Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós[1]

Por la Historia

por

José Ferreirós

A partir de este número de La Gaceta, tomaré el relevo de mi amigo y colega Antonio Durán Guardeño como director de esta Sección de Historia. Agradezco su confianza al equipo directivo de esta revista, y en general a la RSME. Pero la ocasión pide sobre todo que dirija unas palabras a los lectores, comentando brevemente el espíritu que animará mi tarea.

La idea más básica es fácil de sintetizar. La historia de la matemática como campo de trabajo –pese al trabajo de un puñado de contribuidores muy respetables– está aún en pañales en España, lo cual contrasta con la situación en países como Francia, Alemania o el Reino Unido. Esta Sección debe contribuir a que se difunda y se cultive cada vez más y mejor, debe ayudar a crear una cultura histórica sólida entre los matemáticos, y en último término aspira a asegurarle a la Historia un puesto respetable en nuestras Facultades de Matemáticas.

En el número 2 de esta revista, Antonio Durán presentaba sus objetivos iniciales para la Sección de Historia, y no hay duda de que habrá continuidad con respecto a ellos. La Historia de la Matemática es una disciplina muy amplia, y aquí intentaremos que esté representada en toda su amplitud. Esto quiere decir que no sólo nos interesa discutir el desarrollo histórico de un problema, un concepto, un teorema o una teoría completa, sino también hablar de la matemática como profesión, de las conexiones entre matemáticas y otras disciplinas, del papel social de los matemáticos . . . y de tantas otras cosas. Los diversos contextos científicos, culturales y sociales en los que se ha formado

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós; Sección Historia-La Gaceta de la RSME; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla, C/ Camilo José Cela, s/n, 41018 - Sevilla, correo electrónico: josef@us.es

el conocimiento matemático serán, obviamente, tema de esta Sección. (En una ocasión próxima espero tratar el tema de la profesión de matemático y sus cambios, desde el matemático-ingeniero renacentista hasta el purismo matemático en tiempos de Weierstrass).

Pero, sin duda, ésta no es una revista para especialistas: los trabajos de historia superespecializados tienen otros lugares donde encajarse[2], y los temas que toquen quienes escriban aquí deberán ser atractivos e interesantes para el matemático en activo, investigador y/o profesor. En todo caso, y aunque permanezca algo oculto, dedicaremos especial atención a cuidar y fomentar el rigor en el manejo de los datos y en su análisis; más abajo hablaré de las razones para ello. De los trabajos que se envíen esperamos una cierta originalidad: aunque en ocasiones no presenten ninguna innovación para el experto, sí esperamos que al menos resulte fresca y novedosa la presentación y el enfoque. Muy especialmente, espero que esta Sección contribuya a poner al día la visión que de la historia de la matemática tienen sus lectores.

La manera tradicional de entender la historia puede resumirse en preguntas muy simples, del tipo:

- ¿en qué año apareció la fórmula para resolver ecuaciones cúbicas? (cronología);
- ¿quién la descubrió? (cronología y disputas de prioridades[3]);
- ¿qué cosas graciosas o curiosas pueden contarse de tal personaje? (anecdotario).

Lo malo es que esta manera de concebirla pierde de vista buena parte de las virtudes que tiene atender a la dimensión histórica de las cosas. Sin negar que aquel viejo modo de apreciarla es mejor que ninguno, me parece necesario defender que la historia da mucho más de sí, y puede tener un papel muy importante en la articulación de los conocimientos matemáticos. Ya lo dijo Kuhn, el niño terrible de la historia y la filosofía de la ciencia hace 40 años, en una frase que se ha citado muchas veces:

> *Si se considera la historia como algo más que un depósito de anécdotas o cronología, puede producir una transformación decisiva de la imagen que tenemos actualmente de la ciencia*[4].

¡Y vaya si se produjo una transformación! De Kuhn han partido muchas propuestas novedosas, algunas bastante radicales (buen tema para otro día), que han contribuido a cambiar para siempre la idea que tenemos de cómo se

[2]De momento, y por desgracia, principalmente en revistas extranjeras.

[3]En tiempos más nacionalistas se cambiaban nombres franceses por ingleses, norteamericanos por rusos.

[4]T. S. Kuhn, *La estructura de las revoluciones científicas* (México, FCE, 1975), p. 20.

forma el conocimiento científico. Kuhn seguía diciendo que la imagen tradicional fue elaborada, a menudo por los mismos científicos, a partir del estudio de grandes logros científicos que se encuentran en lecturas clásicas o, más a menudo, en los libros de texto con los que cada generación aprende a practicar la ciencia. Pero "es inevitable –dice Kuhn– que la finalidad de estos libros sea persuasiva y pedagógica", por lo que tienden a exponer los viejos logros de un modo muy simplificado y no pocas veces tergiversado. Así, la imagen que nos formemos a partir de ellos no se parecerá más al original de lo que pueda parecerse un país a las imágenes que nos presentan los folletos de agencia de viajes.

Para muchos la historia es una actividad de "ratones de biblioteca" que se dedican a rescatar documentos del polvo, y por tanto una actividad gris y polvorienta, exenta de creatividad. Esta visión está muy lejos de ser cierta. El historiador, desde luego, necesita los documentos originales tanto como un físico puede necesitar datos experimentales: son la base empírica con la que trabaja, la fuente de cualquier verdad histórica. Pero los historiadores de hoy sabemos que la historia no puede ser una simple acumulación de documentos: las interpretaciones están siempre presentes, y deben estarlo para que el resultado tenga mensaje e interés. Si un documento recién rescatado resulta excitante, esto sólo puede deberse a las implicaciones que tenga para nuestra imagen de una cierta contribución o de un cierto período. En realidad, todos tenemos imágenes del pasado, y ninguna de estas imágenes es fruto solamente de datos "positivos". Pues bien, en una Sección como ésta, es lógico que nos interese especialmente ir a lo interpretativo y a las imágenes de espectro amplio. Los documentos y las anécdotas pueden ser bienvenidos, pero especialmente cuando sean relevantes para la imagen general.

Así pues, amplitud, generalidad, cierta originalidad y, claro está, seriedad en el manejo de datos y en el planteamiento de interpretaciones. Estos son algunos de los requisitos que idealmente deben cumplir los artículos que aquí aparezcan. Y ya que se trata de discutir las imágenes del pasado y sus interpretaciones, también serán bienvenidos los trabajos que aporten su pizca de provocación: al que rompe una imagen preestablecida se le puede llamar, en buen castellano, iconoclasta. La historia de la matemática conlleva el peligro de alterar no sólo nuestras imágenes de lo que sucedió hace mucho tiempo, sino también nuestra percepción del presente, de la matemática hoy.

Sobre la moda de la Historia

Sin duda la situación actual es muy favorable para la historia de las ciencias en general, y de la matemática en particular. Por ejemplo, hoy no hace falta que se dé ninguna justificación de por qué una Sección como la presente tiene su lugar en revistas como La Gaceta. Desde hace ya años –quizá unos 30 en algunos países, unos 15 en España– la historia de la matemática atrae la atención de modo creciente, y los matemáticos la tienen cada vez más en cuenta. Resulta muy sintomático y esperanzador que vaya aumentando el número de manuales con una sólida base histórica: por ejemplo, a la hora de ofrecer un primer curso de análisis, hoy contamos con posibilidades como las que ofrece el manual de A. J. Hahn: *Basic Calculus: From Archimedes to Newton to its Role in Science* (Berlín / New York, Springer-Verlag, 1998)[5] , y podemos utilizar también como punto de apoyo fuentes originales, como las que se encuentran en *The History of Mathematics: A Reader*, editado por John Fauvel y Jeremy Gray (Mathematical Association of America, 1997). También pueden darse ejemplos similares en muchos otros campos, como el álgebra, la teoría de números, etc.

Las buenas señales no se paran ahí. Hoy podemos darnos el lujo de ojear y disfrutar obras como la *Introducción al análisis de los infinitos* de Leonhard Euler (Madrid, RSME / Sociedad Thales, 2000), que por cierto también puede usarse con provecho dentro de una introducción al análisis. Que entidades como la RSME se embarquen en proyectos ambiciosos de publicación de facsímiles, traducciones y comentarios, es sin duda un síntoma de los tiempos que corren. También lo es, a otro nivel, que surjan iniciativas editoriales como la de Nivola. Los matemáticos, tradicionalmente, han cuidado de su propia historia más que otros grupos de científicos, y esto no deja de notarse en los tiempos actuales de gran interés por la historia de las ciencias.

Así que la situación es sin duda positiva, pero debo decir que, cuando se mira más de cerca, esconde ciertos peligros. Para mucha gente, la historia de las ciencias es una especie de entretenimiento elegante, con el que se consigue un agradable barniz cultural del que presumir, y un buen repertorio de anécdotas con las que entretener a nuestros alumnos cuando ya se les ve aburridos: que si el duelo de Galois por aquella coqueta, que si Descartes trabajaba bien tapado en su cama, etc. No es raro que los "datos" manejados sean falsos (Kepler no era checo, como he oído decir recientemente, ¡ni Newton ejerció la medicina!), que las anécdotas resulten dudosas o erróneas, y así sucesivamente. Los historiadores no encuentran evidencia de que Galileo lanzara objetos desde la torre de Pisa (aunque sí lo hizo un profesor suyo) ni de que a Newton se le ocurrieran sus ideas dinámicas al caerle una manzana en la cabeza ... La historia es realmente rica en anécdotas jugosas, pero lo menos que se puede pedir es que o bien las anécdotas sean verídicas, o bien contemos una falsa pero luego aclaremos que lo es.

Ahora bien, quien intente asegurarse de la veracidad de una anécdota cualquiera descubrirá que una cultura histórica sólida no se improvisa de un día para otro. Conseguir buenos conocimientos históricos es una tarea larga, aunque sin duda compensa. Aquí está uno de los peligros actuales: la "moda"

[5]En realidad, había manuales de este tipo mucho antes, por ejemplo el de Otto Toeplitz: *The Calculus, a Genetic Approach* (University of Chicago Press, 1963); lo que ha faltado es la costumbre y la sensibilidad de ver que este modo de hacer las cosas tiene ventajas significativas.

de la historia se difunde mucho más rápido que la cultura histórica, y algunos de quienes presumen de culturilla cuentan con que la ignorancia de su público les salvará de cualquier problema. Uno de los objetivos de esta sección será paliar esa situación en la medida de lo posible, difundiendo conocimientos históricos bien contrastados.

A ello deberíamos añadir, seguramente, el objetivo de corregir (sin saña ni malas intenciones) los errores históricos que puedan encontrarse aquí o allí. Porque lo cierto es que los manuales de matemática abundan en incorrecciones históricas, y lo mismo pasa incluso en obras escritas por gente bastante profesional. Ejemplos de esto pueden encontrarse en las conocidas obras de E. T. Bell, o incluso en las de Morris Kline, lo cual por cierto –y es importante decirlo– no las hace perder su interés ni gran parte de su valor. Animamos pues a los que contribuyen a esta sección a que consideren también este modo más crítico, en el buen sentido, de participar.

Precisamente para evitar los peligros de la moda actual, para contribuir a crear una cultura histórica sólida, es por lo que dedicaremos especial atención a cuidar y fomentar el rigor en el manejo de los datos y en su análisis. También, como ya se habrá ido advirtiendo, intentaremos dar a conocer posibilidades alternativas en la manera de enfocar la historia, de preguntarse acerca de ella y de buscar respuestas.

Las virtudes de la Historia

Recordemos lo que decía Kuhn: si concebimos la historia como algo más que anécdotas y cronología, puede transformar decisivamente la imagen que tenemos de la matemática. Sin duda esto es la típica exageración que cabría esperar de un historiador ... ¿o no? En mi opinión, la realidad es que la historia esconde aspectos de auténtico interés conceptual y teórico, y que la memoria (las imágenes del pasado) contribuye siempre a configurar nuestro conocimiento del campo que sea. La vieja oposición entre lo "memorístico" y lo "racional" tiene algo de verdad a nivel superficial, pero en un sentido más profundo es falsa. Por otro lado, la historia está llamada a desempeñar un papel primordial en la difícil tarea de dar a conocer la matemática al público culto, y también en la tarea complementaria de contribuir a que los especialistas reflexionen sobre el papel de su disciplina en la sociedad.

Virtudes conceptuales y epistemológicas

La historia supone un desafío a nuestra capacidad de comprender al situarnos frente al trabajo de auténticos gigantes del pensamiento, y frente a la enorme dificultad de entender y reconstruir los caminos que ellos recorrieron. La historia pone en tela de juicio ideas que a menudo nos son demasiado familiares, colabora en darles sentido al ver su génesis y los papeles que han desarrollado, y nos permite advertir las dificultades epistemológicas de los conceptos que hoy llegan a parecernos "triviales". En ocasiones, la historia contribuye incluso a cuestionar ideas bien establecidas, especialmente cuando nos encontramos con las disputas que esas ideas han suscitado y con las distintas alternativas que entonces se propusieron. Es lo mismo que han señalado muchos matemáticos de primera línea, al decir que las obras de los viejos clásicos, en ocasiones, guardan todavía mensajes y sugerencias para desarrollos futuros (lo decía Weil de Kronecker, o Ahlfors de Riemann).

Por todas esas razones, la historia es una herramienta utilísima en la educación, ya que nos ayuda a completar nuestra comprensión de los conceptos y los resultados, a prever dificultades y evitar suposiciones ingenuas, y en suma a elaborar un mapa del conocimiento. Pondré un ejemplo cercano a temas que he trabajado en detalle. Me atrevería a decir que las famosas ingenuidades de la corriente de enseñanza de la "nueva matemática" en los años 1960, al pensar que ya en la escuela había que empezar por conceptos como el de conjunto, se hubieran evitado si aquellos pedagogos hubieran tenido un conocimiento serio de la historia de la teoría de conjuntos. Es comprensible que a los alumnos de universidad se les presente cualquier concepto nuevo como "natural", y esto se aplica también al de conjunto, pero es menos comprensible que los profesores realmente se crean esa idea hasta el punto de pensar que el tal concepto puede ser trivial e inmediato. Quien conozca los puntos de vista, tan diversos, que aparecen en los trabajos sobre el tema de hombres como Cantor, Frege, Russell, Zermelo, Weyl, Gödel, etc., difícilmente podrá caer en aquella ingenuidad. Aquí, por cierto, estamos ya rozando los temas filosóficos, pero es que el historiador, si realmente quiere comprender el material que tiene delante, a menudo se ve obligado a entrar en cuestiones de filosofía de la matemática.

Pero aún me atrevería a decir más. La historia, la memoria del pasado, es un elemento inevitable en la comprensión que de su campo de trabajo tiene cualquier experto, incluso quienes son rabiosamente sistemáticos. Esto resulta bastante obvio si pensamos en (una parte de)[6] lo que sucede cada vez que se realiza una evaluación de los avances del conocimiento, por ejemplo cuando se deciden los medallistas Fields: se trata siempre de evaluar el pasado reciente y los cambios en el mapa de los conocimientos matemáticos. El papel de la historia en la comprensión fue enfatizado en su día por filósofos europeos (los de la corriente hermenéutica), y fue puesto sobre el tapete, en otro contexto bien distinto, por Imre Lakatos al tratar cuestiones de filosofía de la ciencia. Los científicos, al tomar decisiones sobre cuál de varios programas de investigación es más satisfactorio y aceptable, no siguen una "racionalidad instantánea" y ahistórica, sino que tienen muy en cuenta la trayectoria que han seguido esos programas a lo largo de un cierto tiempo (especialmente la manera más o menos satisfactoria en que se han ido enfrentando al tribunal de la experiencia). Así pues, la metodología científica no funciona en un vacío abstracto, sino que

[6] También influyen, como en los Nobel, cuestiones de naturaleza más política.

trabaja en una situación o contexto histórico concreto y determinado, poniendo en práctica una "racionalidad retrospectiva"[7].

En tiempos recientes, los historiadores de la matemática han comenzado a analizar las "escuelas de investigación" que se crean de modo natural cuando hay un entorno organizado de enseñanza e investigación (por ejemplo, la escuela de Weierstrass en Berlín, o la escuela de Tarski en Berkeley). La manera de trabajar, el modo de seleccionar preguntas y de buscar respuestas característicos de estas escuelas reflejan, precisamente, concepciones del conocimiento diversas, indisociables de evaluaciones diferentes de la situación que se vive y del pasado reciente. Cualquier matemático que haya intervenido directamente en la investigación conoce de primera mano este tipo de fenómenos. Y basta reflexionar sobre ellos para llegar a la conclusión que avanzaba antes: que la memoria del pasado es un elemento inevitable en la comprensión que cualquier experto tiene de su campo de trabajo. Esto permite entender, pongamos por caso, por qué un matemático tan influyente como Hilbert dedicó mucho tiempo a difundir su manera de entender el pasado reciente y la genealogía del enfoque matemático que él prefirió[8].

Virtudes prácticas

Pero, al margen de esas virtudes epistemológicas, la historia de la matemática tiene ventajas más mundanas y prácticas. No es la última de ellas que contribuye a establecer temas de conversación comunes para matemáticos cuyos campos de trabajo pueden estar muy alejados. Dirk Struik, que fue enormemente influyente como historiador (y falleció recientemente a la edad de 106), lo decía así: "aunque pueda sonar un poco faccioso [facetious], una de las ventajas de estudiar la historia de la matemática es lograr un acercamiento entre colegas y mejorar la armonía del departamento"[9]. Grandes matemáticos como Hilbert, o como el policéfalo Bourbaki, han insistido en la importancia de mantener un sentido de la unidad interna de las matemáticas. Ya sea real o una idealización, el caso es que el concepto de esa unidad ha sido muchas veces un motor fundamental del desarrollo matemático. Pero mantenerlo hoy resulta más difícil que nunca, por el grado de complejidad y especialización que hemos alcanzado. La historia es, precisamente, una de las herramientas

[7]I. Lakatos, *La metodología de los programas de investigación científica*, (Madrid, Alianza, 1983). No quiero dejar de advertir que, en mi opinión, hay aspectos de la filosofía de la ciencia de Lakatos nada convincentes, pero su crítica a la "racionalidad instantánea" fue seguramente su mejor contribución.

[8]Véase, por ejemplo, su famosa conferencia 'Sobre el infinito', versión al castellano en D. Hilbert, *Fundamentos de las matemáticas* (México, UNAM, 1993), o inglesa en J. Van Heijenoort, *From Frege to Gödel* (Harvard University Press, 1967 y 2002).

[9]Citado en J. J. M. Bos, 'Out of the Ivory Tower: The significance of Dirk Struik as historian of mathematics', *Hist. Math.* **29** (1993), 363–368.

más eficaces que cabe emplear para contrarrestar las tendencias centrífugas e instilar aquel sentido de la interrelación.

Una de las mayores virtudes de la historia es que permite reflexionar a fondo sobre el papel de la matemática en la cultura y la sociedad. Este fue también un tema muy querido por Struik, que llamaba la atención sobre cómo hace 60 años "todavía estaba de moda pensar que la matemática venía del Cielo, o, cuando menos, de un tipo de mente pitagórica, pura e incontaminada por lo social"[10]. No, la matemática surge de la actividad humana en contextos históricos y sociales concretos, y Struik supo siempre atender a las peculiaridades de éstos, y a cómo el desarrollo de la matemática está ligado con los grandes temas de la historia humana.

Hoy que las ciencias están tan densamente interconectadas con todos los aspectos de la vida económica, social y política, necesitamos que los especialistas tengan en consideración las consecuencias de su actividad. En 1945, un grupo numeroso de físicos americanos firmó el *informe Franck* (manifiesto encabezado por el Nobel James Franck) donde decían que los científicos "ya no pueden rehusar la responsabilidad directa del uso que la humanidad haga de sus descubrimientos desinteresados"; la idea sigue siendo válida hoy, aunque sea por razones a veces distintas. Y la historia es la mejor manera de promover la responsabilidad del experto, porque permite reflexionar sobre cómo la ciencia se imbrica en la sociedad a través de las instituciones que le dan cobijo. La historia es indispensable en la búsqueda –si acaso– de cambios que permitan mejorar la situación, aliviar el peso de aquella responsabilidad, y servir mejor a las necesidades de la sociedad (incluyendo las necesidades educativas).

Resulta sorprendente la multiplicidad de maneras en que la historia de la matemática puede suscitar debates de actualidad. A finales de 2002, en un foro sobre el tema al que estoy suscrito (impulsado por el uruguayo Julio González Cabillón), surgió la cuestión de cómo algunos matemáticos, hacia 1600, intentaron cambiar el nombre sarraceno de "álgebra" por otro más puramente europeo. Vieta propuso hablar de "arte analítica" y escribió:

> *Este arte que presento es nueva, o cuando menos resultó de tal modo degradada con el tiempo, tan manchada y profanada por los bárbaros, que he creído necesario darle una forma del todo nueva, y tras haberla librado de todos sus pseudo-conceptos, a fin de que no retenga ninguna mácula, ni siga oliendo a rancio, concebir y dar a conocer términos nuevos ...*[11]

En el foro hay gente de todo el mundo, incluyendo un gran número de norteamericanos, de manera que un asunto tan lejano como éste –con sus

[10] Citado por Bos, o.c.

[11] F. Viète, *In artem analyticam isagoge*, (Tours, 1591); (el pasaje aparece en la dedicatoria a la Princesa Melusine Catherine de Parthenay). El tema de la búsqueda de raíces griegas para el álgebra por los renacentistas, y su tendencia a ocultar el papel de los árabes, ha sido estudiado por G. Cifoletti.

orígenes hace más de 400 años– tenía una capacidad especial de evocación y de suscitar sentimientos enfrentados, dado el contexto político internacional que vivimos.

Por otro lado, la comunidad matemática sabe hoy que es importante cuidar la imagen pública de la disciplina, como lo vienen haciendo desde hace mucho los físicos, o más recientemente los biólogos. Sin una imagen pública positiva, es imposible que llegue a darse un buen nivel de apoyo social a la actividad del científico, y sin duda es muy sano que sea de esa manera. El corolario es que hay que prestar más atención a divulgar la matemática, cosa que es muy difícil, pero nada hay imposible. Y, sin duda, la historia será un ingrediente esencial para toda receta satisfactoria en el campo de la divulgación y la "comunicación pública". No somos pocos los que hemos tenido la experiencia de cómo la utilización inteligente de aspectos históricos hace mucho más atractivos los temas de que se habla, suministrando grandes dosis de motivación y sentido.

La historia de la matemática nos pone frente a una gran aventura del pensamiento, una gran aventura humana. Vale la pena que la cultivemos.

José Ferreirós Domínguez
Departamento de Filosofía y Lógica
Universidad de Sevilla
C/ Camilo José Cela, s/n
41018 - Sevilla
Correo electrónico: josef@us.es

El último de los magos

por

Antonio J. Durán

Newton no fue el primero de la edad de la razón.
Fue el último de los magos,
el último de los babilonios y sumerios,
la última gran mente que se asomó al mundo visible e intelectual
con los mismos ojos que aquellos que empezaron a construir,
hace 10.000 años, nuestro patrimonio intelectual.
John Mainard Keynes

INTRODUCCIÓN

Hace ahora dos años que apareció la edición castellana de la *Introductio in analysin infinitorum* de Leonard Euler, el primer número de la colección de facsímiles, con traducción anotada, de obras clásicas de las matemáticas que, como aventura conjunta, la RSME y la SAEM Thales emprendieron entonces. Un poco antes tuve la ocasión de informar de la iniciativa a los socios y socias de la RSME en un artículo que titulé, con toda intención, "*Una cuestión de placer*" (LA GACETA, 3.3).

Me complace ahora anunciarles que ya está casi listo el segundo número de esta iniciativa, que esperamos presentar en Sevilla a mediados de junio, en las vísperas del congreso con la American Mathematical Society.

En esta ocasión la obra editada es el *Analysis* de Newton: un compendio que incluye diversos de sus tratados matemáticos sobre cálculo infinitesimal, geometría analítica –para ser más precisos: esa joya que es su célebre clasificación de las cúbicas en 72 especies– y aproximación –el método de diferencias finitas–; junto con una colección de fragmentos de cartas, entre ellas, las que envió a Leibniz en 1676.

Creo que todos debemos felicitarnos por la aparición de este segundo número de la colección de facsímiles con traducción anotada: supone la consolidación de una colección que muestra como la Real Sociedad Matemática Española está cumpliendo su compromiso de promover la constitución de un fondo editorial de clásicos de las matemáticas debidamente editados en castellano. El hecho de que a la iniciativa se hayan sumado plumas tan prestigiosas como las de José Manuel Sánchez Ron o Javier Echeverría, muestra que la tarea se está haciendo con el máximo rigor y calidad intelectual: el gusto por la obra bien hecha que queremos que caracterice a la RSME.

Quiero acabar esta introducción recordando la confesión de intenciones que ya hice con motivo de la edición de la *Introductio* de Euler: mi intención, como promotor de la idea dentro de la RSME, es, principalmente, la procura de placer para las socias y socios de la RSME, para los de Thales –la otra sociedad implicada– y, también, para todos aquellos interesados por este tipo de iniciativas culturales.

El Analysis de Newton: una obra original

Isaac Newton es uno de los más, si no el que más, célebres y celebrados científicos de cuantos ha visto la historia. Aunque a menudo se suele pasar por alto, es, de todos ellos, quien más debe su bien ganada fama a su capacidad y creatividad matemáticas: fue su habilidad como matemático, y los descubrimientos que esta posibilitó, la que, en buena medida, le permitió marcar diferencias con otros científicos contemporáneos, sobre todo en la elaboración de su obra fundamental: los *Principia*. O dicho de otra forma, Newton descubrió el *sistema del mundo*, lo que según el acertado dicho de Lagrange, le convirtió en el más afortunado de los científicos porque sólo hay un sistema del mundo por descubrir: y fue precisamente la ventaja de Newton sobre sus contemporáneos en el dominio de las matemáticas, la que le permitió afianzar ese descubrimiento.

Para aquellos que piensen que Newton fue exclusivamente un físico –filósofo natural, sería mejor decir– o, en todo caso, un matemático aplicado, «nunca se debe olvidar», escribió D.T. Whiteside, el editor de los monumentales *The mathematical papers of Isaac Newton*, «que las matemáticas tuvieron para Newton, antes y más allá de su lugar como caja de herramientas de la verdad, una belleza interior y un vigor independiente de todas las motivaciones externas y aplicaciones. Para los que son insensibles a la elegancia y potencia de las matemáticas como disciplina intelectual en su propio derecho», continuó, «[...] ahí tenéis a un matemático "puro", con el sentido de la vieja frase, a veces completamente absorbido en su torre de marfil en Cambridge elaborando teoremas y propiedades y algoritmos y construcciones elegantes por su propio sabor; y cuán magníficamente practicó su talento y habilidad. En su día, no hubo en el mundo matemático más dotado, ni más ampliamente versado; ninguno más apto en álgebra, más diestro en geometría, más habilidoso ni sabio en las sutilezas de la variación infinitesimal».

Justo es, por tanto, que le dediquemos la debida atención a su producción genuinamente matemática, inédita, en su mayor parte, en castellano. La obra que hemos elegido es el *Analysis per quantitatum series, fluxiones ac differentias, cum enumeratione Linearum tertii ordinis* –al que, por abreviar, llamamos el *Analysis*–[12].

[12]Recuerdo que el grueso de su producción física ya ha sido traducida al castellano: hay varias versiones castellanas de los *Principia* –la de Eloy Rada publicada por Alianza (1987) y la de Antonio Escohotado en la Editora Nacional (1982)–, y una de la *Óptica* –la de Carlos Solís, publicada por Alfaguara (1977)–. Y también algo de sus escritos teológico/históricos,

El *Analysis* es una obra absolutamente singular: su edición estuvo a cargo de William Jones[13], que habiendo encontrado un tratado de Newton sobre desarrollos en series infinitas y cálculo infinitesimal –titulado *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*–, en una colección de documentos que adquirió en 1708 y que habían pertenecido a John Collins –muerto 25 años antes–, decidió darlo a la imprenta. Se puso entonces en contacto con Newton para cotejar la copia de Collins con el original y, a partir de sus conversaciones, se fraguó el contenido del *Analysis*: al *De Analysi* se unieron también los tratados *De Quadratura curvarum* y *Enumeratio Linearum tertii ordinis* –que Newton había publicado unos años antes (1704) como apéndices de la *Optics*–. Como *corona del libro*, Jones adjuntó un pequeño tratado, titulado *Méthodus differentialis*, tratado inédito donde se exponía el método de diferencias finitas de Newton. Como se dijo arriba, estos tratados se completaron con una colección de fragmentos epistolares, entre ellos, de las dos cartas que Newton envió a Leibniz en 1676. No debe olvidarse que la composición del libro coincidió con el estallido de la polémica entre Newton y Leibniz por la prioridad en el descubrimiento del cálculo. El *Analysis* fue, en cierta forma, una pieza más de la estrategia de Newton para reivindicar su prioridad: baste decir que el tratado que abre el libro, el *De Analysi*, fue compuesto en 1669[14], esto es, la friolera de ¡¡cuarenta y dos!! años antes de que Jones lo editara, por primera vez, como primer tratado dentro del *Analysis* –en este sentido, como en muchos otros, el *Analysis* se sitúa en el polo opuesto de la *Introductio* de Euler–.

Sabemos también, que andando el tiempo el *Analysis* se convirtió en objeto de deseo para más de uno; por ejemplo, Philipe Naudé[15] estuvo dispuesto a hacer casi cualquier cosa por conseguir un ejemplar: así se lo aseguró a Newton en carta fechada el 26 de enero de 1723: «Estaría dispuesto a besar sus manos con que tan sólo me indicara, aunque fuera por una nota autógrafa, si el único de sus trabajos que me falta y que nunca ha sido traído a estas tierras, está todavía a la venta en Londres; este es su título: *Analysis per quantitatum series, fluxiones ac differentias* de 1711». ¡Qué no habría besado Naudé por poseer el ejemplar del mismísimo Newton, con correcciones de su puño y letra, que todavía se conserva hoy en el *Trinity College* de Cambridge!

---

como es el caso del *Templo de Salomón* –editado por Ciriaca Morano y publicado por Debate/CSIC (1996)–.

[13]Que tiene su sitio en la historia de las matemáticas como el inventor de la notación π para la más célebre de las constantes matemáticas: la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

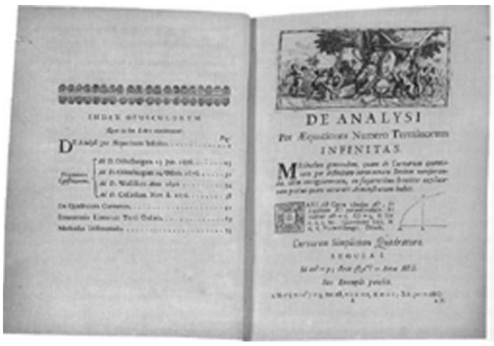
[14]A pesar de su distribución inicial manuscrita y restringida, fue el tratado con el que Newton se dio a conocer al mundo científico.

[15]Naudé propuso en 1740 a Euler los dos problemas sobre particiones de números cuya solución daría origen a esa importante rama del análisis combinatorio –véase, por ejemplo, el capítulo XVI de la *Introductio* de Euler.

La edición en castellano y anotada del *Analysis* de Newton es el modesto grano de arena que aportamos a la colosal producción editorial –e intelectual– que sobre Newton se viene haciendo en las últimas cuatro décadas, y cuyas joyas más destacadas son: los siete volúmenes de *The correspondence of Isaac Newton* (1959/77); los ocho volúmenes de *The mathematical papers of Isaac Newton* (1967/81) editados por D.T. Whiteside con el contenido –anotado y en edición bilingüe latín/inglés– de prácticamente todos los manuscritos conservados de Newton sobre matemáticas; la espléndida biografía de R. Westfall *Never at rest* (1980); o la soberbia edición en tres tomos[16] de los *Principia* (1971/1972) de I.B. Cohen (y A. Koyré) –por no citar otras obras tan notorias como *Unpublished Scientific Papers of Sir Isaac Newton* (1962) editado por A.R. Hall y M.B. Hall, o *Philosophers at war*, (1980) también de A.R. Hall; o *Isaac Newton, Historian* (1963), *Portrait of Isaac Newton* (1968) o *The religion of Isaac Newton* (1974) de F. Manuel; o *The foundations of Newton's Alchemy. The Hunting of the greene lyon* (1975), de B.T. Doobs, y ... , y ahora sí que de verdad no sigo–.

El facsimil del Analysis, los estudios introductorios y la traducción anotada

Igual que con la *Introductio*, el criterio general para la realización de la edición en castellano del *Analysis* de Newton ha sido dotarlo de capacidad para evocar la dimensión y textura histórica de su época. Para ello, se ha preparado un facsímil correspondiente al ejemplar conservado en el *Real Instituto y Observatorio de la Armada* en San Fernando de la primera edición de 1711, con el mismo mimo y siguiendo los mismos criterios de calidad, en cuanto al tipo de papel, impresión, encuadernación, etc. que nos guiaron en la preparación del anterior. La edición del facsímil ha estado a cargo de Javier Pérez.



Reproducción del índice del *Analysis* y la primera página del *De Analysi*.

[16] Incluyo entre ellos la *Introduction to Newton's Principia*: que, como escribió Westfall, abre un nuevo género histórico: las biografías de libros clásicos.

Escribía yo en el artículo sobre la *Introductio* de Euler que un libro facsímil tiene mucho de fetiche y una enorme capacidad para evocar la época en que fue elaborado el original: los grabados y otras peculiaridades propias de la manera de editar de su tiempo, la tipografía usada, la notación matemática empleada, etc., facilitan singularmente el acercamiento a la época en que la obra original fue compuesta.

En el caso del *Analysis*, los gráficos han sido pieza importante de la edición: en particular, los más de ochenta gráficos que acompañan a la clasificación de las cúbicas. En este sentido, la edición de Jones ha sido especialmente elogiada a lo largo de la historia por la calidad de sus grabados; por ejemplo, Rouse Ball en su estudio sobre la clasificación newtoniana de las cúbicas (1891), escribió: «De todas las ediciones, ésta es la más placentera de usar, los tipos de letra, los dibujos, la impresión toda es excelente». Los gráficos que acompañan a nuestra edición anotada han sido realizados –por Renato Álvarez Nodarse, que se ha encargado también de la maquetación del volumen con la traducción, notas y estudios preliminares– usando el *Mathematica* 3.0, y una adecuada elección de los parámetros de las curvas que representan a cada una de las 72 especies. Los sofisticados programas gráficos de *Mathematica* nos han permitido ajustarnos más a la clasificación newtoniana que los que acompañan a la edición de Jones. En algunos casos, los gráficos de la edición de Jones no corresponden –cuantitativamente– con las cúbicas de la especie que vienen a representar, lo que no quita para reconocer el enorme mérito de su composición en una época con evidentes limitaciones técnicas para este tipo de representaciones gráficas. A casi tres siglos de distancia, no deja de sorprender en la edición de Jones, la calidad de los gráficos que la acompañan, su rara belleza y, sobre todo, la armonía que gobierna el conjunto completo de las gráficas de las cúbicas.

Al igual que ocurrió con la *Introductio*, queremos que la obra tenga capacidad para evocar el texto clásico en la dimensión y con la textura histórica de su época, pero haciéndola asequible a un lector actual, interesado en leer y aprender directamente de los clásicos sin perder un ápice de su sentido histórico. El punto crucial aquí radica en que, en principio, no se le requiera al lector los conocimientos imprescindibles de historia de las matemáticas para comprender la dimensión y profundidad histórica de la obra, ni los suficientes de latín, en el caso del *Analysis*, que le permitan leerla tal cual la escribió Newton. Por tanto, para solventar una u otra ausencia, si se dan, acompaña al facsímil un segundo tomo con una edición crítica en dos partes. Conforma la primera parte una serie de artículos relacionados con el contexto histórico, científico y matemático del autor y la obra; y, la segunda, el texto traducido al castellano y anotado. En el caso del *Analysis* los artículos y sus autores son los siguientes:

Sobre Newton. José Manuel Sánchez Ron ha elaborado, con su habitual maestría, unos espléndidos apuntes biográficos de Newton que facilitan a los lectores la trayectoria vital e intelectual del autor de los *Principia*, en todas sus múltiples facetas: científica, química y alquímica, teológica, como historiador, presidente de la *Royal Society* o como funcionario público al servicio de la corona inglesa. Acercar al lector los avatares de la vida de Newton a lo largo de la segunda mitad del siglo XVII y un buen cuarto del XVIII, le facilitará la evocación de su figura y, por extensión, de la obra editada.

Sobre la polémica con Leibniz. Javier Echeverría –premio Nacional de ensayo de 2000– ha elaborado un interesantísimo y original artículo sobre los valores implicados en la disputa entre Newton y Leibniz sobre la prioridad en el descubrimiento del cálculo; el artículo es especialmente apropiado dado el papel que tuvo el *Analysis* dentro de la disputa. Sin duda arroja mucha luz sobre el momento histórico en que el libro apareció, lo que facilitará, como se dijo arriba, la evocación histórica del texto con el referente adecuado de su época.

Sobre el texto y sus circunstancias. Un tercer artículo, del que soy autor, rastreará los diversos tratados que componen la obra en cuentión dentro de la producción matemática de Newton; debido a la singularidad del *Analysis*, que contiene tratados cuya composición abarca desde 1669 –el *De Analysi*– hasta 1695 –la última redacción de la *Enumeratio*–, esto significa que el artículo analiza treinta años de vida matemática de Newton. A lo que hay que añadir, un análisis del papel que tuvo el libro en la polémica con Leibniz (1696–1716), y cómo esta condicionó su composición. La mano de Newton se advierte en toda la composición del *Analysis* y, especialmente, en el prefacio donde Jones estableció el descubrimiento newtoniano de su cálculo infinitesimal hacia 1665; como escribió Westfall: «Aunque en el prefacio no se menciona a Leibniz, su insistencia en las fechas de la década de 1660 era suficientemente explícita».

La traducción anotada

Al igual que ocurriera con la *Introductio*, optamos por traducir el *Analysis* directamente del latín original –apoyándonos también en la magnífica edición inglesa de Whiteside–. Y hemos vuelto a confiar en José Luis Arantegui, después de la excelente traducción que hizo del libro de Euler. El resultado vuelve a ser sobresaliente: como se puede comprobar por los extractos incluidos al final de esta presentación, la traducción, en un castellano de inconfundible sabor a siglo XVIII, es, sin duda, excepcional: *un manjar exquisito* que preserva para nosotros toda la textura histórica del texto original.

El aderezo final de la anotación es obra de quien esto escribe. Contrariamente a lo que ocurrió con la *Introductio* de Euler, en este caso contaba con un excelente punto de partida: la ya mencionada edición de *The mathematical* *papers of Isaac Newton* en ocho volúmenes[17]: un océano casi inabarcable de erudición donde, habiendo ganas, se puede bucear a conciencia durante una eternidad.

La filosofía de la anotación presenta diferencias en relación con la que acompaña la traducción al castellano de la *Introductio*. Hay un par de enfoques coincidentes: al análisis de la forma –terminología y notaciones– y del significado histórico de conceptos y resultados; a ellos, se le ha unido una parte de anotación técnica para facilitar la lectura de los tratados de Newton.

En cuanto a los dos primeros, el planteamiento es parecido a lo hecho con la *Introductio*:

1. *Sobre la terminología y notación del texto original.* La adecuada anotación de este apartado era especialmente importante por cuanto la fidelidad al texto original nos ha hecho usar nomenclatura hoy desaparecida y notaciones algo distintas a las actuales. Antes de nada aclarar que, en ningún caso, esto supone una dificultad para leer o entender el texto: la nomenclatura es suficientemente natural como para entenderla casi sin ninguna explicación adicional. En cambio, al mantenernos fieles a su texto se consigue reflejar con mucha más fidelidad los matices con que Newton, o su época –sus circunstancias, que diría Ortega–, dotaron al texto. En cualquier caso la terminología usada está suficientemente apoyada, como se recoge en las notas, por citas y textos de autores clásicos –tanto españoles como extranjeros– que, además, son una buena muestra de la evolución de la nomenclatura en matemáticas –y, por supuesto, de los conceptos ocultos tras los nombres–. Especial atención se ha prestado a la notación, respetando escrupulosamente la de Newton, muy cercana ya a la nuestra, y explicando en cada caso, su evolución anterior y posterior, si la hubo. En el caso del *Analysis*, además de adecuado, este aspecto era obligado dado que la cuestión de la notación no fue baladí en la disputa con Leibniz y el *Analysis*, como ya se ha apuntado, tuvo su importancia en la polémica. En este sentido se han podido determinar algunas diferencias entre la edición de Jones y la de los manuscritos de Newton editados por Whiteside que parecieron pasarle desapercibidas a este: posiblemente, todas ellas están justificadas por la cierta preocupación de Jones por elegir una adecuada notación –sobre todo en lo que atañe a raíces y exponenciales–. Recuerdo que a Jones se debe la notación π para la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

2. *Sobre la significación histórica de conceptos y resultados.* Como ya he comentado, la obra de referencia para las matemáticas de Newton, la edición de Whiteside de *The mathematical papers of Isaac Newton* en ocho tomos, ha facilitado la elaboración de esta parte de la anotación. Aunque no sólo se han utilizado *The mathematical Papers of Isaac Newton*; también se ha usado

[17]Que le valió a su editor, D.T. Whitesite, la medalla *Koiré* de la *International Academy of the History of Science* (1968) y la medalla Sarton de la *History of Science Society* (1977), entre otros laureles.

The correspondence of Isaac Newton, sobre todo para los fragmentos de cartas incluidos en el *Analysis*, y también trabajos específicos sobre algunos de los tratados –podemos aquí citar los de Rouse-Ball (1891) y Talbot (1860) sobre la *Enumeratio*, o los de Fraser (1918/27) sobre el método de las diferencias finitas–; completando todo esto con los textos generales de historia de las matemáticas, o más concretos sobre la historia del cálculo infinitesimal, la geometría analítica o el análisis numérico, y artículos específicos sobre detalles y resultados particulares contenidos en las obras en cuestión. Y, naturalmente, las fuentes, ya sean de obras cercanas a ésta de Newton, o las suyas propias.

3. *Sobre los aspectos técnicos del* Analysis. Desde el punto de vista de las matemáticas que contiene, el *Analysis*, a diferencia de la *Introductio*, no es un texto fácil de seguir, por lo que se han añadido bastantes notas de carácter técnico. Newton no tenía, ni de cerca, la habilidad expositiva de Euler y, además, en algunos casos quería, más que explicar sus resultados, dejar constancia de que los había descubierto. En palabras de Cramer: «Newton prefería el placer de hacerse admirar al de instruir». Lo que a veces también tiene sus ventajas: siguiendo la enumeración de las cúbicas, por ejemplo, tal y como la presentó Newton, uno puede, en cierta manera, sentir la punzada agradable del redescubrimiento; o dicho de otra forma: escrita de manera más detallada, la enumeración de las cúbicas podría parecernos algo sin vida; por contra, el esfuerzo de tener que completar con demostraciones los muchos enunciados sorprendentes de Newton –es poco menos que increíble la cantidad de resultados sobre cónicas que, como Newton muestra, pueden ser traspasados a las cúbicas, o incluso a curvas de órdenes superiores– da a la lectura de la obra una vivacidad inesperada. En cualquier caso, la anotación técnica la he redactado pensando más en señalar caminos –en la manera de la posible, compatibles con los que Newton pudo haber recorrido–, o apuntar ideas, más que en completar detalles.

A vueltas, otra vez, con la inevitable cuestión de los dineros

Tanto la RSME como la SAEM Thales son asociaciones sin ánimo de lucro, de manera que el precio del *Analysis* se ajustará al máximo con el único objetivo de cubrir gastos. El estuche con la obra completa –el primer tomo conteniendo el facsímil y el segundo con la traducción anotada y los estudios preliminares–, tendrá un precio especial de salida: para aquellos socios que hagan reserva de la obra, o para quienes la adquieran antes del 31 de septiembre, será de 36 euros; a partir de entonces el precio de compra será de 45 euros para socios y 60 euros para no socios. El ajustar tanto los precios tiene la ventaja, para el socio individual, de poder conseguir una magnífica obra a un precio muy bueno; pero a cambio, las sociedades, esto es, la colectividad de socios, asumen un riesgo que podría resultar en un quebranto económico que hiciera inviable la colección. Dicho de otro modo, la acogida que los socios le dísteis a la *Introductio* de Euler, junto con la que deis al *Analysis* de Newton, determinará la continuidad de la colección. Caso de que, como todo parece indicar, se pueda continuar con ella, esperamos completar una primera fase publicando un tercer número con obras escogidas de Arquímedes, y un cuarto con las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss.

Y acabo tal y como lo hice cuando se presentó la *Introductio* de Euler: queridos socias y socios, espero sinceramente que a resultas de este esfuerzo colectivo logréis, con el trasteo y posterior lectura de la *Introductio* y del *Analysis*, un cierto *disfrute espiritual*, unos momentos de *satisfacción, diversión o entretenimiento*, *como cuando te bañas en el mar o escuchas un trozo de música*; ese es el objetivo último que esperamos lograr con esta colección: algo tan necesario, tan simple, pero a la vez tan complicado de conseguir como es *agradar o dar gusto.*

Antonio J. Durán
Catedrático de la Universidad de Sevilla
Editor General de la RSME

Anexo

A continuación sigue un breve fragmento del *Analysis*: corresponde a la clasificación de las últimas quince especies de cúbicas.

[84]

9. De los cuatro hiperbolismos de la hipérbola.[18]

Si en alguna ocasión faltan en el primer caso de la ecuación los dos términos ax^3 y bx^2, será la figura un hiperbolismo de alguna sección cónica. Hiperbolismo llamo a la figura cuya ordenada aparece dividiendo por la abscisa común la ordenada de esa figura multiplicada por una recta dada. Por tal vía conviértese la línea recta en hipérbola cónica, y toda sección cónica, en alguna

[18]Newton comienza aquí la clasificación de las cúbicas que denomina, por la razón que ahora pasa a explicar, hiperbolismos de las cónicas. Las hipótesis que Newton maneja para enumerar estas cúbicas que componen el primer caso, cuarta clase, son:

- Primer caso: esto es, cúbicas cuya ecuación se puede reducir a $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- Cuarta clase: esto es, $a = 0$, $b = 0$; por lo que la cúbica se puede escribir más apropiadamente como
$$\left(xy + \frac{e}{2}\right)^2 = cx^2 + dx + \frac{e^2}{4}.$$

Newton divide esta clase en tres géneros, según sea c positivo, negativo o cero: son los hiperbolismos de la hipérbola, de la elipse o de la parábola respectivamente. En este parágrafo, Newton clasifica los hiperbolismos de la hipérbola –primer caso, cuarta clase, primer género –: supone pues, como se acaba de decir, $c > 0$. En este caso, la cúbica tiene tres asíntotas: $x = 0$ e $y = \pm\sqrt{c}$. La clasificación se vuelve a dividir en dos casos, que darán un total de 4 especies, según que la cúbica tenga o no diámetro:

- $e \neq 0$. La cúbica no tiene entonces diámetro y, en este caso, sólo corta a la asíntota $x = 0$; aparecen los siguientes casos según las raíces del polinomio $cx^2 + dx + e^2/4$:
  - Dos raíces reales simples: es la quicuagésima séptima especie (fig. 61).
  - Dos raíces complejas; que a su vez da, según tenga o no centro:
    - Si $d \neq 0$, esto es, sin centro: es la quincuagésima octava especie (fig. 62).
    - Si $d = 0$, esto es, con centro: es la quincuagésima novena especie (fig. 63).
  - No puede haber raíces reales dobles, pues la cúbica se reduciría entonces a una cónica.
- Si $e = 0$; hay entonces un diámetro, ningún punto de corte con las asíntotas: es la sexagésima especie (fig. 64).

de las figuras que aquí llamo hiperbolismos de secciones cónicas. Pues, en efecto, la ecuación que cumple a las figuras de que aquí tratamos, a saber, $xy^2 + ey = cx + d$, da $y = \dfrac{e \pm \sqrt{ee + 4dx + 4cxx}}{2x}$, que se genera dividiendo por la abscisa común de las curvas, x, el producto de la ordenada de la sección cónica, $\dfrac{e \pm \sqrt{ee + 4dx + 4cxx}}{2m}$, y la recta dada m. De donde se hace luminosamente claro que la figura generada será hiperbolismo de una hipérbola, elipse o parábola, según sea el término cx afirmativo, o negativo, o nulo.[19]

El hiperbolismo de hipérbola tiene tres asíntotas, de las que una es la ordenada primera y principal Ad; las otras dos, paralelas a la abscisa AB, distantes de ella igualmente por aquí y por allá. En la ordenada principal Ad, toma Ad y $A\delta$, por una y otra parte iguales a la cantidad $\sqrt{c}$; y por los puntos d y δ lleva dg y $\delta\gamma$, asíntotas paralelas a la abscisa AB.

Allí donde no falte el término ey, no tiene la figura diámetro ninguno. En tal caso, si en esa ecuación $cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ las dos raíces AP, Ap (*fig. 61*) son reales y desiguales (pues iguales no pueden, como no sea la figura sección cónica), constará la figura de tres hipérbolas entre sí contrarias, sita
[85] la una entre las asíntotas paralelas, y las otras dos, fuera. Y ésta es la *especie quincuagésimo séptima.*

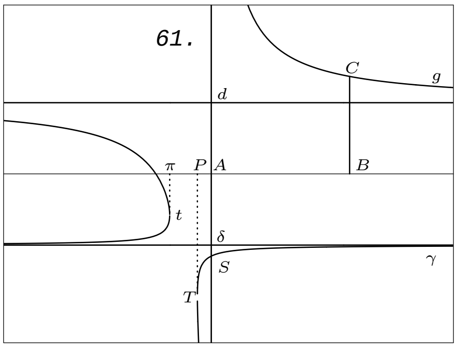
Si son imposibles esas dos raíces, tendráse dos hipérbolas opuestas fuera de las asíntotas paralelas y una serpentina hiperbólica entre ellas. Esta figura es de dos especies. Pues centro no tiene allí donde el término d no falte (*fig. 62*), mas si ese término falta, es el punto A centro de la figura (*fig.63*). La primera especie es la *quincuagésimo octava*; la posterior, la *quincuagésimo nona.*

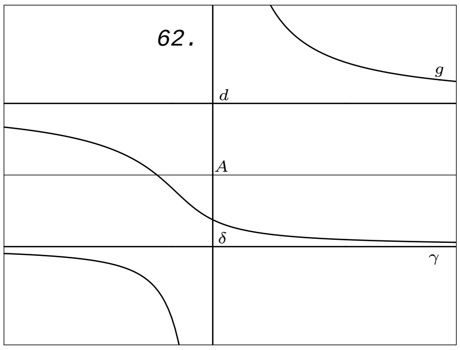
Que si falta el término ey, consta la figura de tres hipérbolas contrarias, sita la una entre las asíntotas paralelas, y las otras dos, fuera, como en la especie quincuagésimo cuarta[20], y tiene además diámetro que es la abscisa AB (*fig. 64*). Y ésta es la *especie sexagésima.*

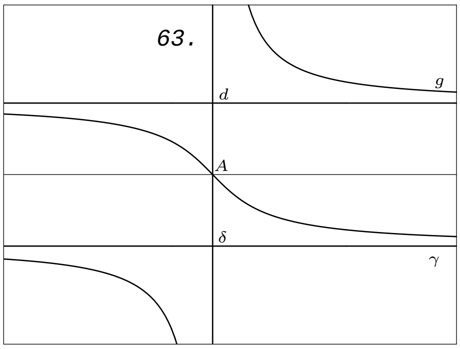
---

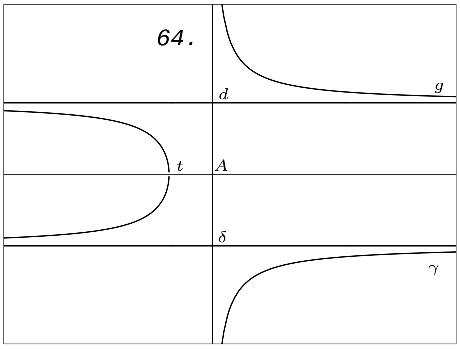
[19] La nomenclatura de *hiperbolismos* la introdujo Newton por primera vez hacia 1680, y la explicó hacia 1695 en sendos trabajos sobre la clasificación de las cúbicas [Whiteside IV, 1971: 372–373, n. 69]. Digamos que si $f(x, y) = 0$ es la ecuación cartesiana de una curva, entonces su hiperbolismo viene dado por la ecuación $f(x, xy) = 0$. Así, una recta $y = ax + b$, da el hiperbolismo $xy = ax + b$, que es claramente una hipérbola. Asimismo, las cónicas $y^2 + ey = cx^2 + dx$ –hipérbolas para $c > 0$, elipses para $c < 0$ o parábolas para $c = 0$– dan los hiperbolismos $x^2y^2 + exy = cx^2 + dx$, lo que eliminando el factor común x da $xy^2 + ey = cx + d$, que son las cúbicas correspondientes a esta tanda.

[20] Debería decir la quincuagésimo séptima. En esta versión definitiva de la *Enumeratio*, Newton añadió tres nuevas especies sobre una versión anterior que tomaba como referencia: aquí olvidó ajustar la numeración incluyendo las nuevas especies añadidas [Whiteside VII, 1976: 629, n. 92].


61.
C
g
d
π
P
A
B
t
δ
S
γ
T

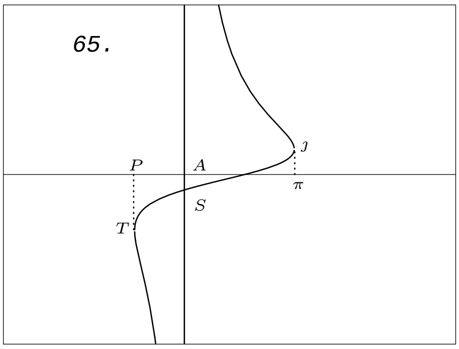

62.
g
d
A
δ
γ

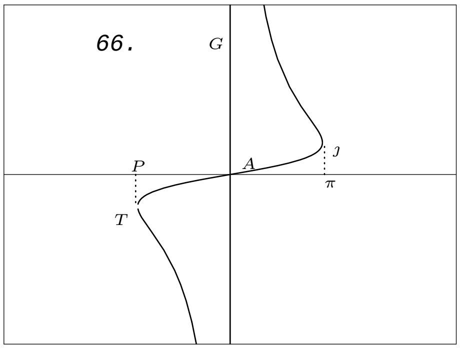

63.
g
d
A
δ
γ


64.
g
d
t
A
δ
γ

10. *De los tres hiperbolismos elípticos.*[21]

Defínese el hiperbolismo elíptico por esta ecuación, $xy^2 + ey = cx + d$, y tiene una única asíntota que es la ordenada principal Ad (*fig. 65*). Si no falta el término ey, es la figura hipérbola serpentina sin diámetro y también sin centro, si el término d no falta. Que es la *especie sexagésimo prima.*





Y si el término d falta, tiene la figura centro sin diámetro, y tal es el punto A (*fig. 66*). *Especie* que es en verdad la *sexagésimo segunda.*

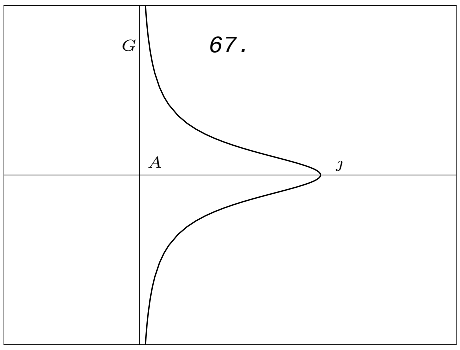
Y si falta el término ey y no el término d, es la figura concoidal cabe la asíntota AG (*fig. 67*), y tiene diámetro sin centro, y es diámetro suyo la abscisa AB. Que es la *especie sexagésimo tercia.*

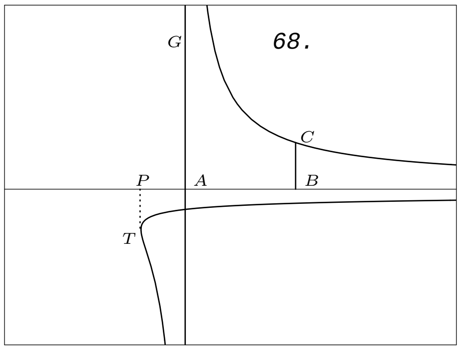
[21] Estamos ahora en el primer caso, cuarta clase, segundo género cuyas hipótesis son:

- Primer caso, cuarta clase: esto es, cúbica de ecuación: $xy^2 + ey = cx + d$.
- Segundo género: $c < 0$.

En este caso la cúbica tiene una sola asíntota: $x = 0$. La clasificación se vuelve a dividir en dos casos según que la cúbica tenga o no diámetro:

- $e \neq 0$. La cúbica no tiene entonces diámetro y, en este caso, sólo corta a la asíntota $x = 0$; aparecen los siguientes casos según que tenga centro o no:
  - $d \neq 0$; no hay centro ni diámetro: es la sexagésima primera especie (fig. 65).
  - $d = 0$; hay centro pero no diámetro: es la sexagésima segunda especie (fig. 66).
- Si $e = 0$; hay entonces un diámetro, pero no centro –si también $d = 0$, degeneraría la cúbica en tres rectas–: es la sexagésima tercera especie (fig. 67).





[**86**]

11. De los dos hiperbolismos de la parábola.[22]

Defínese el hiperbolismo de la parábola mediante la ecuación $xy^2+ey=d$; y tiene dos asíntotas, la abscisa AB y la ordenada primera y principal AG. Mas en verdad son dos las hipérbolas en esta figura, no opuestas en los ángulos de las asíntotas sino en el ángulo al que son inmediatamente adyacentes, y ello, a uno y otro lado de la abscisa AB, y o bien sin diámetro, si se tiene el término ey (*fig. 68*), o con diámetro, si falta (*fig. 69*). *Especies* éstas dos que son la *sexagésimo cuarta y sexagésimo quinta.*

12. Del tridente.[23]

Teníase en el segundo caso esta ecuación, $xy=ax^3+bx^2+cx+d$. Y en tal caso tiene la figura cuatro ramas infinitas de las que dos son hiperbólicas en torno a la asíntota AG (*fig. 72*), tendentes a partes contrarias, y dos parabólicas,

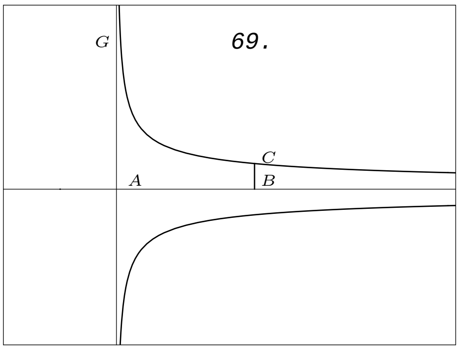
[22]Estamos ahora en el primer caso, cuarta clase, tercer género cuya ecuación es $xy^2+ey=d$. En este caso, la cúbica tiene dos asíntotas: $x=0$ e $y=0$. Se divide en dos especies según que la cúbica tenga o no diámetro:

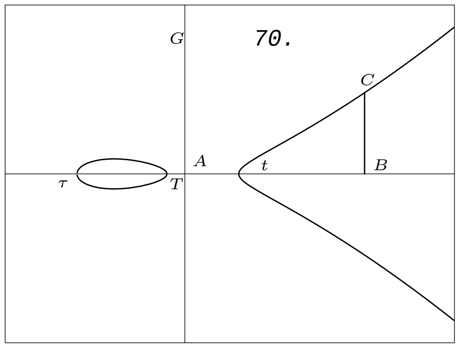
- $e\neq 0$, no hay diámetro: es la sexagésima cuarta especie (fig. 68).
- Si $e=0$; hay entonces un diámetro: es la sexagésima quinta especie (fig. 69).

[23]Estamos ahora en el segundo caso, esto es, cúbicas de ecuación

$$xy=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Tiene entonces la cúbica una sola asíntota $x=0$ –necesariamente $d\neq 0$, pues reduciría a cónica–. Hay una sola especie: la sexagésimo sexta –el tridente de Descartes– (fig. 72).





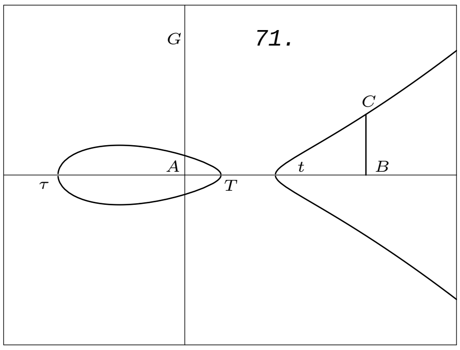
convergentes y que forman con las primeras una suerte de tridente[24]. Y es esta figura de parábola aquélla mediante la cual construyera *Cartesio* ecuaciones de seis dimensiones[25]. Ésta es por tanto la especie *sexagésimo sexta*.

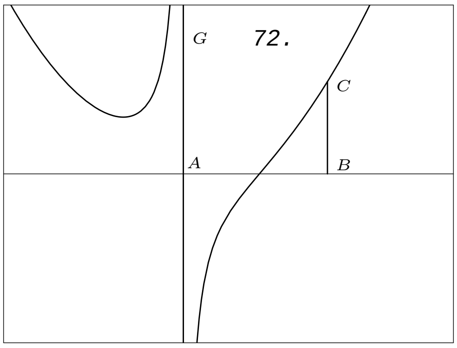
[24]A Newton se debe la denominación de tridente para esta curva. Usó por primera vez el nombre en la versión de la *Enumeratio* que redactó hacia el verano de 1695, aunque ya había manejado y estudiado la curva con anterioridad en varias ocasiones [Whiteside VII, 1976: 585, n. 31].

[25]Se trata de los cálculos de Descartes al final del libro III, el último, de la *Geométrie*; allí obtiene la ecuación $y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + u = 0$, con q mayor que el cuadrado de $rp/2$, para calcular los puntos de corte de un tridente con una circunferencia. Entre otras formas, Descartes construyó en la *Géométrie* el tridente mediante traslación adecuada de una parábola y encontró la fórmula: $y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0$ o, tanto da, $dxy = (b-y)(y^2-cd)$ [Descartes, 1637: 344]; y, también, como solución de un ejemplo del problema de Pappus para cinco líneas: –traduciendo a términos actuales– queremos encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de las distancias (medidas en ángulos fijos) a tres rectas es igual al producto de las distancia a las otras dos rectas; dados unos ejes, perpendiculares u oblicuos, OX y OY tomamos como nuestras cinco rectas $x = -a$, $x = 0$, $x = a$, $x = 2a$ e $y = 0$, y medimos las distancias de manera coherente con los ejes. Para un punto P de coordenadas (x, y), el producto de las distancias a las rectas $x = -a$, $x = a$, $x = 2a$ da $(x + a)(a - x)(2a - x)$, mientras que a las rectas $x = 0$, $y = 0$ da xy. Si añadimos el factor constante a al segundo producto –requerido por razones de homogenidad en la formulación geométrica del problema– obtenemos la ecuación

$$axy = (x + a)(a - x)(2a - x)$$

[Descartes, 1637: 335–337].





13. De las cinco parábolas divergentes.[26]

Era la ecuación en el tercer caso $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y designa a la parábola cuyas ramas divergen entre sí y progresan infinitamente hacia partes contrarias. La abscisa AB es su diámetro, y sus especies, las cinco que siguen. **[87]**

Si son reales y desiguales las raíces todas $A\tau$, AT, At de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, es la figura parábola divergente campaniforme, con *óvalo* cabe el vértice (*figs. 70, 71*). Y es la especie *sexagésimo séptima*.

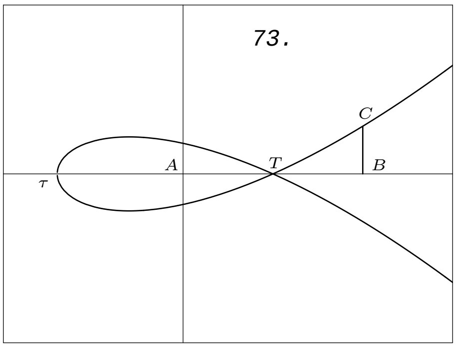
Si dos raíces son iguales, aparece una parábola *anudada*, tocando al óvalo (*fig. 73*), o *apuntada*, al ser el óvalo infinitamente pequeño (*fig. 74*) Especies éstas dos que son la *sexagésimo octava y sexagésimo nona*.

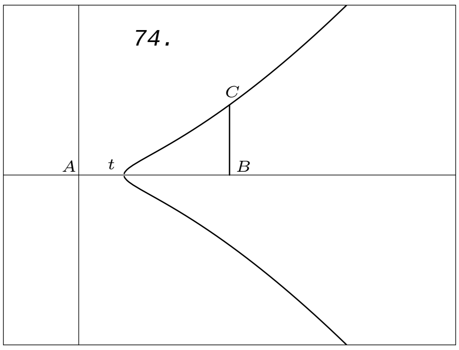
[26]Estamos ahora en el tercer caso, esto es, cúbicas con ecuación

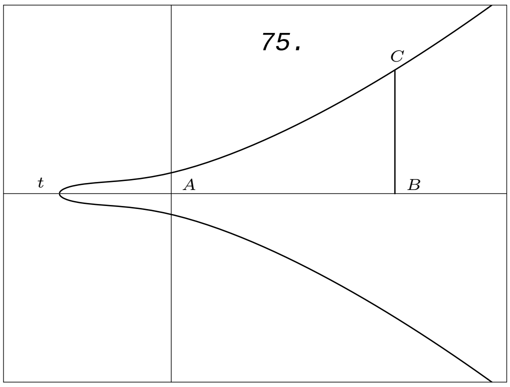
$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

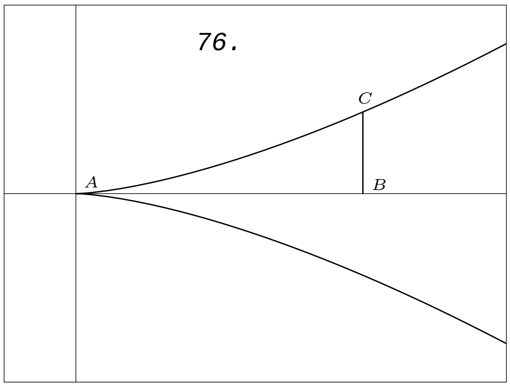
No hay asíntotas. Se clasifica este caso en cinco especies, según las raíces del polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$:

- 3 raíces reales simples: es la sexagésima séptima especie (figs. 70 y 71).
- 3 raíces reales de las cuales una es doble; aparecen dos casos:
  - La raíz doble es la mayor de las raíces si $a > 0$, y la menor si $a < 0$ –a no se anula pues la cúbica degeneraría en cónica–: es la sexagésima octava especie (fig. 73).
  - La raíz doble es la menor si $a > 0$, y la mayor si $a < 0$: es la sexagésima novena especie (fig. 74).
- Una raíz real triple: es la septuagésima especie (fig. 76).
- 2 raíces complejas y una real: es la septuagésima primera especie (figs. 74 y 75).







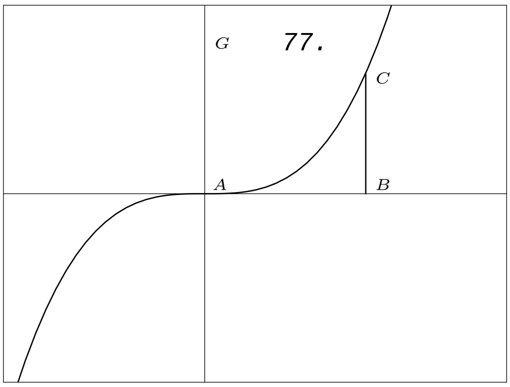


Si son iguales todas las raíces, será la parábola *acuminada* en el vértice (*fig. 76*). Y ésta es la parábola *neiliana* a la que dícese vulgarmente *semicúbica*[27]. Y es la *especie septuagésima*.

Si son imposibles dos raíces, tiénese una parábola *pura* campaniforme (*figs. 74, 75*), que constituye la *especie septuagésimo prima*.

[27]Además de por William Neil, la parábola semicúbica fue también considerada por Hendrick van Heuraet y Pierre de Fermat: los tres la rectificaron, en 1657 Neil –que contaba entonces 19 años–, en 1659 van Heuraet, y en 1660 Fermat. Y hubo un cierto debate hacia mediados del siglo XVII entre Wallis y Huygens por ver a quién de entre Neil y van Heuraet se le adscribía la paternidad de la curva. Evidentemente, Newton se inclina de la parte de Neil [Whiteside IV, 1971: 374, n. 72], aunque conocía la rectificación de van Heuraet que apareció publicada en la segunda edición latina de van Schooten de la *Géométrie* de Descartes y a partir de la que Newton empezó a entrever el teorema fundamental del cálculo [Whiteside I, 1967: 13, n. 30]; por mor de que el lector tenga pluralidad de opiniones recomiendo la lectura de [Van Maanen, 1984].

14. De la parábola cúbica.[28]



Era la ecuación en el cuarto caso $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y esta ecuación designa a la parábola[29] que tiene ramas contrarias y suele decirse *cúbica (fig. 77)*. Y así son las *especies* en todo *setenta y dos*[30].

[28]Estamos, por fin, en el cuarto y último caso, esto es, cúbicas con ecuación

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

No hay asíntotas. Todo el caso queda clasificado como la especie septuagésima segunda y última (fig. 77).

[29]En la versión redactada en 1695, Newton calificó por primera vez está especie como parábola *wallisiana* [Whiteside VII, 1976: 586, n. 36 y 634, n. 100], pues fue la usada por Wallis en 1657 para construir las raíces de la ecuación cúbica $x^3 = mx + n$ como puntos de corte de la parábola cúbica $y^3 = k^2(x + n/m)$ y la recta $y = x\sqrt[3]{k^2/m}$. El término *wallisiana* no aparece sin embargo en esta edición de Jones, aunque sí lo hace en la edición de la *Enumeratio* como apéndice de la *Opticks* [Newton, 1704: 157].

[30]Un último comentario. Hay malas noticias para quienes, después de estudiar esta clasificación de Newton de las cúbicas, sientan la tentación de emularle y pongan manos a la obra para clasificar las curvas de cuarto orden: E. Waring ya se les adelantó en 1762 con su *Miscellanea Analytica*. El catálogo de Waring se eleva a 84.551 especies distintas, de las cuales no menos de 72.480 tienen cuatro asíntotas –los números son correctos–.