque poco edificante, al menos desde el punto de vista de un matemático.

En realidad, no es para tanto. El cine acostumbra a ser a veces demasiado grandilocuente en sus expresiones, más aún si estamos ante una comedia llena de dobles sentidos. Si echamos un vistazo al fotograma, se trata de calcular el área encerrada por la elipse de semiejes a y b, respectivamente. Una cuestión elemental de cálculo integral en una variable de un curso preuniversitario, o como mucho, del primer curso de una ingeniería o una licenciatura. Su resolución, con todo detalle, es sin embargo destacable para lo que se suele estilar en el medio cinematográfico. Veamos cómo lo hace.



Considera la ecuación de la elipse de semiejes a y b, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. A continuación, despeja y en los siguientes pasos:

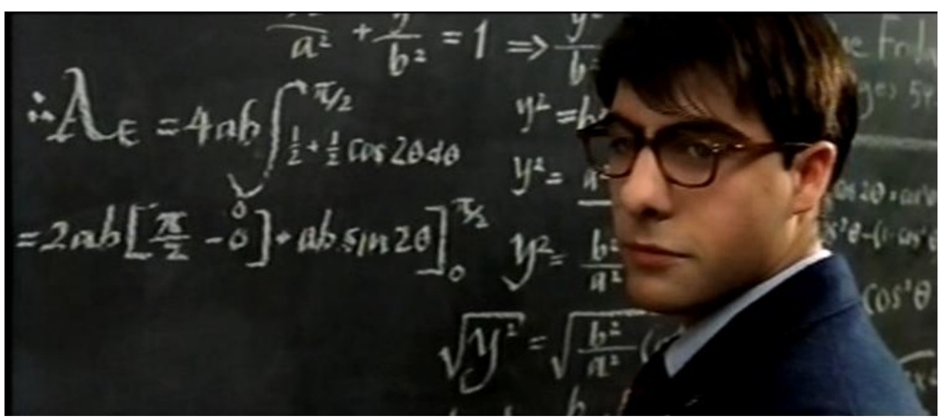
$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2},\quad y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2},\quad y^2=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2},\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$
$$\sqrt{y^2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}$$

Después simplifica correctamente el cuadrado con la raíz, cosa poco habitual entre los alumnos en general. Es sabido que $\sqrt{y^2}=|y|$, de donde se obtienen

$$\begin{aligned} y&=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad\qquad & y_1&=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\\ -y&=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} & y_2&=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\end{aligned}$$

Describe a continuación la integral que resuelve la cuestión:

$$\mathcal{A}_\epsilon=\int\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\left\{\frac{-b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right\}dx=\frac{2b}{a}\int\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta}\,a\,\cos\theta\;d\theta$$



Después de efectuar el cambio de variable $x=\operatorname{sen}\theta$, aparece la integral del cuadrado del coseno. A un lado de la pizarra, en un recuadro, ha obtenido su expresión en función del ángulo doble, es decir,

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta-(1-cos^2\theta)$$
$$\frac{1-\cos 2\theta}{2}=\cos^2\theta$$

terminando entonces la integral después de calcular los extremos de integración a partir del teorema del cambio de variable para integrales definidas:

$$\mathcal{A}_\epsilon = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta \; d\theta = \pi ab$$

2. Divulgación de la Matemática

En cuanto a las películas que mejor describen el quehacer de un matemático, por lógica, los máximos candidatos deberían ser las dedicadas a recrear la biografía de personas reales. Desafortunadamente el cine no se ha fijado demasiado en esta profesión en sus producciones y cuando lo ha hecho, no ha sido precisamente su labor profesional la que ha motivado el argumento. La más destacable es sin duda, la sueca ***Una montaña en la cara oculta de la Luna*** (*Berget på Månens Baksida*, Lennart Hjulström, 1983), sobre Sofía Kovalevskaya, en la que se describen con acierto su dedicación a la investigación a costa de "descuidar" un tanto la educación de su hija (Sofía era viuda y vivían solas), los problemas que le acarreaba la sociedad de su época que no admitía a una mujer como docente en la universidad, el apoyo de grandes matemáticos contemporáneos como Weierstrass o Mittag–Leffler, la difícil relación con Maxim Kovalevskij, etc.

Un *biopic* relativamente reciente es ***Una Mente Maravillosa*** (*A Beautiful Mind*, Ron Howard, EE. UU., 2001) basada muy libremente en la vida del premio Nobel en Economía John Forbes Nash. Mucho se ha criticado negativamente esta película (biografía falsa, efectismo facilón a costa de una enfermedad con el objetivo claro de ganar premios, recursos copiados de otras películas, entre otras lindezas), y en muchos aspectos con razón. Sin embargo es destacable la recreación del feroz ambiente de competitividad entre los alumnos de postgrado por lograr la mejor colocación posible. También con el punto de mira en John Nash se encuentra ***La verdad Oculta*** (*Proof*, John Madden, EE. UU., 2005), basada en una obra teatral de gran éxito en los países anglosajones, en la que prima la angustia personal de una brillante matemática que ha puesto por encima de su éxito personal la ingrata labor de cuidar a un padre enfermo del que probablemente haya heredado su mal. Hablando de la angustia vital de los genios incomprendidos en una sociedad mediocre tenemos nuevamente que mencionar ***El indomable Will Hunting*** y ***El Pequeño Tate*** (*Little Man Tate*, Jodie Foster, EE. UU., 1991).

Volviendo a las biografías, es también destacable la magnifica labor realizada en los suburbios de Los Ángeles por el profesor Jaime Escalante, puesta en escena en ***Lecciones Inolvidables*** (*Stand and Deliver*, Ramón Menéndez, EE. UU., 1988), una discreta producción con algunos de los tópicos habituales en las películas de bandas callejeras, pero con una notable y realista interpretación de Edward James Olmos.

Existen otras películas que biografían matemáticos, pero nunca se han estrenado en nuestro país, ni es posible encontrarlas en la red u otro lugar (ver nuevamente [POB]) por lo que apenas podemos mencionar más que su título.

Finalmente merecen destacarse algunas películas cuya trama está articulada en torno a alguna idea, concepto o resultado matemático, por su originalidad y la dificultad que esto conlleva. Es el caso de ***Cube*** (Vincenzo Natali, Canadá, 1997; seis personas encerradas en un inmenso cubo de Rubik giratorio cuyas estancias tienen trampas mortales; averiguarlo dependerá de la habilidad en descubrir si unos números de nueve cifras que etiquetan las salas son potencia de un número primo), ***Moebius*** (Gustavo Mosquera R., Argentina, 1996; uno de los trenes del metro bonaerense desaparece con todos sus pasajeros debido a la extremada complejidad de la red), ***Pi, Fe en el Caos*** (*Pi. Faith in Chaos*, Darren Aronofski, EE. UU., 1998; la obsesión por encontrar las pautas que rigen el universo puede llevarnos a un materialismo feroz, un fanatismo extremo e incluso a la locura), y las españolas ***Leyenda de Fuego*** (Roberto Lázaro, 2001; un joven escultor medieval será capaz de resolver el enigma oculto en una ermita gracias a sus conocimientos de Geometría), ***La habitación de Fermat*** (Luis Piedrahita y Rodrigo Sopeña, 2007; la resolución rápida de acertijos de matemática recreativa pueden ayudar a los protagonistas a salvar sus vidas) y ***Los crímenes de Oxford*** (*The Oxford Murders*, Alex de la Iglesia, 2008; para desentrañar una serie de crímenes que podrían pasar por muertes naturales o accidentales quizás fuera necesario conocer los fundamentos de la lógica y las matemáticas, o mejor, para cargárselos a otra persona cuando es uno mismo el que los comete).

Algunas de las películas mencionadas en los párrafos anteriores no son fácilmente localizables ni han sido grandes éxitos. Eso no quiere decir que las matemáticas en el cine se reserven para rarezas o películas más o menos marginales. Simplemente se han seleccionado, como comentamos al principio, algunas de las que contienen más resultados matemáticos. El lector interesado puede no obstante comprobar la gran cantidad de producciones en las que las matemáticas están explícitamente presentes (eso sí, en escenas puntuales de una duración mucho menor) en las siguientes referencias:

Bibliografía:

Sobre Cine y Matemáticas

[POB] POBLACIÓN SÁEZ, Alfonso Jesús. *Las matemáticas en el cine.* Editorial Proyecto Sur de Ediciones y Real Sociedad Matemática Española. Granada, 2006.

Páginas Web:

Sección Cine y Matemáticas del portal DivulgaMAT

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/CineMate/index.asp

Las Matemáticas y el Cine, en el portal Aula Matemática

http://web.educastur.princast.es/proyectos/aulamatematica/cine/index.htm

Sobre teoría de grafos

[C–Z] CHARTRAND, Gary; ZHANG, Ping. *Introduction to Graph Theory.* McGraw-Hill, 2005.

[HAR] HARARY, Frank. *Graph Theory.* Addison-Wesley. Reading, 1969.

Dpto. Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid.
alfonso@mat.uva.es

Publicat el 9 d'abril de 2008