Historia

Sección a cargo de

Jesús Hernández Alonso[1]

200 años de convergencia de las series de Fourier

por

Javier Duoandikoetxea

1 . Fourier

El 21 de diciembre de 1807, Joseph Fourier, a la sazón prefecto del departamento de Isère[2], presentó al *Institut de France* una memoria titulada *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*. Cuatro miembros, uno más de lo que era habitual, Lagrange, Laplace, Lacroix y Monge, fueron designados para emitir un informe, que nunca se llegó a escribir a pesar de las insistencias de Fourier, que deseaba un juicio sobre su trabajo. A cambio, el Instituto propuso como tema para el premio que se debía otorgar en 1812 «dar la teoría matemática de las leyes de propagación del calor y comparar los resultados de esta teoría con los de experiencias exactas». A finales de 1811 Fourier entregó una nueva memoria como concursante, esta vez con el título *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*. Ganó el premio, al que sólo concurrió otra obra sin ninguna posibilidad de hacerle sombra, aunque la valoración del jurado mostraba sus reservas («la manera en la que el autor llega a sus ecuaciones no está exenta de dificultades y su análisis para integrarlas deja aún algo que desear, sea respecto a la generalidad, sea incluso del lado del rigor», [13, pág. 344]), lo que tuvo como consecuencia inmediata la no publicación del trabajo.

Nacido en Auxerre en 1768, Fourier era profesor de la *École Polytechnique* cuando en 1798 fue reclutado por su colega Gaspard Monge para participar en

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: Jesús Hernández Alonso; Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid; 28049 – Madrid; Correo electrónico: `jesus.hernandez@uam.es`

[2]El departamento de Isère está en el sudeste de Francia y su capital es Grenoble. El cargo de prefecto equivale al de gobernador civil. Desde 1987 la universidad científica y médica de Grenoble lleva el nombre de *Université Joseph Fourier*.

la sección científica de la expedición de Napoleón a Egipto. Allí tuvo algunas responsabilidades administrativas, además de científicas, y a la vuelta de la expedición a Francia en 1801 sus planes de reincorporarse a la Escuela Politécnica como profesor se vieron truncados por su nombramiento de prefecto de Isère. No volvió a enseñar pero no por ello abandonó su labor científica que, además de con su labor política, tuvo que compaginar con la coordinación de la edición de la *Description de l'Égypte*, la gran obra que recogía los estudios de la expedición napoleónica. Él mismo fue el autor de su *Prefacio histórico* (1809). Conservó su puesto de prefecto durante la primera restauración monárquica de 1814, fue depuesto a la vuelta de Napoleón de Elba en 1815, pasó a ser nombrado prefecto del departamento de Rhône y perdió el cargo un par de meses después por discrepancias con las exigencias de Napoleón. En 1815, poco antes de la segunda restauración monárquica, se trasladó a París donde comenzó su carrera política en el campo científico.

Intentó ser miembro de la *Académie des Sciences*[3] y fue elegido por primera vez en 1816, pero Luis XVIII rechazó su nombramiento por su pasado napoleónico. La segunda vez optó a un puesto en la sección de Física, lo ganó ampliamente y fue aceptado. Era en 1817, lo que ha quedado recogido en el tercer capítulo de la obra *Les Misérables* de Victor Hugo:

> Había en la Academia de Ciencias un Fourier célebre a quien la posteridad ha olvidado y en no se qué desván un Fourier oscuro de quien el futuro se acordará[4].

A partir de su nombramiento puso especial empeño en que se publicase su trabajo premiado de 1812, lo que consiguió en dos partes aparecidas en 1824 y 1826, aunque datadas en fecha anterior. Mientras tanto, había publicado en 1822 su libro *Théorie analytique de la chaleur*, que el físico Arnold Sommerfeld calificó como «Biblia de la Física Matemática» (en el prólogo de [62])[5]. Ese mismo año fue nombrado Secretario Perpetuo de la Academia de Ciencias y en 1826 fue elegido miembro de la Academia Francesa. Murió en París en 1830. (Una biografía muy completa de Fourier con abundante documentación es [13].)

---

[3] La *Académie royale* nacida a finales del siglo XVII fue suprimida en 1793. Dos años después se creó el *Institut national des sciences et des arts* que reagrupaba a las antiguas academias científica, literaria y artística. En 1816 las secciones (*classes*) del Instituto volvieron a llamarse *academias*. Así, la *première classe* (Ciencias físicas y matemáticas), la más numerosa, se convirtió en *Académie des sciences*.

[4] El «Fourier oscuro» es Charles Fourier, filósofo, fundador de la Escuela societaria, considerado «socialista utópico». Sobre el olvido de «nuestro» Fourier que anuncia Victor Hugo, véase el artículo de Jean-Pierre Kahane en este número de LA GACETA.

[5] Más elogios al trabajo de Fourier debidos a Lord Kelvin, Darboux, Poincaré y Boussinesq aparecen en [10, pág. 7].



Figura 1: Joseph Fourier (1768–1830), primera página de su memoria de 1811 y portada de la *Théorie analytique de la chaleur* (1822).

2 . El problema

La memoria de Fourier de 1807 permaneció inédita hasta la publicación de [29], donde se hace un estudio de su contenido. Aunque desarrollados en sus trabajos posteriores, casi todos los elementos destacados de su aportación científica se encuentran ya en esa primera memoria y sólo la propagación del calor en un cuerpo infinito, que conduce a lo que llamamos integrales de Fourier, se echa en falta. En [28] se puede ver una tabla comparativa de los temas tratados en las dos memorias y el libro de Fourier.

En sus tres obras Fourier comienza deduciendo la ecuación que gobierna la difusión del calor. Después resuelve el problema de la distribución de temperatura en un tiempo dado a partir de la distribución en el instante inicial, en varios casos. Para ello inventa el método de separación de variables, también conocido como método de Fourier. Para escribir la solución necesita escribir la función que da el dato inicial como suma de una serie trigonométrica. Éste es precisamente el aspecto del trabajo de Fourier del que nos vamos a ocupar aquí, dejando a un lado otros méritos.

Aunque se presenta de varias maneras según el tipo de problema estudiado, en el caso general y para una función de periodo 2π el problema consiste en, dada una función f, encontrar un serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

cuya suma coincida con $f(x)$ para cada x. En primer lugar Fourier decidió que los coeficientes debían venir dados por las fórmulas

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,. \tag{2}$$

(El factor $1/2$ del primer sumando de (1) se pone para que la fórmula de a_0 sea la misma que la de los demás a_k.) La manera en que Fourier dedujo esta fórmula es cuando menos curiosa[6], utilizando sistemas lineales de infinitas ecuaciones, pero también presentó en el libro el argumento habitual de ortogonalidad. Véase [8], además de la obra original [26]. La serie trigonométrica (1) en la que los coeficientes se eligen según las fórmulas (2) se llama *serie de Fourier* de f. Escribiremos $S_N f$ la suma parcial de la serie de Fourier de f correspondiente a los términos desde $k = 0$ hasta $k = N$.

Tras considerar varios ejemplos Fourier afirma ([26, pág. 259]):

> Las series ordenadas según los cosenos y los senos de arcos múltiplos son siempre convergentes, es decir, que dando a la variable un valor cualquiera no imaginario, la suma de los términos converge cada vez más hacia un único límite fijo, que es el valor de la función desarrollada.

Puede uno preguntarse a qué tipo de funciones pretende Fourier aplicar sus desarrollos trigonométricos. Podemos leer en [26, pág. 552]:

> En general, la función $f\,x$ representa una sucesión de valores u ordenadas, cada una de las cuales es arbitraria. Como la abscisa x puede recibir una infinidad de valores, hay un número igual de ordenadas $f\,x$. Todas tienen valores numéricos concretos, sean positivos, negativos o nulos. No se supone que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se suceden de cualquier manera, y cada una de ellas se da como si fuese una sola cantidad.

Tomada literalmente, ésta es una definición moderna de función. Sin embargo, en la práctica Fourier siempre considera propiedades más restrictivas de las funciones, incluso su representación en serie de Taylor. Nunca dudó de la posibilidad de definir los coeficientes ya que «los coeficientes de las series trigonométricas son áreas definidas» ([26, pág. 259]). Fourier está dando por sentado que siempre hay un área bien definida entre la gráfica de una función y el eje de abscisas.

En cuanto a la convergencia, indica que no le parece necesario demostrarla, que es fácil ([26, pág. 247]). A continuación podemos leer lo siguiente:

> Esto no resulta solamente de que los valores de los términos disminuyen continuamente; pues esta condición por sí sola no basta para establecer la convergencia de una serie. Es necesario que los valores a los que se llega aumentando continuamente el número de términos se acerquen cada vez más a un límite fijo y no se separen de éste más que en una cantidad que puede hacerse menor que toda magnitud dada: este límite es el valor de la serie. Pues bien, se demuestra rigurosamente que las sucesiones de las que se trata satisfacen esta última condición.

[6]Lebesgue comenta en [49, pág. 29] que aunque el método no es riguroso, «es interesante sobre todo por la ingeniosidad de las transformaciones que efectúa Fourier».

Aunque sin la precisión formal de la definición de Cauchy, el concepto de convergencia de una serie parece estar bien establecido en Fourier.

A falta de demostraciones generales de sus resultados, lo que Fourier nos legó no fue un teorema sobre la representación de una función en serie trigonométrica, sino un problema. Un problema en el que estaban implicados los conceptos de función, integral, suma de series y, posteriormente, tipo de convergencia. La influencia de este problema en el desarrollo de los conceptos del análisis matemático fue considerable.

Si situamos en los trabajos de Fourier la historia del problema, entonces hay que decir que existe una prehistoria que comenzó unos sesenta años antes con la discusión del problema de la cuerda vibrante por d'Alembert, Euler y Daniel Bernouilli, y aportaciones posteriores de Lagrange y Clairaut. No vamos a entrar en esta cuestión en la que tuvieron más que ver las diferentes concepciones de función que la determinación de la serie y su convergencia (véanse, por ejemplo, [38, cap. 22] o la introducción de [56]). Que Fourier no veía la función sujeta a una (sola) fórmula como podía pensarse en el siglo XVIII se puede ver en su afirmación de que distintas series pueden dar la misma función ([26, pág. 258]):

> Si se nos propone una función $f\,x$, cuyo valor viene representado en un intervalo determinado, desde $x = 0$ hasta $x = X$, por la ordenada de una línea curva trazada arbitrariamente se podrá siempre desarrollar esta función en una serie que no contendrá más que los senos, o los cosenos, o los senos y cosenos de arcos múltiplos, o sólo los cosenos de los múltiplos impares.

Incluso la fórmula de los coeficientes de Fourier aparece en alguna manera en trabajos precedentes, como se puede leer en la documentada información de [49].

3. Dirichlet y los criterios de convergencia

Una vez planteado el problema de la representación de funciones por series trigonométricas, los intentos de probar la convergencia de la serie de Fourier aparecieron inmediatamente. Poisson y Cauchy publicaron sendas pruebas incorrectas, aunque sobre la de Poisson volveremos en la sección 6. Fue Dirichlet[7] quien en 1829 inauguró una nueva época ya que publicó el primer resultado correcto de convergencia ([15]):

> Si la función $\varphi(x)$, cuyos valores se suponen finitos y determinados, no presenta más que un número finito de soluciones de

[7]Dirichlet, cuya familia era de origen francés, se trasladó a París en 1822, con tan sólo 17 años, para estudiar matemáticas. Allí entró en contacto con destacados matemáticos, Fourier entre ellos. Volvió a Alemania en 1825 y fue uno de los responsables de que la matemática alemana ocupase el primer lugar mundial durante casi un siglo.

> continuidad entre los límites $-\pi$ y π, y si además no tiene más que un número determinado de máximos y mínimos entre esos mismos límites, la serie [de Fourier] cuyos coeficientes son integrales definidas dependientes de la función $\varphi(x)$ es convergente a un valor expresado generalmente por $\frac{1}{2}[\varphi(x+\epsilon)+\varphi(x-\epsilon)]$, donde ϵ designa un número infinitamente pequeño.

Es decir, si una función acotada es continua a trozos y monótona a trozos, su serie de Fourier converge en cada punto a la semisuma de los límites laterales de la función.

El artículo de Dirichlet comienza indicando las razones por las que la prueba de Cauchy no era válida. Después estudia las integrales —hoy llamadas de Dirichlet—,

$$\int_a^b g(t)\frac{\sin kt}{\sin t}dt \tag{3}$$

con $0 \le a < b \le \pi/2$ y g monótona. Deduce que cuando k tiende a infinito convergen a cero, excepto cuando $a = 0$, en cuyo caso convergen a $g(0+)$. El estudio de esas integrales está motivado por la representación integral de la suma parcial

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin(N+1/2)t}{\sin t/2}dt,$$

donde reconocemos la presencia de lo que hoy llamamos *núcleo de Dirichlet*. El resultado de convergencia se obtiene aplicando el resultado probado para las integrales (3).

La demostración original es estrictamente rigurosa y se lee sin dificultad, aunque hoy es habitual presentarla en forma diferente (por ejemplo, con el segundo teorema del valor medio para integrales). La continuidad a trozos de las funciones no se usa en realidad en ningún lugar de la prueba, pero incorporándola Dirichlet se asegura de que las integrales que dan los coeficientes de Fourier están bien definidas. En efecto, le sirve la definición de Cauchy para la integral, que data de 1823. Al final de su artículo Dirichlet sugirió una condición más amplia de integrabilidad que podría aceptar un número infinito de discontinuidades y mostró las dificultades para extenderla a «todas» las funciones:

> Tenemos un ejemplo de una función que no cumple esta condición [de integrabilidad] si suponemos $\varphi(x)$ igual a una constante determinada c cuando la variable x tiene un valor racional e igual a otra constante d cuando esta variable es irracional. La función así definida tiene valores finitos y determinados para todo valor de x y, sin embargo, no se puede sustituir en la serie [de Fourier], puesto que las diferentes integrales que entran en esta serie perderían todo su sentido en este caso.

Aquí la referencia a la pérdida de sentido la podemos entender no sólo como la imposibilidad de usar la definición de Cauchy —la función ni siquiera será integrable en el sentido de Riemann—, sino que incluso la afirmación de Fourier de que los coeficientes son «áreas definidas» queda en entredicho.

Además de por el interés de su resultado, el trabajo de Dirichlet vino a clarificar los términos en que se planteaba el problema. Por una parte, no podemos hablar de coeficientes de Fourier más que para las funciones para las que las integrales que aparecen en las fórmulas tienen sentido. Por otra, Dirichlet comprendió que no había que buscar un resultado tan general como Fourier sugería, sino condiciones suficientes que asegurasen la convergencia de la serie. Inauguró así los *criterios de convergencia*. En un trabajo posterior ([16]) amplió su resultado al caso de funciones no acotadas, con la condición añadida de que sean absolutamente integrables.

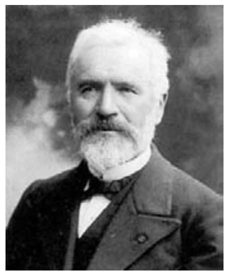

Figura 2: Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1802–1856) y Camille Jordan (1838–1922).

En 1881 Camille Jordan extendió el criterio de Dirichlet a las funciones de variación acotada ([33]). Probó que toda función de variación acotada se puede escribir como diferencia de dos funciones crecientes, por lo que se limitó a señalar que «la demostración de Dirichlet es aplicable, sin modificación». El concepto de función de variación acotada nació precisamente en ese trabajo de Jordan[8]. Indicó que «las funciones de oscilación limitada forman una clase bien definida, cuyo estudio podría presentar algún interés» y mostró algunas de sus propiedades. En particular, la posibilidad de que una función de variación acotada tenga una cantidad infinita de discontinuidades en cualquier intervalo, lo que le sirvió para mostrar que una posible condición necesaria y suficiente de integrabilidad que Dirichlet sugería al final de su artículo no era necesaria. Como es bien sabido, las funciones de variación acotada han tenido muchas otras aplicaciones en análisis matemático.

[8]Jordan usó en [33] el término *fonction à oscillation limitée*, en la primera edición de su *Cours d'Analyse* lo cambió por el de *fonction à variation limitée*, y en la segunda edición por el de *fonction à variation bornée*, que fue el adoptado finalmente.

Un criterio de convergencia sencillo de aplicar se debe a Rudolph Lipschitz[9]. Éste mostró en su tesis que si la función f satisface

$$|f(x+t) - f(x)| \leq C|t|^{\alpha}$$

para algún $\alpha > 0$ y todo t suficientemente pequeño, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$ en el punto x. Se reconoce inmediatamente que la condición sobre la función es lo que llamamos una condición de Lipschitz (aunque a veces este nombre se reserva para el caso $\alpha = 1$ y se llama condición de Hölder al caso general). Es fácil dar una prueba del resultado de Lipschitz utilizando la representación de Dirichlet y el lema de Riemann-Lebesgue (que mencionaremos en la siguiente sección). Pero la prueba original de Lipschitz no es tan sencilla; él no disponía del lema, debido al retraso en la publicación del trabajo de Riemann y, a cambio, su prueba pasaba por el criterio de Dirichlet.

Exactamente con los mismos medios —núcleo de Dirichlet y lema de Riemann-Lebesgue— se puede probar con facilidad el criterio de Dini, que engloba al de Lipschitz ([14, pág. 114]). Dice que si la función $|f(x+t) - f(x)|/t$ es integrable en un entorno de cero, la serie de Fourier de f converge a $f(x)$. Se pueden introducir variantes adecuadas, tanto en el criterio de Lipschitz como en el de Dini, para cubrir los casos en que la función no sea continua.

Figura 3: Rudolph Lipschitz (1832–1903) y Ulisse Dini (1845–1918).

Los criterios de Dirichlet-Jordan y de Lipschitz-Dini son los habituales en los libros. A veces se suelen presentar otros de principios del siglo XX, debidos a Lebesgue, de la Vallée-Poussin y Young. En [6, cap. III] aparecen todos ellos comparados entre sí; véanse también [31], [64] o [65].

[9]Curiosamente el artículo en que Lipschitz publicó sus resultados ([50]) está escrito en latín, lo que en 1864 ya no era habitual (el artículo anterior del mismo número de la revista también es de Lipschitz y está en alemán). En 1913 se publicó en *Acta Mathematica* una traducción al francés de Paul Montel.

4 . Riemann

Es casi imposible pasar por un tema importante de las matemáticas del siglo XIX sin mencionar a Riemann. Continuador de la obra de Dirichlet, Riemann presentó en 1855 su trabajo escrito de habilitación titulado *Sobre la representabilidad de una función en serie trigonométrica* ([56], un amplio extracto en castellano aparece en [24]) que, sin duda, es uno de los varios con los que su autor merece pasar a la historia de las matemáticas. No fue publicado hasta 1867, un año después de su muerte. En el trabajo se distinguen tres partes: comienza con un recorrido histórico, sigue con la generalización de la integral de Cauchy y finalmente se ocupa de las propiedades de las sumas de series trigonométricas. Un análisis de la memoria de Riemann se puede leer en [52].

La parte histórica es un excelente repaso a la situación del problema a lo largo de los cien años anteriores y la divide en tres secciones: de Euler a Fourier, de Fourier a Dirichlet y desde Dirichlet. Termina diciendo ([24, pág. 52]):

> La cuestión de la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica sólo ha sido resuelta hasta ahora bajo los dos supuestos de que la función admita integración en todo el recorrido, y que no posea infinitos máximos y mínimos. Si no se hace la última presuposición, entonces los dos teoremas integrales de Dirichlet son insuficientes para decidir la cuestión; mas si se suprime la primera, ya no es aplicable la propia determinación de los coeficientes de Fourier.

Un poco antes ha indicado que todas las funciones que intervienen en los fenómenos naturales caen bajo el teorema de Dirichlet pero que la extensión del concepto de integral merece la pena por dos motivos:

> En primer lugar, como Dirichlet mismo señala al final de su memoria, este asunto está en la más estrecha conexión con los principios del cálculo infinitesimal, y puede servir para traer dichos principios a una mayor claridad y precisión. En este sentido su consideración tiene un interés inmediato.
>
> Mas, en segundo lugar, la aplicabilidad de las series de Fourier no se limita a investigaciones físicas; hoy se han aplicado con éxito también a un campo de la matemática pura, la teoría de números, y aquí parecen ser de importancia precisamente aquellas funciones cuya representabilidad mediante series trigonométricas no ha investigado Dirichlet.

Descrita la necesidad de extender la noción de integral, a ello dedica la continuación de su memoria. Su integral modifica ligeramente la definición de Cauchy, pero a diferencia de éste, que sólo se ocupa de funciones continuas (a trozos), Riemann se interesa por el estudio de la clase máxima de funciones a las que se puede aplicar, las funciones integrables (*integrables Riemann* diríamos hoy). Fue capaz de dar una caracterización en términos de la oscilación y, con ello, de construir funciones integrables con un conjunto denso de discontinuidades.

En la parte final de la memoria aborda el estudio de las series trigonométricas. Al fijar los coeficientes de éstas por la fórmula de Fourier estamos dejando fuera la posibilidad de representar una función por otra serie trigonométrica que no sea la de Fourier. Riemann pretende recuperar esta posibilidad y busca propiedades de las sumas de series trigonométricas generales, es decir, condiciones necesarias para que una función sea representable.

> Para nuestros fines, el recorrido [de la función] sólo se debe someter a las condiciones necesarias para la representabilidad de la función; por ello, se deberían buscar, en primer lugar, condiciones necesarias para la representabilidad, y a continuación elegir entre ellas las suficientes para la representabilidad. Por tanto, mientras los trabajos anteriores mostraron que si una función tiene esta y aquella propiedad, entonces es representable mediante la serie de Fourier; nosotros deberemos partir de la pregunta inversa: si una función es representable mediante una serie trigonométrica, ¿qué se deduce de ello acerca de su recorrido, acerca de la variación de su valor al variar continuamente su argumento? ([24, pág. 58]).

Riemann observó que si los coeficientes de una serie trigonométrica tienden a cero, la serie integrada término a término dos veces es uniformemente convergente. Habría que derivar dos veces la función así obtenida para dar la suma de la serie y para ello introduce una especie de derivada generalizada. En realidad, estaba inventando un método de sumabilidad. Los teoremas de Riemann están en la base de los estudios de Cantor sobre la unicidad de series trigonométricas ([12]). Con respecto a las series de Fourier aparecen dos resultados importantes:

1. *Los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero* (lema de Riemann-Lebesgue).

2. *La convergencia o divergencia de la serie de Fourier en un punto sólo depende de los valores de la función en un entorno del punto* (principio de localización).

5 . Funciones continuas, convergencia uniforme y divergencia

Cauchy había escrito en su *Cours d'Analyse* que el límite de una sucesión de funciones continuas es una función continua (lo que implicaría de paso que sólo las funciones continuas son representables por series trigonométricas).

Figura 4: Bernhard Riemann (1826–1866) y Eduard Heine (1821–1881).

Ante la evidencia de que no era cierto, la necesidad de «corregirlo» condujo al concepto de convergencia uniforme. Parece que Weierstrass ya lo había tenido en cuenta desde 1842 y que lo había recogido de su maestro Gudermann; desde luego fue un concepto común en sus cursos de Berlín ([17] y [27, sec. 3.12]). Las primeras publicaciones en que aparece se deben a Seidel y Stokes y son de 1847.

En 1870 Heine publicó un trabajo ([30]) que comenzaba indicando cómo Weierstrass había demostrado que la convergencia uniforme permitía integrar término a término una serie de funciones, lo que sin esa condición podía ser falso. Por tanto, no estaba justificado que si una serie trigonométrica representaba a una función, sus coeficientes tuvieran que ser los dados por la fórmula de Fourier. Incluso, señalaba Heine, los criterios de convergencia sólo decían que la serie de Fourier convergía a la función, pero no que no pudiese haber otras series trigonométricas con la misma suma. Esto conduce inmediatamente a la cuestión de la unicidad: ¿pueden dos series trigonométricas distintas tener la misma suma? Cantor estudió este problema por influencia de Heine y sus investigaciones le condujeron al estudio de subconjuntos de la recta real con implicaciones en la futura teoría de conjuntos y en los conceptos topológicos. Un análisis de los trabajos de Cantor y sus implicaciones posteriores aparece en [12].

Otra cuestión sugerida por el planteamiento de Heine era la de determinar condiciones para la convergencia uniforme y a ello dedicó su artículo. Su teorema principal probaba que la serie de Fourier de una función continua con un número finito de máximos y mínimos (condiciones de Dirichlet) converge uniformemente[10]. Y señalaba que «todavía no se sabe si una serie que representa a una función continua tiene que converger uniformemente, lo que es implícitamente aceptado».

[10]Fatou hizo notar que toda condición de convergencia puntual se puede transformar en una condición de convergencia uniforme en un intervalo con los cambios adecuados ([49, pág. 62]).

A pesar de esa convicción general que Heine sugería, la sorpresa no tardó en llegar. En 1873, sólo tres años después de la publicación del artículo de Heine, Paul du Bois-Reymond anunció un contraejemplo ([7]) que mostraba que la serie de Fourier de una función continua puede ser divergente en un punto. No sólo no era uniformemente convergente, ni siquiera puntualmente. Una vez conocido el resultado fueron apareciendo otras construcciones para el contraejemplo, debidas a Schwarz, Lebesgue y Fejér. La de Lebesgue se puede ver en [49], la de Fejér de [22] se reproduce en [65]. Hoy es habitual presentar el resultado en forma no constructiva utilizando el principio de acotación uniforme, que aparecerá de nuevo en la sección 9.

Figura 5: Paul du Bois-Reymond (1831–1889) y Lipot Fejér (1880–1959).

6 . Fejér y la sumabilidad

Una solución al problema de representación de funciones continuas creado por el resultado de du Bois-Reymond vino de cambiar la manera de sumar la serie. En 1900, Fejér publicó un trabajo ([21]) en el que mostraba que la función continua se recupera siempre, y con convergencia uniforme, si antes de pasar al límite se toman los promedios de las sumas parciales. Es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_0f(x) + S_1f(x) + \cdots + S_Nf(x)}{N+1} = f(x) \quad \text{uniformemente},$$

si f es continua.

El resultado de Fejér permite recuperar una función a partir de sus coeficientes de Fourier. Pero también el método de las sumas de Poisson. Precisamente la «falsa prueba» de Poisson que mencionamos en la sección 3 intentaba ver que

$$\lim_{r\to 1-} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x). \tag{4}$$

Este resultado no valdría para probar la convergencia de la serie, como Poisson pretendía, pero sí como un método de recuperar la función a partir de sus coeficientes de Fourier. Y aunque la prueba de Poisson no fuese completa, sí lo era la que en 1872 había publicado H. A. Schwarz para funciones continuas en su trabajo sobre el problema de Dirichlet en un círculo ([61]). Podemos preguntarnos por qué se dio más importancia al resultado de Fejér. Una posible explicación que se ha avanzado es que el método de Poisson no utiliza la serie de Fourier, sino sus coeficientes, mientras que Fejér recupera la función a partir de las sumas parciales. Plancherel hace notar en [54] que el método de Fejér necesita un solo paso al límite y el de Poisson dos (precisamente el cambio de orden de estos dos pasos es crucial).

Al final de su artículo, Fejér indica que a partir de su teorema «se puede dar una teoría general y nueva de la integral de Poisson», que él no veía como sumabilidad de la serie de Fourier sino como solución del problema de Dirichlet. Puesto que Frobenius había probado que si s_k son las sumas parciales de la serie $\sum a_k$ se tiene

$$\lim_{r\to 1-}\sum_{k=1}^{\infty} r^k a_k = \lim_{N\to\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots+s_N}{N}, \tag{5}$$

siempre que el segundo miembro exista, esta aplicación al problema de Dirichlet pudo ser la causa del interés de Fejér en el estudio de las medias aritméticas; en su artículo, sin embargo, da la mayor relevancia al resultado para series de Fourier y la mención a la integral de Poisson queda reducida al comentario mencionado. Sobre el trabajo de Fejér y su importancia véase [34].

Las críticas de Cauchy y Abel habían dejado en mal lugar la manipulación de series divergentes, que de uno u otro modo existía desde el siglo XVII. En la última parte del siglo XIX ya hay intentos serios de formalizar métodos de sumabilidad y en 1901 encontramos uno de los grandes libros sobre el tema, *Leçons sur les séries divergentes* de E. Borel. El resultado de Fejér vino a reforzar el interés por las series divergentes, ya que ahora había algo con lo que comparar la suma asignada, la función original. En el artículo [63] se presenta el desarrollo histórico de la teoría de series divergentes y se incluye la prueba original de Frobenius de (5).

7. El problema renace

Aparentemente el siglo XIX se cerraba con respuestas satisfactorias para las series de Fourier. Se tenían varios criterios de convergencia, se sabía que las funciones continuas podían tener series de Fourier divergentes, se recuperaba la función original si se utilizaban métodos de sumabilidad para la serie. En 1924 Michel Plancherel escribió un informe sobre el desarrollo de la teoría de las series trigonométricas durante el último cuarto de siglo, es decir, el primer cuarto del siglo XX ([54]). Inmediatamente se observa que, lejos de haberse terminado, el problema siguió siendo un campo de gran actividad: el artículo de Plancherel trae más de 200 referencias, casi todas posteriores a

1900. Las razones —cualquiera que conozca la historia del análisis matemático las intuye— fueron el nacimiento de la teoría de la medida e integración de Lebesgue y del análisis funcional.

La tesis de Lebesgue con la que nace su teoría de integración apareció en 1902. La nueva teoría trajo más funciones integrables, pero no sólo eso: la identificación de funciones que coinciden en casi todo punto sugiere una nueva manera de comparar la suma de la serie y la función de partida, podrían no coincidir en todos los puntos pero de modo que la discrepancia sea sólo en un conjunto «pequeño», es decir, de medida nula. Pregunta que se abría incluso para funciones continuas.

El propio Lebesgue estudió las series de Fourier con la nueva herramienta. En un trabajo de 1903 ([48]) escribió: «voy a aplicar la noción de integral al estudio del desarrollo trigonométrico de las funciones no integrables en el sentido de Riemann». Además de extender resultados previos al nuevo contexto, dio un ejemplo de función integrable con su definición, pero no con la de Riemann, que tenía serie de Fourier convergente. Durante el curso 1904-05 impartió un curso sobre series trigonométricas en el Collège de France, del que surgió su libro *Leçons sur les séries trigonométriques* ([49]) publicado en 1906.

Algunos de los resultados de Lebesgue son los siguientes:

1. *Los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero* (lema de Riemann-Lebesgue).

2. *Si una serie trigonométrica converge a una función integrable acotada, es la serie de Fourier de su suma.*

3. *Si f es integrable, los promedios de las sumas parciales de su serie de Fourier convergen a f en casi todo punto.*

4. *La serie que resulta al integrar término a término una serie de Fourier siempre es convergente y su suma es una primitiva de la función original.*

Una vez probado el lema de Riemann-Lebesgue, tanto el principio de localización como el criterio de convergencia de Dini, por ejemplo, se extienden inmediatamente a la nueva clase de funciones integrables. El resultado de sumabilidad nos dice que siempre se recupera la función de partida (en casi todo punto, como no podía ser de otra manera) con el método de Fejér. El resultado de integración término a término junto con el teorema de derivación de integrales del propio Lebesgue tiene como consecuencia un método para recuperar la función original a partir de sus coeficientes de Fourier; en efecto, en casi todo punto se cumple

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k}.$$

Fatou observó que hay series trigonométricas convergentes que no son series de Fourier (la suma no es integrable en el sentido de Lebesgue), por ejemplo,

$\sum_k \sin kx/\log k$ ([49, pág. 124]). Si fuese una serie de Fourier, al integrarla término a término y evaluar en $x = 0$ deduciríamos que $\sum_k 1/(k \log k)$ es convergente, lo que es falso.

 

Figura 6: Henry Lebesgue (1875–1941) y Frygies Riesz (1880–1956).

8 . Sistemas ortogonales y teoría L^2

En los primeros años del siglo XX se desarrollaron los conceptos que condujeron a la teoría de los espacios de Hilbert, nombre popularizado años después. Partiendo de trabajos previos sobre ecuaciones integrales de Volterra, Fredholm y otros, D. Hilbert y su alumno E. Schmidt se encontraron con valores propios y funciones propias, propiedades de ortogonalidad, sistemas lineales de infinitas ecuaciones, etc., y desarrollaron los conceptos asociados a los espacios de sucesiones l^2. Junto con las ideas que Fréchet esbozaba en su tesis de 1906 sobre espacios métricos, Riesz elaboró la noción de distancia en los espacios de funciones L^2 y poco después llegaron los teoremas que permitían la identificación de funciones de cuadrado integrable con sucesiones de l^2.

Fatou demostró en [20] que la igualdad de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

se cumple sin más hipótesis que $f \in L^2$. Para entonces ya se conocía en condiciones más restrictivas sobre la función (ver referencias en [37, pág. 100]) y debe su nombre a un resultado de Parseval de 1799, publicado en 1806 –anterior, por tanto, a la primera memoria de Fourier–, en que se probaba de manera formal.

El resultado recíproco, que completó el panorama, es debido independientemente a Frigyes Riesz y a Ernst Fischer en sendas notas en los *Comptes Rendus* de 1907 ([57], [25]). Ambos lo enuncian para sistemas ortogonales de funciones, no exclusivamente para el sistema trigonométrico. Por ejemplo, la versión de Fischer es (adaptando algo los términos): *sea $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ un conjunto numerable de funciones de $L^2(a,b)$, que forma un sistema ortonormal. Si la serie de términos constantes no negativos $a_1^2 + a_2^2 + \cdots$ converge, $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots$ convergerá en media cuadrática a una función φ definida en casi todo punto y tal que $a_k = \int_a^b \varphi\varphi_k$.*

Fischer prueba primero la completitud de L^2: las sucesiones de Cauchy convergen en la norma de L^2. Una vez probado esto, puesto que de las hipótesis sobre $\{a_k\}$ y $\{\varphi_k\}$ se deduce inmediatamente que las sumas parciales de $\sum_k a_k\varphi_k$ forman una sucesión de Cauchy, se obtiene su resultado. La prueba de Riesz comienza con el sistema trigonométrico y extiende después el resultado a una familia ortonormal cualquiera a través de un sistema lineal de infinitas ecuaciones. Una consecuencia inmediata del teorema de Riesz-Fischer es la convergencia en norma cuadrática de la serie de Fourier: $\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_2 = 0$.

La identificación del espacio de funciones L^2 con el de sucesiones l^2 fue un resultado clave en la construcción de la teoría de los espacios de Hilbert. Años después Riesz señaló como uno de los grandes éxitos de la integral de Lebesgue el hecho de que L^2 se construya sobre ella. El sistema trigonométrico se convirtió en un ejemplo modelo de base ortogonal y las series de Fourier de funciones de L^2 resultaron ser desarrollos en esa base ortogonal.

9. Convergencia en L^p

La convergencia en L^2 de la serie de Fourier sugería el estudio del problema análogo en los espacios L^p: ¿es $\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_p = 0$ para $f \in L^p$ si p es distinto de 2? Para p finito, por supuesto, ya que si $p = \infty$ la convergencia sería uniforme y el límite debería ser una función continua (y ya sabemos que ni siquiera eso es suficiente).

La primera respuesta vino en sentido negativo: Banach y Steinhaus probaron en 1918 que no hay convergencia en media, es decir, en L^1 ([4]). Los nombres de los autores evocan el principio de acotación uniforme, que ciertamente está relacionado con su resultado. Pero en su forma abstracta el principio de acotación uniforme apareció por primera vez unos años más tarde ([5]), y en ese artículo Banach y Steinhaus mencionan la no convergencia en la norma de L^1 como una de sus aplicaciones.

Fue Marcel Riesz[11] quien consiguió demostrar en 1923 que la respuesta a la convergencia en norma es afirmativa si $1 < p < \infty$. Se suele citar a menudo la fecha de 1927, que corresponde a su artículo [59], pero ya antes había anunciado el resultado en [58], una nota publicada en los *Comptes Rendus* de 1924. Riesz no trabajó directamente con las sumas parciales, sino con la función conjugada,

[11]Marcel Riesz, hermano menor de Frigyes Riesz, nació en Hungría en 1886 y allí realizó su tesis doctoral. A instancias de Mittag-Leffler se trasladó a Suecia en 1911 donde fue profesor en Estocolmo y Lund hasta su retiro. Así que tanto la convergencia en norma como la puntual de series de Fourier acabaron siendo «productos suecos».

concepto que proviene del análisis complejo a través de la armónica conjugada de la solución del problema de Dirichlet en el círculo. Para una función f cuya serie trigonométrica viene dada por (1), su función conjugada, $\tilde{f}$, es la que tiene como serie asociada

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-b_k \cos kx + a_k \sin kx).$$

Está claro por los resultados mencionados en la sección anterior que si f está en L^2, también lo está $\tilde{f}$ y recíprocamente. Riesz probó que lo mismo ocurre en L^p si $1 < p < \infty$.

Es interesante leer la correspondencia que mantuvo con Hardy a propósito de este resultado ([11]). En junio de 1923 Riesz comunicó a Hardy que había demostrado que «dos series trigonométricas conjugadas son siempre simultáneamente series de Fourier de funciones de la clase L^p $(p > 1)$». Inmediatamente Hardy contestó diciendo que estaba muy interesado en el resultado y quería ver la prueba. Varios meses después Hardy, que no había recibido la prueba de Riesz, insistió con un imperativo «I want the proof», al que seguía una explicación: «Tanto yo como mi alumno Titchsmarsh hemos intentado en vano probarlo. (...) Ya no merece la pena si usted lo ha conseguido. Pero como T. está ocupado en las cuestiones correspondientes sobre integrales, es vital para él tener la prueba de este teorema tan fundamental».

Por fin, en diciembre de 1923, Riesz escribió todos los detalles de la prueba en una carta a Hardy. La prueba se divide en tres partes: (i) si el exponente es par; (ii) si el exponente no es entero; (iii) si el exponente es impar. Usaba como propiedad básica que las potencias de una función analítica son analíticas, aunque tuvo que cuidar los detalles de esa definición para exponentes no enteros. Para exponentes impares se veía obligado a aplicar un argumento de dualidad, que también explicaba en detalle. La respuesta de Hardy muestra su sorpresa: «muy elegante y hermoso. (...) Es sorprendente que ninguno de nosotros lo haya visto antes (¡ni siquiera para $p = 4$!)». La sencilla prueba de Riesz para el caso $p = 4$ es así: sea u armónica en el disco unidad y sea v su armónica conjugada tal que $v(0) = 0$. De la fórmula de Cauchy aplicada a la función analítica $(u + iv)^4$ en $|z| = r$ $(r < 1)$ se deduce

$$\int_0^{2\pi} (u(re^{it}) + iv(re^{it}))^4 dt = 2\pi u(0)^4 \leq \int_0^{2\pi} u(re^{it})^4 dt.$$

(En el último paso se usa la propiedad de la media de las funciones armónicas y la desigualdad de Hölder.) Considerando la parte real del miembro de la izquierda se sigue fácilmente que $\|v\|_4 \leq C\|u\|_4$ sobre cada circunferencia de radio r centrada en el origen (con C independiente de r). Basta tomar el límite cuando r tiende a 1 para obtener el teorema. El mismo procedimiento vale para los demás exponentes pares.

La prueba que Riesz envió a Hardy es la misma que apareció publicada en [59] y esbozada en [58]. La convergencia en norma L^p de la serie de Fourier aparece como aplicación del resultado para la función conjugada.

Meses antes, cuando aún no le había enviado los detalles, Riesz le había escrito a Hardy: «es enormemente curioso que mientras mi demostración es por así decirlo trivial para los exponentes pares, para los exponentes impares no tengo por el momento más que una demostración indirecta pasando por los exponentes no enteros». Hoy sabemos que hecho el caso de exponentes pares, el más sencillo, se puede utilizar interpolación para completar los exponentes $p > 2$ y dualidad para $1 < p < 2$. Si Riesz no siguió ese camino fue porque no tenía aún teorema de interpolación. Quizá motivado por su interés en hacer más sencilla la demostración de su teorema, el propio Riesz demostró el primer teorema de interpolación[12] ([60]) y lo aplicó a la función conjugada en la manera indicada. Hoy día la parte de la demostración original de Riesz que trata de los exponentes no enteros ha caído en el olvido.


Figura 7: Marcel Riesz (1886–1969) y Andrei Kolmogorov (1903–1987).

Entre las dos publicaciones de Marcel Riesz apareció un artículo de Kolmogorov ([41]) en el que probaba una desigualdad débil para la función conjugada de una función de L^1:

$$\sup_{t>0} t|\{x : |\tilde{f}(x)| > t\}| \leq C\|f\|_1.$$

De aquí se deduce que la sucesión $\{S_N f(x)\}$ de sumas parciales de una función f integrable converge en L^p para $0 < p < 1$. La desigualdad débil junto con un teorema de interpolación de Marcinkiewicz, de finales de los años treinta, también permite deducir el teorema de Marcel Riesz.

[12]Este teorema es parte de lo que hoy llamamos *teorema de Riesz-Thorin*. Olof Thorin, alumno de Riesz, introdujo las propiedades de las funciones analíticas en la prueba y extendió el teorema original en 1939.

10 . Convergencia en casi todo punto

Nikolai Lusin publicó en 1913 una nota en los *Comptes Rendus* en la que presentaba una condición necesaria y suficiente para la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función de L^2 ([51]). Lusin comenzó viendo que la serie de Fourier de f converge en casi todo punto si y sólo si se cumplen simultáneamente:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)}{2\tan t/2}\,dt = f(x) \quad \text{c.t.p.} \tag{6}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\tilde{f}(x+t)-\tilde{f}(x-t)}{t}\cos nt\,dt = 0, \tag{7}$$

donde $\tilde{f}$ es la función conjugada de f. (Las integrales en cero se entienden como valor principal.) Probó que (6) se cumple para toda función de L^2, de modo que (7) quedaba como única condición necesaria y suficiente. Dice Plancherel ([54]): «pero esta condición no es simple e ignoramos si la serie de Fourier de una función continua o de una función de cuadrado integrable tiene necesariamente puntos de convergencia y si su conjunto es de medida positiva». Ahora bien, satisfecha la condición (6) Lusin indica que es «infinitamente probable» que lo mismo ocurra con (7). Su argumento se basa en que la existencia de la integral en (6) es debida a la cancelación y no al tamaño, y que como $\cos nt$ tiene sus valores positivos y negativos uniformemente distribuidos, la cancelación debería seguir aplicándose por igual. Ahí nace la *conjetura de Lusin*: *la serie de Fourier de una función de L^2 converge en casi todo punto*.

Lusin presentó su tesis en 1915 y fue nombrado profesor de la universidad de Moscú. Allí, junto con su maestro Egorov, encabezó un extraordinario grupo de investigación —que los estudiantes llamaban *Luzitania*— al que pertenecieron Aleksandrov, Suslin, Menshov, Khinchine, Urysohn, Kolmogorov, Nina Bari, Lyusternik, Shnirelman y Novikov, entre otros. La tesis de Lusin, *Integración y series trigonométricas*, incluía una larga colección de problemas abiertos que fue una inagotable fuente de trabajo para su escuela. Los resultados más importantes sobre convergencia y divergencia puntual anteriores al teorema de Carleson aparecen en los primeros trabajos del joven Kolmogorov, uno de los más destacados matemáticos del siglo XX y alumno de Lusin ([53]).

Kolmogorov demostró en 1923 que existe una función integrable cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto ([39]) y poco después, en 1926, fue capaz de llevar la divergencia a todo punto ([42]). Además obtuvo dos resultados de convergencia:

- en 1924 demostró la convergencia lagunar para funciones de cuadrado integrable: *si $n_{k+1}/n_k > \lambda > 1$ y $f \in L^2$, entonces la sucesión $\{S_{n_k}f(x)\}$ converge a $f(x)$ en casi todo punto* ([40]);

- en 1926 dio con Seliverstov ([43]) la siguiente condición suficiente para la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\log n < +\infty.$$

Esta condición, obtenida independientemente por Plessner ([55]), permaneció como mejor resultado conocido durante cuarenta años.

Sin embargo, la conjetura de Lusin permanecía sin respuesta y el tiempo hizo cambiar de opinión a los expertos en cuanto a su veracidad. La primera monografía de Zygmund sobre series trigonométricas ([64], 1935) ni siquiera menciona la conjetura de Lusin. Pero más significativa es la manera en que presenta el problema en su segundo libro ([65], 1959). Primero dice en el prefacio que «el problema de la existencia de una función continua con serie de Fourier divergente en todo punto está todavía abierto». Luego leemos en el texto (vol. 2, pág. 164):

> Es concebible que la estimación $S_N f = o((\log n)^{1/2})$ sea óptima. Ésta es una conjetura muy fuerte, porque implica en particular la existencia de una $f \in L^2$ con serie de Fourier divergente en casi todo punto. El problema está abierto.

Más adelante trae el siguiente comentario (vol. 2, pág. 165):

> El teorema que sigue arroja alguna luz sobre el problema todavía no resuelto de la existencia de una función de L^2 con serie de Fourier divergente en casi todo punto

Claramente se ve que Zygmund no está sugiriendo la conjetura de Lusin, sino su negación. «El teorema que sigue» se refiere a la siguiente observación de Calderón, que fue importante en la resolución del problema: *si $S_N f(x)$ converge a $f(x)$ en casi todo punto para funciones de L^2, entonces*

$$\sup_{t>0} t^2 |\{x : \sup_N |S_N f(x)| > t\}| \leq C\|f\|_2^2. \tag{8}$$

La otra gran monografía sobre series trigonométricas fue escrita por Nina Bari, alumna de Lusin, y publicada en 1961 (en ruso, [6] es la edición inglesa de 1964). En el capítulo VIII presenta el resultado de Lusin y explica los argumentos en que Lusin basó su conjetura. Después añade:

> La hipótesis de Lusin no ha sido ni confirmada ni refutada, aunque ya han pasado cuarenta años desde que fue propuesta. Sin embargo, los argumentos que condujeron a ella no tienen ninguna fuerza hoy día.

Se basa en que con argumentos semejantes se llegaría a concluir que si f y $\tilde{f}$ están en L^1, la serie de Fourier convergería en casi todo punto, lo que se sabe que no ocurre. Por tanto, indica, para probar (7) el hecho de que f está en L^2 debe usarse en forma esencial, no sólo la existencia en casi todo punto de la integral en (6).

Figura 8: Nikolai Lusin (1883–1950) y Lennart Carleson (1928).

Ante esta situación el resultado que Lennart Carleson obtuvo en 1965 fue una auténtica sorpresa. En efecto, probó que la conjetura de Lusin era cierta: la serie de Fourier de una función de L^2 converge en casi todo punto. Por tanto, también la de una función continua[13], lo que tampoco se conocía hasta entonces. Su prueba consistió precisamente en probar que (8) se cumplía ([9]). El propio Carleson ha contado más de una vez que comenzó buscando un contraejemplo y terminó produciendo una prueba. He aquí sus palabras tomadas de [19]:

> La gran autoridad en esos días era Zygmund y él estaba completamente convencido de que lo que uno tenía que obtener no era una prueba sino un contraejemplo. Cuando yo era un joven estudiante en Estados Unidos, tenía una idea de cómo producir unas funciones muy complicadas para un contraejemplo, encontré a Zygmund y él me animó a hacerlo. Estuve pensando durante unos quince años por aquí y por allá sobre cómo hacer que esos contraejemplos funcionasen, y la cosa interesante que sucedió fue que me di cuenta por qué debía haber un contraejemplo y cómo había que construirlo. Pensé que ya había comprendido cuál era la base y entonces para mi sorpresa pude probar que ese contraejemplo «correcto» no podía existir, y me di cuenta de repente de que había que intentar lo contrario, había que intentar probar lo que no estaba de moda, es decir, probar la convergencia. El aspecto

[13]Este resultado para funciones continuas se completa con el siguiente de Kahane y Katznelson: *dado un conjunto cualquiera de medida nula, existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en ese conjunto* [36].

> más importante al resolver un problema matemático es la convicción de cuál es el resultado verdadero. Entonces me llevó dos o tres años, usando las técnicas que habían sido desarrolladas en los veinte años anteriores.

El premio Abel 2006 fue otorgado a Lennart Carleson. El jurado destacó varios de sus resultados, pero indudablemente el nombre de Carleson va unido sobre todo al teorema de convergencia en casi todo punto de las funciones de L^2.

Poco después Richard Hunt extendió el resultado de Carleson hasta cubrir el rango de todos los espacios L^p con $p > 1$ ([32]).

11 . Los años recientes

El teorema de Carleson con la extensión por Hunt supuso la culminación de un camino que había empezado siglo y medio antes. En cierto modo, las grandes cuestiones sobre la convergencia de las series de Fourier quedaban resueltas.

La prueba de Carleson, además de la sorpresa que hemos mencionado, también trajo consigo una fama de impenetrabilidad. Se decía que era difícil de entender. Pero una vez sabido cuál es el resultado verdadero, es más fácil intentar otras pruebas. Pronto llegó una segunda debida a Charles Fefferman ([23]), distinta en los métodos, pero no por eso más sencilla. Durante mucho tiempo el resultado estaba ahí, pero no parecía que las pruebas hubiesen abierto nuevos caminos. Se escribieron libros con detalles de la demostración, como el de J. Arias de Reyna ([3]) que pretende explicar la motivación de cada paso de la prueba de Carleson. M. Lacey y C. Thiele resolvieron una conjetura sobre la transformada de Hilbert bilineal basándose en parte en los métodos de la prueba de Fefferman, lo que a su vez les permitió escribir su propia prueba del teorema de Carleson ([47]; una versión más detallada con información adicional es [46]). Estas pruebas de Lacey y Thiele están escritas para la transformada de Fourier en la recta real, aunque se pueden transferir a series de Fourier.

Una de los problemas en que se ha trabajado tras el teorema de Carleson-Hunt es en ir llenando el hueco que queda entre L^1, donde hay series de Fourier divergentes, y la unión de los espacios L^p, $p > 1$, donde las series de Fourier convergen en casi todo punto. Si consideramos un escala de espacios en la que se introducen logaritmos, los mejores resultados actuales provienen de la escuela rusa. Sea $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ no decreciente y escribamos $f \in \phi(L)$ si $\int \phi(|f(t)|)dt < +\infty$. Tenemos los resultados siguientes:

1. sea $\log^+ t = \log \max(t, 1)$ y $\phi(t) = t \log^+ t \log^+ \log^+ \log^+ t$; si $f \in \phi(L)$, la serie de Fourier de f converge en casi todo punto (Antonov, [2]));
2. si $\phi(t) = o(t\sqrt{\log t/ \log\log t})$ cuando t tiende a infinito, existe f en $\phi(L)$ con serie de Fourier divergente en todo punto (Konyagin, [44]).

Fuera de la escala mencionada, Arias de Reyna construyó un espacio invariante por reordenamiento, que contiene la clase de Antonov y para el que se tiene la convergencia en casi todo punto ([3]). Para otros resultados y problemas relacionados véase [45].

Por otra parte, mucho queda por hacer en dimensiones superiores. Tanto que intentar una descripción de resultados y problemas alargaría demasiado este artículo. En [1] se puede encontrar un recorrido por la situación del problema hasta finales de los años ochenta y en [18] un resumen de resultados y problemas abiertos.

Referencias

[1] Sh. A. Alimov, R. R. Ashurov y A. K. Pulatov, *Multiple Fourier series and Fourier integrals* en V. P. Khavin y N. K. Nikolskii (eds.), *Commutative Harmonic Analysis IV, Enc. Math. Sci., 42*, Springer, 1992, 1–95.

[2] N. Yu. Antonov, Convergence of Fourier series, *East J. Approx.* **2** (1996), 187–196.

[3] J. Arias de Reyna, *Pointwise convergence of Fourier series*, Lecture Notes in Mathematics, 1785, Springer-Verlag, Berlín, 2002.

[4] S. Banach y H. Steinhaus, Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier, *Bulletin Int. Acad. Sciences de Cracovie* (1918), 87–96.

[5] S. Banach y H. Steinhaus, Sur le principle de la condensation de singularités, *Fund. Math.* **9** (1927), 50–61.

[6] N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series. Vols. I, II*, Pergamon Press, Macmillan, New York, 1964.

[7] P. du Bois-Reymond, Ueber die Fourierschen Reihen, *Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen* **21** (1873), 571-582.

[8] A. Cañada, Fourier y sus coeficientes, *Boletín de la SEMA* **36** (2006), 125–148.

[9] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.* **116** (1966), 135–157.

[10] H. S. Carslaw, *An introduction to the theory of Fourier's series and integrals*, tercera edición, Macmillan, 1930 (reeditado en Dover Publications, New York, 1950).

[11] M. L. Cartwright, Manuscripts of Hardy, Littlewood, Marcel Riesz and Titchmarsh, *Bull. London Math. Soc.* **14** (1982), 472–532.

[12] R. Cooke, Uniqueness of trigonometric series and descriptive set theory, 1870-1985, *Arch. History Exact Sci.* **45** (1993), 281–334.

[13] J. Dhombres y J.-B. Robert, *Fourier. Créateur de la physique-mathématique*, Belin, París, 1998.

[14] U. Dini, *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, Tipografia T. Nistri, Pisa, 1880.

[15] G. L. Dirichlet, Sur la convergence des series trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *J. Reine Angew. Math.* **4** (1829), 157–169.

[16] G. L. Dirichlet, Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen, *Repertorium der Physik* **1** (1837), 152–174.

[17] P. Dugac, Éléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Arch. History Exact Sci.* **10** (1973), 41–176.

[18] M. I. Dyachenko, *Convergence of multiple Fourier series: main results and unsolved problems* en *Fourier Analysis and related topics*, Banach Center Publ. 56, Warsaw, 2002, 37–44.

[19] B. Engquist, *After the 'Golden Age': what next?*, Lennart Carleson entrevistado por Björn Enquist en B. Engquist y W. Schmid (eds.), *Mathematics unlimited - 2001 and beyond*, Springer, Berlín, 2001, 455–461.

[20] P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.* **30** (1906), 335–400.

[21] L. Fejér, Sur les fonctions bornées et intégrables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **131** (1900), 984–987.

[22] L. Fejér, Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **28** (1911), 63–104.

[23] C. Fefferman, Pointwise convergence of Fourier series, *Ann. of Math.* **98** (1973), 551–571.

[24] J. Ferreirós (ed.), *Bernhard Riemann: Riemanniana selecta*, CSIC, Madrid, 2000.

[25] E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris* **144** (1907), 1022–1024.

[26] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, edición facsímil en Éditions Jacques Gabay, Paris, 1988.

[27] I. Grattan-Guinness, *The emergence of mathematical analysis and its foundational progress, 1780-1880* en I. Grattan-Guinness (ed.), *From the Calculus to Set Theory 1630-1910: An Introductory History*, Duckworth, Londres, 1980 (en castellano, *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: una introducción histórica*, Alianza editorial, Madrid, 1984).

[28] I. Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, Théorie analytique de la chaleur (1822)* en I. Grattan-Guinness, R. Cooke, L. Corry, P. Crépel y N. Guicciardini (eds.), *Landmarks Writings in Western Mathematics*, Elsevier, Amsterdam, 2005, 354–365.

[29] I. Grattan-Guinness y J. R. Ravetz, *Joseph Fourier 1768-1830. A survey of his life and work*, MIT Press, Cambridge, 1972.

[30] E. Heine, Über trigonometrische Reihen, *J. Reine Angew. Math.* **71** (1870), 353–365.

[31] E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Vol. II*, Cambridge University Press, 1926 (reeditado en Dover Publications, New York, 1958).

[32] R. A. Hunt, *On the convergence of Fourier series* en *Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues* (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, 1968, 235–255.

[33] C. Jordan, Sur la série de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **92** (1881), 228–230.

[34] J. P. Kahane, Leopold Fejér et l'analyse mathématique au début du XXe siècle, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* **2** (1981), 67–84.

[35] J. P. Kahane, *Le retour de Fourier*, Académie des Sciences, Paris, 2005 (`http://www.academie-sciences.fr/membres/in_memoriam/Generalites/Fourier_Kahane.pdf`). Traducción al castellano en este número de La Gaceta.

[36] J. P. Kahane y Y. Katznelson, Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques, *Studia Math.* **26** (1966), 305–306.

[37] J. P. Kahane y P. G. Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach, Londres, 1995.

[38] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972 (en castellano, *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días*, Alianza, Madrid, 1992).

[39] A. N. Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout, *Fund. Math.* **6** (1923), 324–328.

[40] A. N. Kolmogorov, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fund. Math.* **5** (1924), 96–97.

[41] A. N. Kolmogorov, Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, *Fund. Math.* **7** (1925), 24–29.

[42] A. N. Kolmogorov, Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout, *C. R. Acad. Sci. Paris* **183** (1926), 1327–1328.

[43] A. N. Kolmogorov y G. A. Seliverstov, Sur la convergence des séries de Fourier, *Atti Accad. Naz. Lincei* **3** (1926), 307–310.

[44] S. V. Konyagin, On divergence of trigonometric Fourier series everywhere, *C. R. Acad. Sci. Paris* **329** (1999), 693–697.

[45] S. V. Konyagin, *Almost everywhere convergence and divergence of Fourier series* en M. Sanz-Solé, J. Soria, J.L. Varona, J. Verdera *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006*, vol. II, European Mathematical Society, 1393–1403.

[46] M. T. Lacey, Carleson's theorem: proof, complements, variations, *Publ. Mat.* **48** (2004), 251–307.

[47] M. T. Lacey y C. M. Thiele, A proof of boundedness of the Carleson operator, *Math. Res. Lett.* **7** (2000), 361–370.

[48] H. Lebesgue, Sur les séries trigonométriques, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **20** (1903), 453–485.

[49] H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques. Professées au Collège de France, 1904–05*, facsímil en Albert Blanchard, Paris, 1975.

[50] R. Lipschitz, De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et pr ecipe earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum habent infinitum, disquisitio, *J. Reine Angew. Math.* **63** (1864), 296–308 (en francés, *Acta Math.* **36** (1913), 281–295).

[51] N. Lusin, Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **156** (1913), 1655–1658.

[52] D. Mascré, *Bernhard Riemann, posthumous thesis on the representation of functions by trigonometric series (1867)* en I. Grattan-Guinness, R. Cooke, L. Corry, P. Crépel y N. Guicciardini (eds.), *Landmarks Writings in Western Mathematics*, Elsevier, Amsterdam, 2005, 491–505.

[53] A. Olevskii, *Kolmogorov's theorems in Fourier analysis* en J. Lindenstrauss y V. Milman (eds.), *Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994)*, Birkhäuser, Basel, 1995, 199–218.

[54] M. Plancherel, Le développement de la théorie des séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle, *Enseignement Math.* **24** (1924-25), 19–58.

[55] A. I. Plessner, Ueber Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *J. Reine Angew. Math.* **155** (1925), 15–25.

[56] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Habilitationsschrift, 1854)*, Abhandlungen der Kšniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gšttingen, 13 (1868). Reproducido en B. Riemann, *Gesammelte mathematische werke*, Springer-Verlag, Berlín, 1990. Traducción parcial al castellano en [24], 41–60.

[57] F. Riesz, Sur les systèmes orthonormaux de fonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris* **144** (1907), 615–619.

[58] M. Riesz, Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **178** (1924), 1464–1467.

[59] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguées, *Math. Z.* **27** (1927), 218-244.

[60] M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.* **49** (1926), 465–497.

[61] H. A. Schwarz, Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, *J. Reine Angew. Math.* **74** (1872), 218–253.

[62] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*, Academic Press, New York, 1949.

[63] J. Tucciarone, The development of the theory of summable divergent series from 1880 to 1925, *Arch. History Exact Sci.* **10** (1973), 1–40.

[64] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, Monografije matematyczne V, Warszawa–Lwow, 1935.

[65] A. Zygmund, *Trigonometric series. Vol. I, II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1959 (última reedición en 2002).

Javier Duoandikoetxea
Departamento de Matemáticas
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
Apartado 644, 48080 Bilbao
Correo electrónico: javier.duoandikoetxea@ehu.es