Introducción

La geometría sintética manifiesta su belleza en las relaciones de orden, simetría o regularidad que aparecen en sus construcciones. Pero además, desde la Antigua Grecia, ofrece brillantes ejemplos de cómo aprovechar al máximo recursos relativamente sencillos, ese otro tipo de "belleza" más abstracta e inherente al mundo matemático.

En este artículo usaremos herramientas muy sencillas. Prácticamente, sólo emplearemos un concepto, la semejanza, y un procedimiento, el teorema de Tales. Veremos que con estas simples herramientas podremos ahondar considerablemente en el problema que nos servirá de ejemplo.

En la primera parte del artículo anterior hablábamos de "polígonos generados al unir los puntos medios de otro polígono". Debido a lo molesto que resultaría repetir constantemnte esta descripción, hemos inventado el término **interpoli** para referirnos al polígono así creado a partir de otro. Pues bien, mostrábamos en ese artículo cómo una precipitada generalización de la regularidad observada en la proporción de las áreas de un polígono y su interpoli puede conducir a inferir "leyes" falsas. Ahora, en vez de frustrarnos, retomaremos nuestro fracaso para darle la vuelta al problema y alcanzar un resultado general válido.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Antes de comenzar

En todo el texto consideraremos los polígonos (trapecios, cuadriláteros, pentágonos, etc.) en el sentido de “polígono simple” o “polígono no cruzado”, es decir, como polígonos en donde no se interseca ningún par de lados no consecutivos.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Dando la vuelta a la tortilla

Recordemos la conjetura fallida. El interpoli de un triángulo guarda una razón constante de 1/4 respecto al área original. Lo mismo ocurre, con razón 1/2, en los cuadriláteros. Surge la tentación de generalizar esta constancia pero, al pasar al pentágono u otro polígono de más lados, la razón ya no se mantiene constante.

Podemos aprovechar la precipitada generalización anterior, una vez hemos comprobado que “no marcha”, para plantear el problema **al revés**. Si elegimos un polígono al azar, parece razonable pensar que la razón de áreas entre su interpoli y el propio polígono no sea la misma para todos los polígonos con el mismo número de lados, a no ser en algunos **casos particulares** como, de hecho, ya habíamos visto que son los triángulos y los cuadriláteros.

Ahora bien, ¿estos casos particulares obedecen sólo al número de lados o a otra “propiedad” desconocida? ¿Existirán “familias” de polígonos, con más de cuatro lados, que tengan esa misma propiedad y por tanto mantengan todos la misma proporción entre sus áreas y las de sus interpolis respectivos? ¿Son todos los triángulos y cuadriláteros miembros de esas familias? ¿Cuál es, si existe, esa misteriosa “propiedad”?

A lo largo de este artículo mostraremos que esa **propiedad** existe. Nuestro objetivo será mostrar que, dado un polígono, la propiedad que debe cumplir para mantener su área en razón constante con la de su interpoli se puede definir como:

la posibilidad de unir sus vértices mediante un haz de rectas paralelas con los de un polígono regular de igual número de lados.

En la siguiente construcción podemos ver un ejemplo. El pentágono rojo de la derecha mantiene siempre la misma razón con su interpoli azul porque sus cinco vértices se desplazan sobre un haz de rectas paralelas que lo conectan con los vértices de un pentágono regular.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Observemos que los **polígonos regulares** cumplen obviamente esa propiedad, pues basta conectarlos con una traslación cualquiera de sí mismos, y podemos también observar que en su caso, por razones de semejanza, la razón interpoli/polígono no varía. Todos los pentágonos regulares, por ejemplo, mantienen la misma razón con sus interpolis, independientemente de su tamaño.

Igualmente, la condición de que el polígono de la izquierda sea regular es necesaria, como podemos comprobar en la siguiente construcción.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Así que los triángulos y cuadriláteros quizás tengan alguna característica común con los polígonos regulares que los convierta en “especiales”. Si logramos encontrar esa característica tal vez podamos aproximarnos a la propiedad general.

Los ubicuos triángulos

Con este nuevo objetivo, recomencemos la exploración. ¿Qué relación existe entre un triángulo cualquiera y un triángulo regular (*equilátero*)? Evidentemente, ambos tienen tres lados, tres ángulos cuya suma es 180º... ¿Podemos encontrar alguna otra relación, basada más en la forma o posición que en la cantidad de elementos?

Construyamos un triángulo equilátero. Puede que la siguiente pregunta suene bastante estúpida, pero, curiosamente, en su respuesta reside la idea que nos permitirá avanzar. ¿Lo que estamos **viendo** es realmente un triángulo equilátero?

Si miramos con detenimiento, con los ojos bien abiertos, es probable que nadie consiga hacernos creer lo contrario. Pero en realidad, ¡mirando con los dos ojos es imposible ver un triángulo equilátero!

No bromeamos. Para ver el triángulo *exactamente* equilátero sus tres vértices deberán estar a idéntica distancia de nuestros ojos. Pero eso es imposible, salvo que cerremos uno de ellos (o "nos incrustemos" el triángulo entre los dos ojos, lo cual también impediría su correcta visualización). Sólo mirando con un solo ojo, situado justo enfrente del circuncentro del triángulo, podemos afirmar realmente que estamos **viendo** lo mismo que estamos **percibiendo**.

Cerremos, pues, un ojo. Efectivamente, ahora podemos **ver** un triángulo equilátero. Pero, ¿podemos ahora afirmar que ese triángulo **es** equilátero? Curiosamente, no.

Existen infinidad de figuras de contorno triangular, no equiláteras, que producirían exactamente la misma imagen en nuestra retina: cualquier sección plana (recta u oblicua) de la pirámide triangular que une los vértices del triángulo con nuestra retina produciría la misma imagen. Es más, incluso cualquier corte transversal, no necesariamente plano, seguiría produciendo la misma impresión, pues todos los cortes se **eclipsan** exactamente entre sí. En la práctica esto no supone ningún inconveniente, pues el poderoso cerebro siempre interpreta nuestro entorno basándose mucho más en la experiencia que en la imagen objetiva formada en la retina (por otra parte, imagen que, al formarse en la superficie curva del fondo del globo ocular, corresponde a un triángulo esférico, cuyos lados curvos restituimos mental y automáticamente en rectos).

Para facilitar el desarrollo posterior de esta idea, imaginemos que convertimos esa pirámide triangular en un prisma triangular por el *sencillo* procedimiento de situarnos a infinita distancia del triángulo (sólo así convertiremos rectas convergentes en paralelas). Por supuesto, también tendremos que imaginar que tenemos una visión en el ojo abierto extraordinariamente aguda.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Una vez situados a distancia infinita, imaginemos que lo que estamos viendo es la base equilátera de un prisma triangular (podemos pensar en un Toblerone). ¿Cómo distinguirla de cualquier sección oblicua de ese prisma? Es imposible. Todas las secciones, *de cualquier forma*, las veremos como si fueran equiláteras. ¡Aquí está la característica común que deseábamos encontrar entre un triángulo regular y cualquier otro!

Resultado 1. Todo triángulo es una sección de algún prisma triangular de base equilátera.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Observemos que la frase "un triángulo eclipsa a otro" da a entender la percepción del haz de rectas paralelas como no coplanarias (espaciales), como si fueran las tres aristas de un prisma. Bajo este enfoque, el triángulo ABC no sería más que una sección cualquiera de ese prisma de base equilátera A'B'C'. Sin embargo, la construcción realizada es plana, y el haz de rectas es coplanario. Ambas interpretaciones se complementan y fortalecen mutuamente. Para "imaginar" los objetos relacionados es más sencillo pensar en el modelo tridimensional, pero para realizar y justificar la construcción es mejor volver al modelo plano. El título de este artículo se debe precisamente a este juego mental que alterna ambas interpretaciones.

Resultado 2. En todo prisma triangular (recto u oblicuo) puede encontrarse una base equilátera.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Observemos que en el proceso se construye, efectivamente, un triángulo equilátero. Invitamos al lector o lectora a que intente justificar por qué el procedimiento seguido garantiza que el triángulo gris ha de ser equilátero.

Polígono interior, triángulo exterior y agujero prismático

Dado un triángulo ABC, llamaremos *polígono interior* a cualquiera cuyos

vértices descansen sobre los lados del triángulo.
Al triángulo ABC lo denominaremos *triángulo exterior*.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

En tres dimensiones, el polígono interior se comporta como lo que denominaremos **agujero prismático**, es decir, como un prisma cuyas aristas siguen la misma dirección que el eje del prisma de base regular. En la siguiente construcción vemos el agujero prismático creado por el interpoli (que es un caso particular de polígono interior).

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Resultado 3. La razón entre las áreas del triángulo interior y exterior de cualquier sección de un prisma triangular con un agujero prismático triangular no depende de la sección, es decir, es siempre constante e igual a la razón correspondiente en la base regular:

$$\frac{PRS}{ABC}=\frac{P'R'S'}{A'B'C'}$$

$$r(n,k)=\left(\frac{apotema}{Apotema}\right)^2=(2k-1)^2\,\mathrm{sen}^2(180°/n)+\cos^2(180°/n)$$