El *problema de Freudenthal* apareció publicado por primera vez en 1969, en la revista *Nieuw Archief voor Wiskunde*
, en la que el matemático
[Hans Freudenthal](#)
(1905-1990) era el redactor de la sección de ‘problemas’.

No. 223. A zegt tot S en P: Ik heb twee gehele getallen x, y gekozen met $1 < x < y$ en $x + y \leqslant 100$. Straks deel ik $s = x + y$ aan S alleen mee, en $p = xy$ aan P alleen. Deze mededelingen blijven geheim. Maar jullie moeten je inspannen om het paar (x, y) uit te rekenen.

Hij doet zoals aangekondigd. Nu volgt dit gesprek:

1. P zegt: Ik weet het niet.
2. S zegt: Dat wist ik al.
3. P zegt: Nu weet ik het.
4. S zegt: Nu weet ik het ook.

Bepaal het paar (x, y).

(*H. Freudenthal*).

Copia de la publicación original, problema No. 223, en [1].

El problema –con la redacción adaptada, pero sin cambiar la parte matemática– dice lo siguiente:

Jesús, María y José son tres amigos. Jesús elige dos números enteros *x* e *y*, donde 1 < *x* < *y,*
y
x
+
y

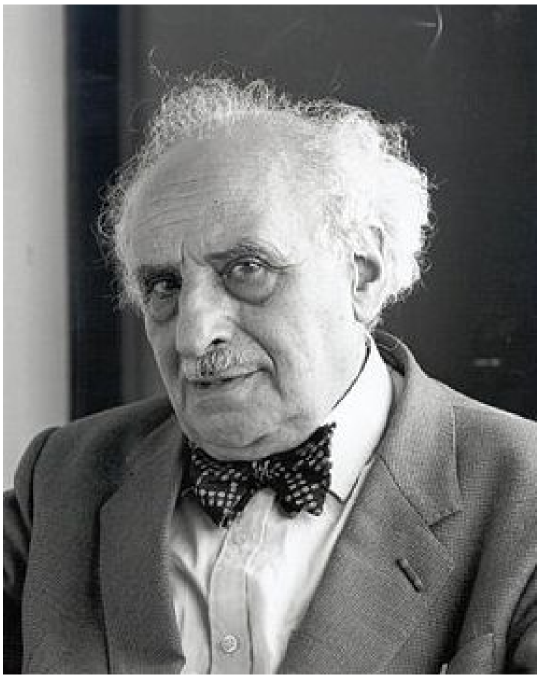
≤ 100.

Jesús dice a María el resultado del producto $P = xy$ y a José le informa del valor de la suma $S = x + y$.

A continuación tiene lugar el siguiente diálogo:

1. María: *Desconozco los valores de x e y.*
2. José: *Ya sabía que te era imposible saber los valores de x e y.*
3. María: *Bien, ahora, ya conozco x e y.*
4. José: *Bien, ahora yo también sé sus valores*.

¿Quiénes son x e y?



Hans Freudenthal

En [2], se discuten varias de las soluciones propuestas –muchas de ellas de conocidas personas del ámbito matemático– y se da el resultado: x = 4 e y = 13.

¿Cómo se ha llegado a ello? Reproduzco el argumento utilizado (extraído de [3]) para su resolución, aunque es preciso realizar algunos cálculos (sencillos, pero largos) para llegar a ello.

A priori, hay muchos pares de números enteros que cumplen las condiciones dadas en el enunciado. Pero la frase 1. de María permite eliminar algunos (los que sólo pueden escribirse de una única manera como un producto xy). Las frases 2., 3. y 4. permiten eliminar sucesivamente todos los demás pares posibles, excepto uno de ellos.

Vamos a ir razonando poco a poco.

(i) María conoce el producto $P = xy$, pero no sabe los valores de x y de y. Eso significa que el número P pose varias posibles descomposiciones. Este es el caso, por ejemplo de 12 = 2×6 = 3×4, 18 = 2×9 = 3×6, y tantos otros.

Si se pasa revista a todos los posibles productos, existen 574 *productos ambiguos*, es decir, que pueden descomponerse de al menos dos maneras diferentes. Llamemos P_1 al conjunto de estos números *ambiguos*: el primero es 12 y el último es 2400 (2400 = 40×60 = 48×50):

P_1 = {12, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 52, 54, 56, 60, 63, 64, 66, 68, 70, 72, 75, 76, 78, 80, 84, 88, 90, 92, 96, 98, 99, 100, 102, 104, 105, 108, 110, 112, 114, 116, 117, 120, 124, 126, 128, 130, 132, 135, 136, 138, 140, 144, 147, 148, 150, 152, 153, 154, 156, 160, 162, 164, 165, 168, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 180, 182, 184, 186, 188, 189, 190, 192, 195, 196, 198, 200, 204, 207, 208, 210, 216, 220, 222, 224, 225, 228, 230, 231, 232, 234, 238, 240, 243, 245, 246, 248, 250, 252, 255, 256, 258, 260, 261, 264, 266, 270, 272, 273, 275, 276, 279, 280, 282, 285, 286, 288, 290, 294, 296, 297, 300, 304, 306, 308, 310, 312, 315, 320, 322, 324, 325, 328, 330, 336, 340, 342, 344, 345, 348, 350, 351, 352, 357, 360, 364, 368, 370, 372, 374, 375, 376, 378, 380, 384, 385, 390, 392, 396, 399, 400, 405, 406, 408, 410, 414, 416, 418, 420, 425, 429, 430, 432, 434, 435, 440, 441, 442, 444, 448, 450, 455, 456, 459, 460, 462, 464, 465, 468, 470, 475, 476, 480, 483, 486, 490, 492, 494, 495, 496, 500, 504, 506, 510, 512, 513, 516, 518, 520, 522, 525, 528, 532, 539, 540, 544, 546, 550, 552, 558, 560, 561, 564, 567, 570, 572, 574, 576, 580, 585, 588, 592, 594, 595, 598, 600, 602, 608, 609, 612, 616, 620, 621, 624, 627, 630, 637, 638, 640, 644, 646, 648, 650, 651, 656, 660, 663, 666, 672, 675, 680, 682, 684, 688, 690, 693, 696, 700, 702, 704, 714, 715, 720, 726, 728, 735, 736, 738, 740, 741, 744, 748, 750, 754, 756, 759, 760, 765, 768, 770, 774, 780, 782, 783, 784, 792, 798, 800, 806, 810, 812, 814, 816, 819, 820, 825, 828, 832, 836, 840, 850, 855, 858, 860, 864, 868, 870, 874, 880, 882, 884, 888, 891, 896, 897, 900, 902, 910, 912, 918, 920, 924, 928, 930, 935, 936, 945, 946, 950, 952, 957, 960, 962, 966, 968, 969, 972, 975, 980, 984, 986, 988, 990, 992, 1000, 1008, 1012, 1014, 1020, 1026, 1032, 1035, 1036, 1040, 1044, 1050, 1053, 1054, 1056, 1064, 1066, 1071, 1078, 1080, 1088, 1092, 1100, 1102, 1104, 1105, 1110, 1116, 1118, 1120, 1122, 1125, 1131, 1134, 1140, 1144, 1148, 1150, 1152, 1155, 1160, 1170, 1173, 1176, 1178, 1184, 1188, 1190, 1196, 1197, 1200, 1204, 1215, 1216, 1218, 1224, 1230, 1232, 1240, 1242, 1248, 1254, 1258, 1260, 1275, 1276, 1280, 1288, 1292, 1296, 1300, 1302, 1311, 1312, 1320, 1323, 1326, 1330, 1332, 1334, 1344, 1350, 1360, 1364, 1365, 1368, 1377, 1380, 1386, 1392, 1394, 1400, 1404, 1406, 1408, 1425, 1426, 1428, 1430, 1440, 1449, 1450, 1452, 1456, 1458, 1470, 1472, 1476, 1480, 1482, 1485, 1488, 1496, 1500, 1508, 1512, 1518, 1520, 1530, 1536, 1539, 1540, 1550, 1554, 1560, 1564, 1566, 1568, 1575, 1584, 1596, 1600, 1610, 1612, 1617, 1620, 1624, 1628, 1632, 1638, 1650, 1656, 1664, 1672, 1674, 1680, 1700, 1702, 1710, 1716, 1725, 1728, 1736, 1740, 1748, 1750, 1755, 1760, 1764, 1768, 1776, 1782, 1792, 1794, 1798, 1800, 1820, 1824, 1836, 1848, 1850, 1856, 1860, 1872, 1890, 1904, 1914, 1920, 1924, 1932, 1938, 1944, 1950, 1960, 1972, 1980, 1984, 2016, 2030, 2040, 2046, 2052, 2070, 2080, 2100, 2108, 2112, 2142, 2145, 2160, 2176, 2184, 2200, 2205, 2240,2244, 2268, 2280, 2340, 2352, 2400}.

(ii) José conoce la suma $S = x+y$. Como José dice: '*Ya sabía que te era imposible saber los valores de x e y'*, eso significa que, para todas las maneras de descomponer S como suma de dos enteros, $S = 2+(S-2) = 3+(S-3)$,… todas dan un producto *ambiguo*, que es por lo tanto un elemento de P_1.

Ese es el caso, por ejemplo de 11 = 2+9 que tiene como producto 18, 11 = 3+8 de producto 24, 11 = 4+7 de producto 28, 11 = 5+6 de producto 30.

Estas sumas dan lugar al conjunto S_1 = {11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53}.

(iii) María dice que, con esa información, reconoce los valores de *x* e *y*. Eso significa que entre las muchas descomposiciones de $P = xy$ que son un producto *ambiguo*, sólo una da una suma $S = x+y$ que pertenece a S_1. Por ejemplo, si María piensa en el producto 18 = 2×9 = 3×6, constata que sólo el par (2,9) tiene una suma perteneciente a S_1.

Los productos *ambiguos* para los que sólo una descomposición pertenece a S_1 describen un conjunto P_2 que se reduce a 86 elementos en vez de los 574 que contenía P_1:

P_2 = {18, 24, 28, 50, 52, 76, …,702}.

(iv) José dice que también conoce los valores de los números elegidos por Jesús. Eso significa que entre las descomposiciones de la suma $S = x+y$, sólo una da como producto un elemento de P_2. Por ejemplo, 11 = 2+9 = 3+8 = 4+7 = 5+6, da como posibles productos 18, 24, 28 y 30, y dos de esos productos pertenecen a P_2. En este caso, María no podría dar *x* e *y*.

Las sumas tales que una única descomposición da un producto perteneciente a P_2 se reducen al número 17; en efecto: 17 = 2+15 = 3+14 = 4+13 = 5+12 = 6+11 = 7+10 = 8+9, cuyos productos son 30, 42, 52, 60, 66, 70 y 72, y sólo 52 está en P_2.

Por lo tanto, María (y nosotras y nosotros) sabe que $x+y= 17$ y que $xy = 52$, y por lo tanto, $x = 4$ e $y = 13$.

Visto en [Le Blog d'ABC Maths]

Más información:

[1] H. Freudenthal, *Nieuw Archief Voor Wiskunde*, Ser 3, 17 (1969) 152 (planteamiento del problema)

[2] H. Freudenthal, *Nieuw Archief Voor Wiskunde*, Ser 3, 18 (1970) 102-106 (solucón del problema)

[3] *Hans Freudenthal* , Wikipedia (en francés)

[4] *Sum and Product Puzzle* , Wikipedia

[5] Jean-Paul Delahaye, *L'incroyable problème de Freudenthal* , Interstices, 2008

[6] Hans van Ditmarsch, Jan van Eijck, and L.C. Verbrugge, *Publieke Werken Freudenthal's Som-en-productraadsel* , NAW 5/10 nr. 2 juni 2009, 126-131

Artículo publicado en el blog de la Facultad de Ciencia y Tecnología (ZTF-FCT) de la Universidad del País Vasco ztfnews.wordpress.com .