Historia

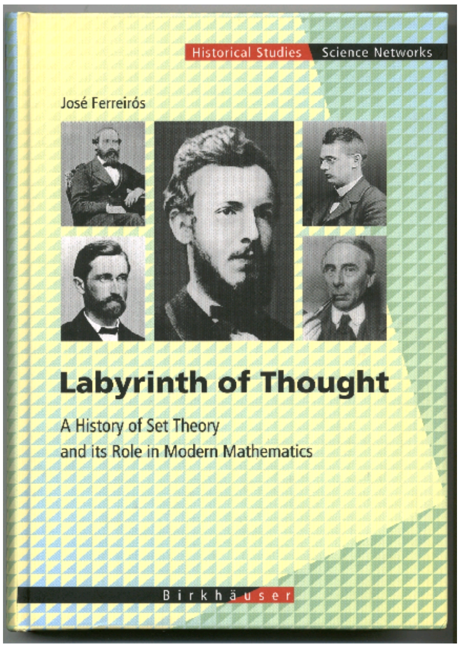
Sección a cargo de

Antonio J. Durán[1]

José Ferreirós,
Labyrinth of Thought. A history of Set Theory and its Role in Modern Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

por

Ignacio Jané



En la placa conmemorativa colocada en 1970 en la casa de Halle donde Georg Cantor (1845-1918) vivió desde 1886 hasta su muerte, se llama a Cantor «fundador de la teoría de conjuntos» (Begründer der Mengenlehre). En 1914, Felix Hausdorff dedicó su influyente monografía *Grundzüge der Mengenlehre* a Georg Cantor, «creador de la teoría de conjuntos» (Schöpfer der Mengenlehre). Con este misma denominación, la Sociedad Matemática Alemana se dirigió a Cantor en 1915, en ocasión de su septuagésimo aniversario. En 1932, Ernst Zermelo escribió en el prefacio de su edición de la obra matemática y filosófica de Cantor: «Es raro en la historia de las ciencias que toda una disciplina científica de importancia fundamental se deba al acto creador de un solo individuo. Este es el caso de la crea-

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: Antonio J. Durán; Sección Historia Gaceta RSME; Departamento de Análisis Matemático; Facultad de Matemáticas; Universidad de Sevilla; Aptdo. 1160; 41080-Sevilla; duran@cica.es

ción de Georg Cantor, la teoría de conjuntos, una nueva disciplina matemática cuyos rasgos esenciales se desarrollaron durante un período de unos 25 años en una serie de artículos de un único investigador.»

En *Labyrinth of Thought*, José Ferreirós cuestiona este origen singular de la teoría de conjuntos con argumentos y datos que atestiguan la importancia que en el origen de la teoría y en la primera fase de su desarrollo tuvo Richard Dedekind (1831-1916). Como Ferreirós observa, no es él el primero en llamar la atención sobre el papel desempeñado por Dedekind al respecto: Zermelo mismo, cuando en 1908 presentó la primera axiomatización de la teoría de conjuntos, se refirió a ella como a «la teoría creada por Cantor y Dedekind».

Para que la tesis de Ferreirós sobre la contribución de Dedekind a la creación de la teoría de conjuntos tenga algún valor, es preciso fijar los requisitos mínimos que deben cumplirse para poder hablar de teoría de conjuntos propiamente dicha. En la introducción, Ferreirós los fija en la aceptación del infinito actual, lo que significa admitir conjuntos infinitos y tratarlos como objetos matemáticos, sujetos a operaciones matemáticas. Dedekind cumple ambas condiciones. Puede pensarse que este requisito no es lo suficientemente estricto, puesto que hay un aspecto manifiesto, tal vez característico, en la teoría de conjuntos contemporánea que procede de Cantor y que no hallamos en la obra de Dedekind: la distinción de cardinalidades infinitas, el uso de los números ordinales infinitos y las definiciones por recursión transfinita. Pero aquí cabe distinguir, como advierte Ferreirós, entre la teoría de conjuntos como especialidad autónoma, por una parte, y, por otra, la teoría de conjuntos como herramienta ubicua en matemáticas, no sólo para la obtención de resultados, sino incluso como fuente de estructuras y objetos matemáticos. Este segundo aspecto de la teoría de conjuntos está parcialmente anclado en la obra de Dedekind.

Ferreirós es muy explícito sobre el alcance de su estudio, que no quiere limitar «a la teoría de conjuntos en el sentido más estricto de la palabra», es decir, a «la teoría abstracta de conjuntos según la estudian actualmente los ... lógicos matemáticos», aunque, desde luego, no se olvida de ella. De acuerdo con su subtítulo, el libro se ocupa también del papel que esta teoría desempeña en la matemática moderna. Así, dice el autor:

> he decidido no ocuparme exclusivamente de la teoría de conjuntos (transfinita), sino también prestar una atención cuidadosa a la perspectiva conjuntista, formulando preguntas como éstas: ¿Cómo llegaron los matemáticos al concepto de conjunto? ¿Cómo se convencieron de que ofrecía una base adecuada y un lenguaje para su disciplina? ¿Cómo un matemático (como Cantor) llegó a convencerse de que es importante desarrollar una teoría de conjuntos? (pág. xiv).

1

Labyrinth of thought consta de once capítulos distribuidos en tres partes, que cubren tres períodos históricos consecutivos. Los cinco primeros capítulos constituyen la primera parte, titulada *La emergencia de los conjuntos en la matemática*. El primero ofrece un panorama selectivo de los aspectos institucionales y conceptuales en la matemática alemana a lo largo de los primeros setenta años del siglo XIX, con especial dedicación a los dos ámbitos en que surgen Cantor y Dedekind, los dos protagonistas principales: el Grupo de Göttingen (1855-1859), con Dirichlet, Riemann y Dedekind, y la Escuela de Berlín (1855-1870), donde estudió Cantor desde 1863 hasta 1869 y donde dominaban Kummer, Weierstrass y Kronecker. El segundo capítulo se centra sobre todo en Riemann, a quien Ferreirós presenta como el iniciador de la actitud conjuntista ante la matemática. El tercer capítulo trata del uso de los métodos conjuntistas en álgebra por parte de Dedekind, el cuarto se dedica a la presentación y discusión de distintas construcciones de los números reales, y el quinto a los orígenes de la teoría de conjuntos de puntos, con atención especial al trabajo de Cantor. Los tres capítulos siguientes forman la segunda parte, titulada *Entrando en el laberinto: hacia una teoría abstracta de conjuntos*. El capítulo sexto está dedicado a los primeros resultados de Cantor sobre conjuntos no numerables, el séptimo a las contribuciones de Dedekind en su caracterización de la estructura de los números naturales, y el octavo a la obra de Cantor a partir de su introducción de los números ordinales. La tercera y última parte, *En busca de un sistema de axiomas*, contiene los tres capítulos finales. En el noveno se describe la difusión de la teoría de conjuntos a partir de 1890, se discute la emergencia y el impacto de las paradojas de la teoría de conjuntos, la formulación explícita del axioma de elección por Zermelo en 1904 en su demostración de que todo conjunto es bien ordenable y las dos presentaciones formales más influyentes de la teoría: la axiomatización de Zermelo y la teoría de los tipos de Russell. El capítulo décimo se ocupa de la famosa crisis de los fundamentos, de la ascensión de la teoría simple de los tipos y de la victoria final de la axiomatización en un lenguaje de primer orden. El undécimo y último capítulo se dedica a la consolidación de la teoría, en forma de los sistemas axiomáticos de Zermelo-Fraenkel (ZF) y de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), y de la introducción de los conjuntos constructibles de Gödel para su demostración de la consistencia relativa (a ZF o a NBG) del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo. El libro concluye con una sólida bibliografía, un índice onomástico y otro analítico, ambos completos.

Como pone de manifiesto esta descripción sumaria de su contenido, se trata de un libro ambicioso que pretende cubrir la historia de la teoría de conjuntos desde su gestación hasta su consolidación. En los dos apartados siguientes voy a comentar con cierto detalle algunas de las contribuciones de Dedekind y Cantor, con el objetivo principal de disponer de datos para evaluar la tesis de Ferreirós sobre la influencia de Dedekind.

Antes, sin embargo, es apropiado decir algunas palabras acerca del segundo capítulo, donde Ferreirós defiende que «la primera aparición influyente de la perspectiva conjuntista≫ se encuentra en Bernhard Riemann (1826-1866). Sus argumentos se basan fundamentalmente en algunas consideraciones sobre la obra de Riemann en teoría de funciones y en el análisis de la primera parte de su famosa conferencia de 1854: "Sobre las hipótesis en que se basa la geometría", donde, según argumenta Ferreirós con detalle, el concepto de *variedad* (*Mannigfaltigkeit*) puede entenderse como el de conjunto; casi en palabras de Riemann, una variedad es la totalidad de los modos de determinación de un concepto general. Tras un inmersión en el contexto lógico-filosófico de la época, Ferreirós pone de manifiesto que lo que Riemann define no es otra cosa que una clase en sentido lógico: una variedad es la extensión de un concepto, la clase de todos los objetos que tienen cierta propiedad. Acerca de Riemann, Ferreirós no sugiere que obtuviera resultados que hoy diríamos que pertenecen a la teoría de conjuntos, sino ≪sólo que introdujo de modo sustancial lenguaje conjuntista en su tratamiento de las teorías matemáticas y consideró los conjuntos como fundamentación de la matemática≫ (pág. 39). También mantiene que ≪las ideas de Riemann, y sobre todo su nueva visión de la matemática y sus métodos, influyeron tanto en Dedekind como en Cantor≫ (pág. 40). La influencia, más decisiva en Dedekind que en Cantor, se documenta debidamente en distintos lugares del libro.

2

Las contribuciones de Dedekind a la teoría de conjuntos son en cierto modo indirectas, puesto que no se interesó por la teoría de conjuntos como disciplina independiente, sino que desarrolló técnicas conjuntistas para tratar cuestiones de otras áreas de la matemática; sin embargo, no lo hizo de manera circunstancial, pues, como escribe Ferreirós, ≪Dedekind consideraba la matemática como un edificio construido sobre cimientos conjuntistas≫ (pág. 82).

Richard Dedekind (1831–1916)

Las primeras aplicaciones indiscutibles de técnicas conjuntistas las efectúa Dedekind en álgebra, con la caracterización abstracta de estructuras, como la de cuerpo o la de anillo, a la manera actual (consistentes en un conjunto y una o más operaciones que cumplen ciertas condiciones debidamente especificadas), y con la consideración de homomorfismos e isomorfismos entre tales estructuras. Ferreirós llama la atención sobre el lugar fundamental que los conceptos de conjunto y de función ocupan en la concepción que Dedekind tenía de la matemática.

Otra manifestación de la perspectiva conjuntista de Dedekind es su construcción de objetos matemáticos en términos de conjuntos o como conjuntos mismos, como en el caso de los ideales (conjuntos de números algebraicos sujetos ellos mismos a operaciones algebraicas), o la consideración de clases de equivalencia como objetos, de hecho, de un conjunto infinito de clases de equivalencia todas ellas infinitas (ya en un artículo del 1857). Otro ejemplo de este tipo es la caracterización de los números reales en términos de cortes de números racionales de que hablaremos en seguida.

Debemos destacar también el uso esencial de elementos conjuntistas (conjuntos y funciones) en la caracterización de conceptos matemáticos fundamentales, en particular, el de la continuidad de la recta real y el de número natural. Dedekind presenta su construcción de los números reales como fruto de su análisis del concepto de continuidad, que expresa en el siguiente principio:

> Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce la partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos clases[2].

Este principio de continuidad sugiere a Dedekind cómo completar el orden de los números racionales, a saber: «creando» un número para cada corte irracional, o sea introduciendo un número para cada corte (A, B) del conjunto de los números racionales tal que ni A tiene elemento máximo ni B tiene elemento mínimo. A diferencia del caso de un ideal en un anillo, que Dedekind define como un conjunto de elementos del anillo, Dedekind no identifica (como suele hacerse actualmente al presentar su construcción) un número racional con el corte que lo determina ni con cualquier otro conjunto. En todo caso, advierte Ferreirós, hacerlo o no es una mera cuestión de preferencia. Como escribió el mismo Dedekind, «si no se quiere introducir nuevos números, no tengo nada en contra: el teorema que demuestro dice entonces: el sistema de todas las cortaduras en el dominio, por sí discontinuo, de los números racionales, constituye una variedad continua»[3].

Puesto que lo que nos ocupa no es tanto la construcción de Dedekind en sí como su contribución a la teoría de conjuntos, tal vez sea pertinente observar que esta construcción de los números reales presupone la inteligibilidad y la determinación de la totalidad de los conjuntos de números racionales, pues no

---

[2] *Continuidad y números irracionales*, en Richard Dedekind: *Qué son y para qué sirven los números*, edición e introducción a cargo de José Ferreirós. Alianza editorial, 1998 (pág. 85).

[3] Carta de Dedekind a Lipschitz, en Richard Dedekind: *Qué son y para qué sirven los números*, edición e introducción a cargo de José Ferreirós. Alianza editorial, 1998 (pág. 161).

se consideran sólo los cortes definidos de uno u otro modo, sino todos los cortes posibles. Pero Dedekind no menciona en ningún momento esta suposición implícita (posiblemente invisible).

Debemos a Dedekind la primera definición precisa del concepto de infinitud: un conjunto A es infinito si y sólo si existe una biyección entre A y un subconjunto propio de A, definición ya formulada en 1872 y que aparece en la monografía *Qué son y para que sirven los números* (publicada en 1888), donde presenta su construcción de los números naturales, basada en un análisis estructural: los números naturales constituyen un sistema *simplemente infinito* con respecto al número 1 y a la operación sucesor σ. Esto significa que (i) σ es una función inyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, (ii) 1 no es un valor de σ ($1 \notin \sigma[\mathbb{N}]$) y (iii) $\mathbb{N}$ es la clausura de $\{1\}$ con respecto a σ, es decir, la intersección de todos los conjuntos que contienen 1 y están cerrados con respecto a σ:

$$\mathbb{N} = \bigcap\{X \subseteq \mathbb{N} : 1 \in X \wedge \sigma[X] \subseteq X\}.$$

Dedekind justifica la corrección de este análisis observando que $\mathbb{N}$ cumple ciertamente estas condiciones y mostrando que todos los sistemas que las cumplen son isomorfos a $(\mathbb{N}, \sigma, 1)$. Este último punto requiere la demostración previa de la posibilidad de definir funciones por recursión sobre un sistema simplemente infinito, demostración que Dedekind es el primero en ofrecer y que usa para la definición de las operaciones aritméticas en términos de la operación sucesor. En cuanto a la construcción de los números naturales, Dedekind muestra cómo obtener un sistema simplemente infinito a partir de un conjunto infinito y una biyección que atestigüe que lo es: si A es un conjunto infinito, f es una biyección entre A y un subconjunto propio B de A, y $e \in A \setminus B$, entonces la clausura D de $\{e\}$ con respecto a f es un conjunto simplemente infinito (con respecto a e y a la restricción de f a D). Una vez en disposición de un sistema simplemente infinito (D, f, e), Dedekind obtiene los números naturales haciendo abstracción de la naturaleza particular de los elementos de D, pero reteniendo las relaciones mutuas determinadas por f; el elemento distinguido e da lugar, naturalmente, al número 1.

3

En noviembre de 1873, Cantor escribió a Dedekind preguntándole si sabía si los números reales eran biyectables con los enteros positivos. Dedekind le respondió que no lo sabía, y que, en su opinión, la pregunta no merecía demasiada atención, por ser meramente especulativa. Sin embargo, añadió que el conjunto de los números algebraicos sí es numerable, y acompañó una demostración de este hecho. Pocos días después, Cantor logró demostrar que el conjunto de los números reales no es numerable, demostración que Dedekind le ayudó a simplificar. Cantor publicó ambos resultados (el de Dedekind sobre los números algebraicos y el suyo propio), observando que de ellos se sigue la existencia de números trascendentes.

En 1877, Cantor mostró que los distintos espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$) son biyectables con $\mathbb{R}$. También en este caso Dedekind le ayudó a simplificar la demostración original y a corregir ciertos errores de detalle. Además, le hizo ver que la existencia de estas biyecciones discontinuas no destruye el concepto de dimensión, como Cantor parecía sugerir. En la publicación de estos resultados, Cantor introdujo por primera vez el concepto comparativo de potencia (o cardinalidad) de un conjunto: dos conjuntos tienen la misma potencia si son biyectables; si no lo son, pero uno es biyectable con un subconjunto del otro, la potencia del primero es menor que la del segundo. Cantor conoce sólo dos potencias infinitas: la del conjunto de los números naturales y la del de los reales y conjetura que todo conjunto infinito de números reales tiene una de las dos. Se trata de la primera formulación de la llamada *hipótesis del continuo*. Los detalles de la obtención de estos resultados y de la colaboración entre Cantor y Dedekind están cuidadosamente descritos y analizados en el capítulo sexto de *Labyrinth*.

Georg Cantor (1845–1918)

En 1872, a raíz de un problema sobre la unicidad de series trigonométricas, Cantor asoció a cada conjunto de reales A su conjunto derivado A' (el conjunto de los puntos de acumulación de A) y consideró las iteraciones finitas de la operación $A \mapsto A'$, obteniendo *derivadas* sucesivas: $A^1 = A'$, $\ldots$, $A^{n+1} = (A^n)'$. En 1883 clasificó los conjuntos de reales en conjuntos de *primera especie* (si alguna derivada finita es nula) o de *segunda especie* (si ninguna derivada finita es vacía). Pudo mostrar que todos los conjuntos de primera especie son numerables, pero entre los conjuntos de segunda especie los hay numerables y no numerables. Para estudiar los conjuntos de segunda especie continuó la iteración más allá de lo finito. En primer lugar, definió A^∞ como la intersección de todas las derivadas finitas A^n, $A^{\infty+1}$ como $(A^\infty)'$, $A^{\infty+2}$ como $(A^{\infty+1})'$, $\ldots$ y $A^{\infty+\infty}$ como la intersección de todas las derivadas $A^{\infty+n}$. Prosiguiendo de este modo, Cantor afirmó, obtenemos las derivadas $A^{\infty\cdot\infty}$, A^{∞^∞}, etc. En ningún momento dijo de manera precisa cómo había que seguir, pero insistió en que este proceso es siempre continuable y está libre de toda arbitrariedad. Cantor se refirió a los índices de la iteración como *símbolos de infinitud* y mostró con ejemplos cómo construir conjuntos de segunda especie A tales que A^α es finito, y por tanto $A^{\alpha+1}$ es vacío, para distintos símbolos de infinitud α.

La poca precisión con que describió la extensión infinita de la iteración no le impidió obtener resultados no triviales con su ayuda, entre los cuales que si α es un símbolo de infinitud y A es un conjunto tal que A^α es vacío, entonces A' es numerable. La demostración se basa en que la sucesión de derivadas es decreciente y el conjunto de predecesores de cada símbolo de infinitud es numerable. Si A es un conjunto cualquiera,

$$A' = \bigcup_{\beta<\alpha} (A^\beta \setminus A^{\beta+1}) \cup A^\alpha;$$

ahora bien, cada diferencia $A^\beta \setminus A^{\beta+1}$ es numerable, ya que es un conjunto discreto, de modo que, si A^α es vacío, A' es la unión de una familia numerable de conjuntos numerables y, por tanto, es numerable.

La pregunta inversa: ¿es cierto que si A' es numerable, hay algún símbolo de infinitud α tal que A^α es vacío? no es tan fácilmente resoluble, ya que requiere una mayor delimitación del concepto de símbolo de infinitud. Para resolverla (en sentido afirmativo), Cantor introdujo los números transfinitos mediante dos reglas de generación, que generalizan el procedimiento de obtención de los símbolos de infinitud.

Los números (finitos o transfinitos) se obtienen, junto con su orden, a partir del número cero (Cantor partió del 1) con ayuda de dos *principios de generación*: generado ya un número α, el primer principio nos permite obtener su sucesor inmediato $\alpha + 1$; generado un conjunto de números sin elemento máximo, el segundo principio nos permite obtener su límite, a saber, el menor número mayor que todos los números del conjunto.

Los primeros números son los números naturales, generados sólo con ayuda del primer principio; los primeros números infinitos corresponden a los símbolos de infinitud (ω corresponde a ∞), cada uno de los cuales tiene un número numerable de predecesores. Pero hay más números. Cantor considera el conjunto X de todos los números transfinitos con un conjunto numerable de predecesores. X no tiene elemento máximo, por lo que su límite, ω_1, que existe por el segundo principio de generación, es el menor número transfinito que no posee un conjunto numerable de predecesores.

El término «transfinito» se opone no sólo a «finito» sino también a «infinito absoluto». Los números transfinitos son objetos matemáticos, pero no lo es el infinito absoluto, al que Cantor llama a veces «el verdadero infinito», puesto que es absolutamente ilimitado. Cantor ve en la generación de los números transfinitos un símbolo del infinito absoluto, puesto que la acción de los dos principios de generación no tiene límite posible: si X es un conjunto de números generados, el primer principio (si X tiene elemento máximo) o el segundo (si no lo tiene) genera un número mayor que todos los números en X. La idea de infinitud absoluta, aunque harto imprecisa, es fundamental en Cantor, y más adelante le permitió explicar las supuestas paradojas como basadas en la confusión entre infinito absoluto y transfinito[4]. El correlato matemático actual del infinito absoluto de Cantor es el concepto de clase propia.

Con los números transfinitos Cantor pudo formular y demostrar la inversa del teorema anterior: si A' es numerable, hay un número $\alpha < \omega_1$ tal que A^α es vacío. Debe ser así, pues en otro caso, en la descomposición

$$A' = \bigcup_{\beta<\omega_1} (A^\beta \setminus A^{\beta+1}) \cup A^{\omega_1},$$

ninguna de las diferencias $A^\beta \setminus A^{\beta+1}$ ($\beta < \omega_1$) sería vacía, por lo que $\bigcup_{\beta<\omega_1}(A^\beta \setminus A^{\beta+1})$ sería un subconjunto no numerable de A'.

Los números transfinitos son esenciales en la obra de Cantor. Por una parte, sirven de índices para cualquier iteración; por otra parte, cumplen el papel de ordinales, en cuanto sirven para medir la longitud de los buenos órdenes, un concepto que también introdujo él. Cantor los usó además para obtener representantes canónicos, lo que el llamó las *clases de números*, de las distintas cardinalidades de conjuntos infinitos. La primera clase consta de los números finitos, la segunda consta de los números cuyo conjunto de predecesores tiene la cardinalidad de la primera clase, la tercera consta de los números cuyo conjunto de predecesores tiene la cardinalidad de la segunda clase, etc. Esta forma de introducir las clases requiere ciertos ajustes para su continuación (si todo número transfinito ha de pertenecer a alguna clase), pero, una vez efectuados, tenemos, como dice Cantor, tantas clases de números como números mismos: para cada número α hay una clase de números $K(\alpha)$, de tal modo que si $\alpha < \beta$, la cardinalidad de $K(\alpha)$ es menor que la de $K(\beta)$. Así, también la multiplicidad de las clases de números es, según Cantor, absolutamente infinita. Más adelante Cantor introdujo la notación definitiva para los cardinales transfinitos: $\aleph_\alpha$ es el número cardinal de la clase $K(\alpha)$. Así, $\aleph_0$ es el cardinal de clase de los números naturales y $\aleph_1$ el de la clase de los ordinales numerables.

Me he detenido en la presentación de los números transfinitos porque constituyen el núcleo de la obra de Cantor. Como él mismo escribió para justificar su introducción: «Es tanta mi dependencia de esta extensión del concepto de número, que sin ella apenas podría avanzar un solo paso en la teoría de conjuntos». Además, puede servirnos para comparar la naturaleza de las contribuciones de Cantor y Dedekind a la teoría de conjuntos y ayudarnos a evaluar la tesis de Ferreirós sobre el papel cofundacional de Dedekind.

Ferreirós recorre la obra de Cantor desde la introducción de los ordinales hasta sus esfuerzos encaminados a la resolución de las paradojas en términos de la distinción entre multiplicidades inconsistentes (o incompletables o absolutamente infinitas) y multiplicidades consistentes (o completas, o conjuntos propiamente dichos) en el capítulo 8, que incluye también una discusión de la actitud filosófica de Cantor ante la matemática. En este capítulo se describen

[4]Ver I. Jané, "The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set", *Erkenntnis*, 42 (1995), págs. 375-402.

los intentos de Cantor de demostrar la hipótesis del continuo, que, con ayuda de los números transfinitos, es expresable diciendo que la cardinalidad del continuo es $\aleph_1$. La tentativa emprendida por Cantor parte de su análisis de los conjuntos cerrados y perfectos (conjuntos cerrados no vacíos sin puntos aislados). Mostró que todo conjunto perfecto tiene la cardinalidad del continuo, lo que sugiere un camino para demostrar la hipótesis del continuo: mostrar que todo conjunto no numerable posee un subconjunto perfecto. Cantor sólo logró mostrar que esto es cierto para todo conjunto cerrado, pero no logró ir más allá. Como sabemos, esta estrategia estaba condenada al fracaso, puesto que es posible demostrar la existencia de conjuntos no numerables sin subconjuntos perfectos. Otro camino pasa por obtener un conjunto cerrado de cardinalidad $\aleph_1$. Tampoco es ésta una vía practicable ya que, como mostró Paul Cohen en 1963, la hipótesis del continuo no es demostrable a partir de los axiomas usuales; tampoco es refutable a partir de ellos, según mostró Gödel en 1939, con un argumento esbozado en la sección 4 del capítulo 11 de *Labyrinth.*

4

No he hablado de todos los resultados de Cantor que Ferreirós describe y analiza en su libro, pero creo que lo que hemos visto es suficiente para apreciar la distinta naturaleza de las contribuciones de Dedekind y de Cantor. Si abrimos un manual de teoría de conjuntos, hallamos prácticamente en cada página algún uso de los números transfinitos, ya ordinales ya cardinales; hallamos también múltiples aplicaciones de construcciones definidas por recursión transfinita. Los buenos órdenes y sus generalizaciones, las relaciones bien fundadas, con respecto a las cuales es posible definir funciones por recursión, desempeñan un papel preponderante. Ninguno de estos elementos, presentes ya en la obra de Cantor, se encuentra en Dedekind. En teoría pura de conjuntos diríamos que la influencia de Dedekind es a lo sumo puntual, apenas discernible.

Sin embargo, si examinamos la teoría de conjuntos que se usa en otras áreas de la matemática, la situación es distinta. Excepto en algunas disciplinas próximas a la teoría de conjuntos misma, lo que podríamos llamar el estilo de Dedekind está tal vez más presente que el de Cantor. Así, cuando definimos el subgrupo de un grupo G generado por un conjunto X como la intersección de todos los subgrupos de G que incluyen a X, nuestra definición se apoya en Dedekind. También lo hacemos cuando definimos el cociente de un conjunto con respecto a una relación de equivalencia en la forma habitual. Para ejemplificar la diferencia de espíritu, podemos comparar dos definiciones de un mismo concepto, el de conjunto boreliano, una de corte dedekindiano y otra cantoriano, aunque el concepto en cuestión es ajeno tanto a Dedekind como a Cantor. En el estilo de Dedekind, definimos la clase $\mathcal{B}$ de los conjuntos borelianos de números reales como la intersección de todas las clases de conjuntos que contienen todos los abiertos y están cerradas con respecto a complementación y a uniones numerables (brevemente: $\mathcal{B}$ es la intersección de todas las σ-álgebras que contienen todos los conjuntos abiertos). En el estilo de Cantor, por otra parte, definiríamos $\mathcal{B}$ como la unión de la familia $(\mathcal{B}_\xi : \xi \in \omega_1)$, definida por recursión transfinita de modo que $\mathcal{B}_0$ es la clase de los conjuntos abiertos, y, para cada ordinal numerable $\xi > 0$, $\mathcal{B}_\xi$ es la clase de los complementos y de las uniones numerables de conjuntos en $\bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{B}_\eta$. En general, en matemática no conjuntista se tiende a evitar el uso de ordinales y la recursión transfinita. Una manifestación notable de este hecho lo hallamos en el uso generalizado del lema de Zorn, una especie de caja negra que evita las construcciones por recursión[5]; otra, en la usual limitación a los axiomas de Zermelo de 1908, rehuyendo el uso del axioma de sustitución, sin el cual no hay recursión transfinita[6].

La Sociedad Matemática de Gotinga en 1902. De los sentados, el tercero por la izquierda es D. Hilbert; a la derecha tiene a F. Klein. El primero por la derecha es E. Zermelo.

Al principio de esta recensión cité dos pasajes de Zermelo, uno escrito en 1908 y otro en 1932. En el primero, Zermelo atribuye a Cantor y a Dedekind la creación de la teoría de conjuntos; en el segundo limita la creación de la teoría a Cantor. Sugiero que esta discrepancia corresponde a una distinta identificación del contenido de la teoría de conjuntos según las observaciones anteriores. La primera cita aparece en la introducción de su primera axiomatización de

[5]Ver A. Levy *Basic Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1979, pág. 163.

[6]El axioma de sustitución (o de reemplazo) afirma que dado un conjunto A y una asignación de un conjunto a_x a cada elemento x de A, la totalidad de los conjuntos asignados $\{a_x : x \in A\}$ es también un conjunto.

la teoría, un objetivo principal de la cual, dice Zermelo, es desarrollar los fundamentos lógicos de la aritmética y el análisis, objetivo claramente dedekindiano. Entre los axiomas de esta teoría no se halla el de sustitución, y en su desarrollo no hay mención de ordinales ni cardinales ni iteraciones infinitas. Por el contrario, cuando Zermelo escribió la segunda cita había publicado ya un artículo fundamental en el que estudiaba los modelos de los axiomas de Zermelo-Fraenkel, entre los que aparecen el de fundación y el de sustitución, que cumplen un papel esencial[7]. En este artículo de 1930[8], comentado en la sección 2 del capítulo 11 de *Labyrinth*, Zermelo describe una jerarquía infinita de universos, cada uno de los cuales es una extensión propia de los anteriores, muestra que el cardinal de cada uno de ellos es inaccesible[9] y propone la aceptación de una sucesión ilimitada de tales cardinales. El contenido de este artículo, uno de cuyos objetivos es explicar que, como Cantor mantuvo, las paradojas de la teoría de conjuntos son sólo aparentes y están basadas en una confusión, está ya muy alejado de la obra de Dedekind. De ahí que en esta época no mencione a Dedekind entre sus creadores.

5

La argumentación y el acopio de datos encaminados a justificar la importancia de Dedekind en el origen de la teoría de conjuntos da lugar a un cierto desequilibrio en el contenido de *Labyrinth*, pues a pesar de que las contribuciones de Cantor en teoría de conjuntos son más numerosas y más centrales que las de Dedekind, la extensión dedicada a Dedekind no es menor que la dedicada a Cantor, y ciertos resultados de Cantor (sobre todo a partir de 1883) reciben un tratamiento algo sumario en comparación con los de Dedekind. Esto, sin embargo, puede justificarse como contrapeso a la poca atención que suele prestarse a Dedekind en los trabajos sobre historia de la teoría de conjuntos. A este respecto, Ferreirós escribe en la introducción: ≪a pesar del gran número de obras históricas que se han ocupado de la teoría de conjuntos de uno u otro modo, no disponemos todavía de una descripción adecuada y equilibrada de su emergencia≫ (pág. xiii). No cabe duda de que *Labyrinth* contribuye a completar esta descripción.

De todos modos, Cantor y Dedekind no son los únicos protagonistas de *Labyrinth*, ya que el libro describe la historia de la teoría de conjuntos desde su origen hasta su consolidación antes de la segunda guerra mundial. La ex-

[7]El axioma de fundación afirma que todo conjunto no vacío posee un elemento minimal; es decir, que todo conjunto no vacío A posee un elemento ninguno de cuyos elementos pertenece a A.

[8]"Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", Fundamenta Mathematica, 16 (1930), págs. 29-47

[9]Un cardinal no numerable κ es inaccesible si (1) la suma de menos de κ cardinales menores que κ es menor que κ y (2) la potencia 2^λ de todo cardinal $\lambda < \kappa$ es también menor que κ. La existencia de cardinales inaccesibles no es demostrable en ZFC (ZF más el axioma de elección).

posición es clara y a menudo apasionante; su ritmo es distinto según la época tratada, tanto más rápido cuanto más nos acercamos al presente. Así, las contribuciones de Dedekind al álgebra abstracta, el análisis de las construcciones de los números reales, la génesis de los teoremas de Cantor acerca de la no numerabilidad de los reales y de la biyectabilidad de los distintos espacios euclídeos, y la construcción de los números naturales por parte de Dedekind reciben un tratamiento detallado. La tercera parte, que abarca un período de cuarenta años, presenta un tratamiento más global que pone de manifiesto la interrelación entre los múltiples aspectos y tendencias. Allí encontramos la polémica desatada en torno al axioma de elección, el papel de la teoría de tipos y su relación con la teoría de conjuntos, la axiomatización de la teoría de conjuntos por Zermelo y su extensión posterior, etc. Se trata, en suma, de un libro ambicioso y logrado, de lectura atractiva, escrito con autoridad y rigor, siempre atento al origen y a los antecedentes de los conceptos e ideas discutidos.

Ignacio Jané
Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència
Universitat de Barcelona
correo-electrónico: jane@mat.ub.es