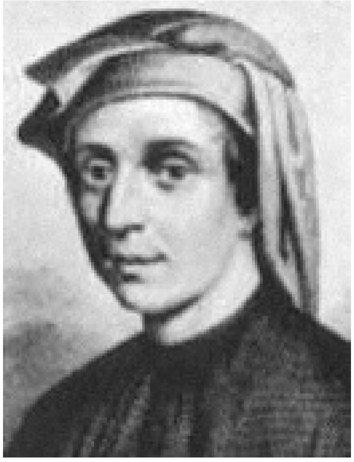

Leonardo de Pisa, también conocido como **Fibonacci** (hijo de Bonaccio), nació en esta ciudad en el año 1180. Su padre, un mercader italiano con intereses en el norte de África, le inició en asuntos de negocios y contabilidad mercantil, lo cual despertó en él un interés por las matemáticas que iban mucho más allá de sus aplicaciones prácticas. Estudió bajo la dirección de un maestro árabe y recorrió Egipto, Siria, Grecia y Sicilia. Tuvo ocasión de conocer el sistema de numeración indo-árabe, del cual se convirtió en un acérrimo defensor. Murió en 1250. Muy poco más se sabe de su vida.

Un torneo matemático y una colección de problemas Pasaba por la ciudad de Pisa el emperador Federico II, allá por el año 1225, y quiso conocer al célebre sabio que en ella vivía. Dos filósofos de su séquito, Juan de Palermo y Teodoro, concertaron un encuentro. Además, organizaron un torneo matemático para que Federico comprobara que la fama de Leonardo no carecía de fundamento. Le plantearon tres problemas y el pisano los resolvió. Los tres problemas fueron los siguientes.

El primero, encontrar un número cuyo cuadrado, al sumarle o restarle cinco, dé otros cuadrados. Leonardo parte de la siguiente identidad (a veces conocida como de Fibonacci):

$$(m^2+n^2)^2$$

$\pm 4mn(m^2-n^2) = (m^2-n^2 \pm 2mn)^2$

Si pudiéramos dar con dos números enteros ***m*** y ***n*** tales que ***$4mn(m^2-n^2)=5$*** el problema tendría solución entera. Pero se puede demostrar (es cosa inmediata) que no existen tales números, de modo que habremos de conformarnos con soluciones racionales. Dividimos ambos miembros de la igualdad por ***p^2*** y resulta:

$$\left(\frac{m^2}{p}+\frac{n^2}{p}\right)^2 \pm \frac{4mn\left(m^2-n^2\right)}{p^2}=\left(\frac{m^2}{p}-\frac{n^2}{p}\pm\frac{2mn}{p}\right)^2$$

Si ***$4mn(m^2-n^2)=5p^2$***, necesariamente ***p^2*** es múltiplo de cuatro y ***$p=2q$***. La última identidad se transforma en ***$mn(m^2-n^2)=5q^2$***. Uno de los factores del primer miembro ha de ser múltiplo de cinco. Pongamos ***$m=5$***, y entonces ***n(25-n***

2

)=q

2

. El primer valor de que hace de

n(25-n

2

)

un cuadrado es

n=4

. En consecuencia,

q=6

,

p=12

y el número buscado es el siguiente (y es fácil comprobar que, efectivamente, cumple las dos condiciones):

En el segundo problema se trata de hallar un número x para el cual ***x³+***

2x

2

+10x=20

, utilizando para ello el libro X de los Elementos de Euclides. En él se da una clasificación de los segmentos de la forma:

$$m \pm \sqrt{p}\ ,\ \sqrt{m} \pm \sqrt{p}\ ,\ \sqrt{m \pm \sqrt{p}}\ \text{ y }\ \sqrt{\sqrt{m} \pm \sqrt{p}}\ \ (\text{con } m \text{ y } p \text{ racionales})$$

Leonardo demostró que la solución no puede ser racional, ni tampoco ninguno de los irracionales antes señalados. Después encontró una solución aproximada, que en notación actual es *x=1.368807874148*, y que fue la mejor aproximación de una raíz irracional de una ecuación algebraica conseguida hasta el momento.

El tercer problema es la historia de tres hombres se reparten al azar un capital. A continuación, el primero aporta a un fondo común la mitad de su porción, el segundo un tercio y el tercero un sexto. Después hacen con el fondo tres partes iguales, y cada cual toma una para sí. ¿Cuánto tuvo cada uno en el primer reparto, si la cantidad final fue, para el primero, la mitad del capital inicial, para el segundo la tercera parte y para el tercero la sexta parte?

Leonardo toma como incógnita auxiliar u una de las tres partes en que se ha dividido el fondo formado por las fracciones de las partes tomadas al azar. Si éstas son ***x***, ***y*** y ***z***, y el capital total es ***c***, tenemos las ecuaciones:

La solución entera más pequeña es ***u=7, c=47, x=33***, ***y=13*** y ***z=1***.

Los tres problemas entraron a formar parte de una colección de quince que Leonardo publicó, en el mismo año en que tuvo lugar la justa, bajo el título *Flor de soluciones de ciertas cuestiones relativas a los números y a la geometría*. Dos problemas de este opúsculo, además de los tres del torneo, merecen ser destacados. Uno, porque tiene soluciones de distinto signo, que Leonardo interpreta como dinero poseído o debido, y es la primera vez que en el Occidente latino aparecen los números negativos entendidos como deudas. El otro, porque plantea una cuestión geométrica que se transforma en una ecuación algebraica.

El Liber quadratorum Esta obra, que hasta 1862 se creyó perdida, fue escrita en 1225. Los problemas planteados en este libro están en la línea de Diofanto, pero en la manera de resolverlos está el sello personal de Leonardo. Si el matemático de Alejandría se contenta con soluciones racionales, el de Pisa quiere conseguirlas enteras. Uno de estos problemas consiste en encontrar un número cuyo cuadrado, al sumarle y restarle un mismo número, vuelva a dar cuadrados. En términos modernos, se trata de resolver las ecuaciones diofánticas $x^2+t=y^2$ y $x^2-t=z^2$. Ahora bien, estas ecuaciones, combinadas entre sí, llevan a esta otra, $2t=y^2-z^2=(y-z)(y+z)$, a la vista de la cual es evidente que los dos factores del segundo miembro (por ser ambos de la misma paridad y su producto múltiplo de dos) han de ser pares. En consecuencia $y-z=2h$, $2t=(y+z)2h$ e $y+z=t/h$. La primera y la tercera ecuación permiten calcular z e y: $y = h + t/2h$, $z = h - t/2h$. Si ambas expresiones son sustituidas en las ecuaciones originales, dan lugar a $x^2+t=(t/2h)^2+t+h^2$ y

$x^2-t=(t/2h)^2-t+h^2$, las cuales a su vez, sumadas miembro a miembro, proporcionan esta otra $x^2=(t/2h)^2+h^2$. Esto significa que x, $t/2h$ y h forman lo que se conoce como una terna pitagórica. Si son números enteros, han de existir (se sabe desde muy antiguo) dos enteros m y n, primos entre sí y de distinta paridad, tales que $x=m^2+n^2$, $t/2h=m^2-n^2$ y $h=2mn$.

Eliminando la h se tiene que $x=m^2$

$+n^2$ y $t=4mn(m^2-n^2)$. Dando valores a m y n, se encuentran todas las soluciones que se quieran:

A los posibles de valores de t los llama Leonardo, con una terminología ya en desuso, *congruentes*. El número congruente más pequeño es veinticuatro, lo cual explica por qué el primer problema planteado en el torneo carece de soluciones enteras. Es cosa sencilla demostrar algo que la tabla anterior hace evidente: todos los números congruentes son múltiplos del más pequeño de ellos.

El Liber abaci

El *Liber abaci,* publicado en 1202, es sin duda la obra más conocida de Leonardo. Su título es equívoco, pues precisamente frente a los abacistas (que empleaban el ábaco y la vieja notación romana) demuestra las ventajas de las cifras hindúes. En el Liber abaci se habla del uso de las cifras y del cálculo con los números enteros, se enseña la descomposición de un número en factores primos, se demuestran los criterios de divisibilidad y se proporcionan las pruebas del 9, del 11 y del 7.