

En la estantería de una biblioteca hay siete libros: tres de Historia, dos de Matemáticas y dos de Química ¿ En cuántas de las posibles formas de ubicarlos no aparecerán todos juntos los libros de una misma materia?

Si no ponemos ninguna restricción al problema sabemos que el número de maneras distintas de poner los siete libros es igual a 7!.

Pero de ese total habrá que eliminar una serie de ordenamientos.

Si introducimos una serie de notaciones seguro que podemos resolver rápidamente el problema.

- Así, si llamamos A(H) al número de ordenamientos en el que todos los libros de Historia están juntos, e igualmente llamamos A(M) y A(Q) al número de ordenamientos juntos de Matemáticas y Química respectivamente; es claro que estos ordenamientos habrá que restarlos a los 7!. Pero todavía podemos liar mucho el problema ya que contaríamos más de una vez los ordenamientos.

- Introduciendo una nueva notación, llamamos A(H, M) el número de ordenamientos en el que están juntas las materias de matemáticas e Historia; Y lo mismo para las otras dos materias A(H, Q) y A(M. Q).

Por ejemplo la permutación QMMHHHQ integra el número A(H, M), pero también el A(M) y el A(H)

Para acabar llamamos A(H, M, Q) el número total de ordenamientos en el que los tresos de cada materia están juntos. Por ejemplo la ordenación QQMMHHH será una de ellas.

Si tenemos claro estos elementos podemos acabar poniendo que el número buscado es igual a:

$$7! - (A(H) + A(M) + A(Q)) + (A(H,M) + A(H,Q) + A(M,Q)) - A(H,M,Q)$$

Por tanto nuestros esfuerzos se centrarán en encontrar cada uno de los valores de la expresión anterior. Por ejemplo para calcular $A(H)$,

podemos pensar que tres libros de Historia están en un sólo bloque , pues deben estar juntos. Tenemos entonces que permutar los cinco libros restantes($5!$) y por último permutar los tres libros de Historia, por tanto $A(H) = 5!3! = 720$

El mismo razonamiento sirve para $A(M)$ y $A(Q)$, dando lugar a los siguientes valores: $A(M) = A(Q) = 6!2! = 1.440$

Para calcular $A(H, M)$ procedemos de la misma manera, los libros de Historia formarán un bloque y los de Matemáticas otro y a su vez habrá permutaciones internas en cada bloque, por tanto $A(H, M) = 4!3!2! = 288$ ordenaciones y análogamente $A(H, Q) = A(M, Q) = 5!2!2! = 480$.

Por último y razonando de la misma manera tenemos que $A(H, M, Q) = 3!3!2!2! = 144$ ordenaciones.

En resumen para poner los siete libros de acuerdo a las condiciones indicadas habrá que realizar el cálculo siguiente.

$$7! - (720 + 1.440 + 1.440) + (288 + 288 + 480) - 144 = 2.352 \text{ ordenaciones totales}$$