cuevas. El carácter nocturno de esta rapaz ha imposibilitado realizar estimaciones cuantitativas de su población

• EL QUIJOTE Y LAS MATEMÁTICAS (XV)

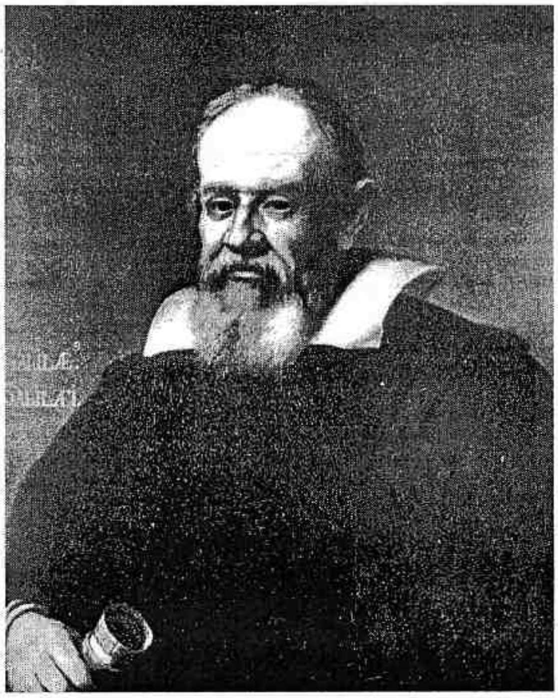
25

La paradoja planteada a Sancho en la Ínsula Barataria y otras paradojas

LUIS BALBUENA CASTELLANO

En el tiempo que Sancho fue gobernador de la Ínsula Barataria tuvo que resolver interesantes situaciones y pleitos que le planteaban sus "súbditos" para que él hiciera justicia. Y asombró a todos con las atinadas decisiones y los juiciosos veredictos que adoptaba. Una de las situaciones más conocidas, al menos entre los matemáticos, es la planteada en la paradoja que le exponen para que "resuelva" y que reproduzco a continuación entresacando del texto solo los párrafos que plantean y "resuelven" la paradoja:

Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (y esté vuestra merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso). Digo, pues, que sobre este río estaba una puente, y al cabo della, una horca y una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma: "Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna". ... Sucedió, pues, que, tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento y dijeron: "Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre. ...él tiene la misma razón para morir que para vivir y pasar la puente; porque si la verdad le salva, la mentira le condena igualmente; y, siendo esto así, como lo es, soy de parecer que digáis a esos señores que a mí os enviaron que, pues están en un fil las razones de condenarle o asolverle, que le dejen pasar libremente, pues siempre es alabado más el hacer bien que mal", y esto lo diera firmado de mi nombre, si supiera firmar; y yo en este caso no he hablado de mío, sino que se me vino a la memoria un precepto, entre otros muchos que me dio mi amo don Quijote la noche antes que viniese a ser gobernador desta ínsula: que fue que, cuando la justicia estuviese en duda, me decantase y acogiese a la misericordia; y ha querido Dios que agora se me acordase, por venir en este caso como de molde.



GALILEO GALILEI

Vemos que Sancho resuelve la situación acudiendo a un consejo dado por don Quijote que, obviamente, no "resuelve" la situación porque eso es imposible. El consejo no es otro que un principio jurídico que dice *in dubio pro reo*.

Aprovecharé la oportunidad que me concede el bueno de Sancho para hacer una breve incursión por el mundo de las paradojas. Si lo desconoce le aconsejo que siga y no se acobarde cuando crea que algo se le escapa. Continúe y verá que nuestra mente tiene una tremenda potencia, que a lo mejor desconoce.

Las paradojas han fascinado a la humanidad desde muy antiguo. El término, que procede del griego (para y doxos), significa "más allá de lo creíble". En ellas se plantea una situación de aparente coherencia pero que contiene contradicciones. Algunas son simples juegos de palabras (paradojas semánticas) pero otras poseen una profunda carga intelectual que incluso han llegado a abrir campos de investigación o han dado fundamento a enrevesadas ideas, como la del infinito. Obsérvense estas dos paradojas:

I. ¿Puede un ser omnipotente construir una fortaleza indestructible? La contradicción es evidente. Si el ser es omnipotente, ¿puede o no destruir esa fortaleza?

II. Zenón de Elea, alrededor del año 445 a.C., propuso unas paradojas que planteaban serias controversias entre los griegos sobre las concepciones que tenían acerca de lo continuo y lo discreto o del espacio y el tiempo. Una de las paradojas es la conocida como de *Aquiles y la tortuga*. Se puede plantear de la siguiente manera: ambos deciden competir en una carrera y acuerdan que el veloz Aquiles le de una ventaja a la lenta tortuga. En la paradoja, esa fue la perdición de Aquiles pues nunca la alcanzará. En efecto, cuando Aquiles decide ponerse en marcha, la tortuga lleva un espacio recorrido por delante de él y para alcanzarla, deberá llegar primero al punto en el que estaba la tortuga en el momento en que decide lanzarse a alcanzarla. Pero cuando llegue a ese punto, la tortuga habrá avanzado otro trozo que tendrá que ser cubierto por Aquiles antes de alcanzarla y así tendrá que estar por siempre el héroe griego: tratando de llegar al punto que abandonó un poco antes la tortuga. Evidentemente, Zenón sabía que Aquiles alcanzaría al animal pero quería poner de manifiesto la paradoja que supone considerar al espacio y al tiempo como una su-

a nivel insular. Ha sido catalogada 'fuera de peligro' en la isla de Tenerife, si bien no existen datos sobre el •••

26

cesión infinita de puntos e instantes.

Y, precisamente, el infinito también dio lugar a cuestiones inexplicables que fueron consideradas paradojas. Por ejemplo: el conjunto de los números naturales es el formado por 1, 2, 3, 4, 5, 6,... y el de los pares es el formado por 2, 4, 6, 8,... Si preguntamos a cualquier persona no versada en estos asuntos que cuál de esos dos conjuntos tiene más elementos, lo normal es que diga que el primero porque su lógica le indica que tiene más elementos que el segundo. En efecto, así lo dicta este "aplastante" principio de la lógica: si podemos emparejar todos los elementos de un conjunto (pensemos, por ejemplo, en las vocales) con todos los pertenecientes a otro conjunto (por ejemplo, los dedos de una mano), entonces ambos tienen el mismo cardinal, esto es, tienen el mismo número de elementos (en el ejemplo que propongo, ambos tienen cinco elementos). Es lo que se conoce como correspondencia biunívoca entre dos conjuntos.

Volviendo a nuestro ejemplo, parece evidente, por tanto y según ese principio, que si en el segundo conjunto no están ni el 1 ni el 3 ni ninguno de los demás impares, entonces el primero "debe" tener más elementos que el segundo. Hasta aquí lo que nos dicta la lógica.

Pero fíjese ahora en cómo presento ambos conjuntos, escribiendo los elementos de uno y otro como lo hago a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20...

El conjunto de encima es el de los números naturales y el de abajo el de los números naturales pares. Pues bien, debajo del 1 está escrito su doble, que es el 2; debajo del 2 está su doble, que es el 4; debajo del 3, su doble el 6 y así sucesiva e indefinidamente, ¿mantiene la idea de que el conjunto de los naturales tiene más elementos que el de los pares cuando vemos cómo debajo de todo número natural podemos colocar siempre el par correspondiente? Es lo mismo que decir que entre el conjunto de los números naturales y el de los números pares podemos establecer una correspondencia biunívoca.

Galileo Galilei (1564-1642) observó algo parecido con un ejemplo más espectacular aun pues vio que podía "emparejar" cada número natural con su cuadrado como se indica a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100...

Y da la solución a la paradoja suscitada en ese planteamiento, a través del personaje Salviati de su obra *Discursos y demostraciones matemáticas:*

Salviati: No veo que pueda admitir otra conclusión, si no es la de decir que la cantidad de números en general es una cantidad infinita: los cuadrados son infinitos y además ni la cantidad de cuadrados es menor que la de los números en general, ni ésta es mayor que aquélla: en conclusión los atributos igual, mayor y menor no tienen sentido cuando se habla de infinitos, sino cuando se trata de cantidades finitas.

ILUSTRACIÓN QUE MUESTRA A SANCHO COMO GOBERNADOR DE LA ÍNSULA BARATARIA.

Se suele utilizar como definición de conjunto infinito la que se esconde tras las palabras de Salviati, es decir, aquel conjunto que se puede poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto suyo; es el caso de los números naturales (conjunto) y de sus cuadrados (subconjunto) y también el de los naturales y sus dobles, del ejemplo anterior.

Otras conocidas paradojas semánticas son estas:

La Paradoja de Epiménides de Cnosos (Creta) (siglo VI a. C.) o paradoja del mentiroso es una de las más antiguas de las que se tiene noticia. Es esta:

Dice Epiménides: "todos los cretenses son mentirosos". Sabemos que Epiménides es cretense. ¿Dice Epiménides la verdad?

Con relación a esta paradoja, se puede deducir que San Pablo, el apóstol, la conocía aunque teniendo en cuenta lo que dice, da la impresión de que "cogió el rábano por las hojas" porque en su Epístola a Tito, al que había dejado en Creta para que acabase de ordenar lo que faltaba y constituyese por las ciudades presbíteros en la forma que le indicó, refiriéndose a los cretenses los "pone a caldo" diciendo que hay muchos indisciplinados, charlatanes, embaucadores, ... y para remachar su diatriba acude a algo que debía ser popular por aquellos tiempos: Dijo uno de ellos, su propio profeta, "los cretenses, siempre embusteros, malas bestias, panzas holgazanas". Verdadero es tal testimonio(1,12). Todo este discurso de San Pablo quizá habría que considerarlo como "un daño colateral" de la paradoja porque no creo que Epiménides, al que se debe considerar un filósofo reflexivo, pudiera generalizar alegremente y aplicarle el "sambenito" de mentiroso a todos sus paisanos, aunque San Pablo amplía las "lindezas" y no consta que el sabio las dijera...

La Paradoja del cocodrilo y la mujer se atribuye a los sofistas (siglo V a.C.) y viene a ser una elegante variación de la anterior. Dice así:

Un cocodrilo atrapa a un bebé en la margen del Nilo. La madre suplicó al animal que se lo devolviese, a lo que contestó el parlante cocodrilo:

-Muy bien, si eres capaz de vaticinar lo que haré, te devolveré al niño. Pero si adivinas mal, lo devoraré.

-Devorarás a mi hijo, responde la madre.

¿No parece un poco arriesgada la respuesta de la madre? ¿Son capaces los cocodrilos de pensar tanto como para darse cuenta de que la madre de la criatura le "ha metido en un callejón sin salida"?