Ya hay solución para el desafío matemático extraordinario de Navidad presentado por EL PAÍS y la Real Sociedad Matemática Española con motivo del sorteo de la lotería. Adolfo Quirós Gracián, profesor de la Universidad Autónoma de Madrid y director de La Gaceta de la RSME presentó el desafío y nos da ahora la solución.

Vídeo | El planteamiento del desafío

Recordemos que el desafío consistía en, o bien encontrar una sucesión de resultados (gano o no gano) en los sorteos de lotería **en la que haya podido pasar del 10,5% de "éxito" al 9,375% sin haber estado nunca en el 10%, o bien demostrar que eso no es posible, y que necesariamente debo haber caído por el camino en el 10%**
.

Hay muchos "porcentajes de acierto" evitables. Por ejemplo, el 40%. Si gané en uno de los dos primeros sorteos y perdí en el tercero, habré bajado del 50% al 33,3% sin pasar por ninguno de los porcentajes intermedios.

Pero el 10% no se puede evitar. Veamos por qué. Supongamos que 10% fuese evitable y miremos el momento en el que saltamos por encima del 10%. Justo antes habremos jugado J veces, de las que habremos ganado G, y estamos por encima del 10%. En el siguiente sorteo perdemos, y bajamos del 10%.

Teniendo en cuenta que 10%=1/10, esto significa que $G/J > 1/10 > G/(J+1)$

"Multiplicando en cruz", la primera desigualdad es equivalente a

$10\,G > J$, o $10\,G - J > 0$,

y la segunda a

$J+1 > 10\,G$, o $1 > 10\,G - J$.

Poniéndolas juntas, $1 > 10\,G - J > 0$.

¡Pero no hay ningún entero estrictamente entre 1 y 0!

Por tanto, al pasar del 10,5% al 9,375% necesariamente debemos haber estado en algún momento en el 10%.

Del mismo modo podéis ver que ninguna proporción que se pueda escribir como 1/N se puede evitar en una reducción del porcentaje de acierto. Se puede demostrar que todas las demás sí son evitables, pero es un poco más difícil.

Si los porcentajes en lugar de bajar subiesen, la respuesta sería otra: si pierdo en el primer sorteo y gano en el segundo, paso del 0% al 50%, saltándome el 10% y muchos otros porcentajes. De hecho, este desafío está inspirado en otro, propuesto por Adrián Paenza, en el que los porcentajes, que eran de aciertos en lanzamientos jugando al baloncesto, crecían en lugar de bajar. Animamos a los lectores a buscar qué porcentajes son entonces inevitables.

Se han recibido dentro del plazo casi 400 respuestas. Aunque no siempre dicen desde donde escriben, las hay procedentes de todas las Comunidades Autónomas, de una de las Ciudades Autónomas y de al menos otros nueve países de América y Europa. Nos alegra constatar que un buen número de las soluciones son de jóvenes estudiantes de ESO o Bachillerato.

Aproximadamente un 12% del total proponen, o argumentan que existe, una sucesión de éxitos y fracasos que evita el 10%. No es un despiste sorprendente, ya que la intuición nos dice que, al no ser los cambios en los porcentajes continuos, podemos evitar uno dado, sin que se perciba que el 10% tiene algo "especial". Confieso que cuando conocí el desafío de Paenza yo también empecé por buscar un ejemplo, y sólo tras varios intentos fallidos cambié de estrategia. (Nota: las pocas personas que han contado como éxitos separados el ganar dos o más premios en un mismo sorteo han obtenido, en general, respuestas correctas, pero a un problema distinto al que se planteaba).

No podemos considerar completas un 18% adicional de las soluciones ya que, aunque dicen que no se puede evitar el 10%, o bien lo hacen basándose sólo en algún ejemplo o bien dan una explicación tan general que se aplicaría también al 40%, porcentaje que sabemos que se puede evitar.

El restante 70% son respuestas correctas de dos tipos. Por un lado, quienes se han dado cuenta de que los porcentajes inicial y final son irrelevantes (algunos incluso observan que no se pueden evitar las fracciones de la forma 1/N), y dan demostraciones más o menos parecidas a nuestra solución, aunque quizás con otro lenguaje (por ejemplo, Juan Vicente S. G. combina geometría y probabilidad). Por otro, quienes cubren todas las posibilidades de ir de (múltiplos) de 21/200 a (múltiplos de) 3/32 y muestran que en ningún caso es posible evitar pasar por (múltiplos) de 1/10. De estos últimos, unos lo hacen analizando cuidadosamente cómo cambian el numerador y el numerador, como han hecho M.ª José E. M. o Carlos L.-K. A., ¡quien nos lo cuenta en forma de fábula!; otros, más formales, utilizan sucesiones, como ha hecho por ejemplo Javier S. M.; algunos dan demostraciones geométricas, en ocasiones muy elegantes, como las de Juan S. A. o Ángela V.

La RSME ha decidido enviar un ejemplar del libro de Martin Erickson Soluciones ¡Ajá! , que forma parte de la Biblioteca Estímulos Matemáticos que publica conjuntamente con Editorial SM, a tres lectores seleccionados por la sociedad. Son Isabel O. A., Juan Manuel C. M. y Félix M. P.

Hayáis dado o no con la respuesta, espero que el desafío os haya resultado interesante. En nombre de EL PAÍS, de la RSME y en el mío propio, os deseo felices fiestas ¡y suerte con la lotería!

Si lo deseas, aquí puedes ver todos los desafíos anteriores