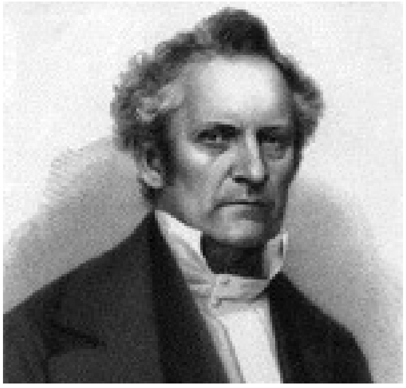


Julius Plücker (1801-1868), natural de Elberfeld, estudió física y matemáticas en varias universidades alemanas, y desde 1836 fue profesor de la de Bonn. Sus primeros trabajos matemáticos fueron de geometría sintética, pero en cuanto entró de lleno en la famosa polémica que enfrentaba a los geómetras analíticos con los sintéticos, se decantó por los primeros. En 1846, quizás harto de tanta controversia, abandonó las matemáticas para volver a la física, en la que hizo notables descubrimientos. En contra de lo que hubiera podido esperarse de él, se interesó más física experimental que por la física matemática. Según Clebsch, la contradicción es solo aparente: Plücker tendía más a crear que a analizar, y esta tendencia era la fuente común de sus descubrimientos en física y en geometría.

Las coordenadas homogéneas   Plücker creó un sistema de coordenadas para el plano proyectivo. Cada punto del plano está determinado por tres números ***x*** , ***y*** y ***z*** , (llamados sus coordenadas homogéneas) tales que, si ***$z \neq 0$*** , los cocientes ***$X = x/z$*** e ***$Y = y/z$*** son las coordenadas cartesianas ordinarias. En cambio, cuando ***$z = 0$*** , representan un punto del infinito. Es evidente que si ***$\lambda \neq 0$*** , las ternas ***(x, y, z)*** y ***$(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$*** corresponden a un mismo punto. Así, la ecuación de la recta del infinito es ***$z = 0$***

, la del eje de abscisas ***y=0***, y la del de ordenadas ***x=0***. Entonces, si la ecuación de una recta en coordenadas cartesianas ordinarias es ***uX+vY+w=0***, en coordenadas homogéneas es ***ux+vy+wz=0***. Al resolver el sistema:

resulta el punto ***(v, -u, 0)***, donde la recta corta a la del infinito. Pero si dos rectas $u_1X+v_1Y+w_1=0$ y $u_2X+v_2Y+w_2=0$ son paralelas, entonces $u_1/v_1=u_2/v_2$. Luego dos rectas paralelas cortan a la del infinito en el mismo punto.

Coordenadas de una recta y principio de dualidad

Consideremos de nuevo la ecuación ***ux+vy+wz=0*** de una recta en coordenadas homogéneas. A los números ***u***, ***v*** y ***w*** les llamó Plücker coordenadas de la recta. En esta ecuación las coordenadas de la recta y el punto juegan papeles simétricos, lo cual permite dos interpretaciones diferentes. Si

u
,
v
y
w
son números fijos y
x
,
y
y
z
variables, representa una recta. Pero si fijamos un punto
P=(x, y, z)
y dejamos libres las coordenadas de la recta, representa el haz de todas las rectas que pasan por
P
. De este modo se justifica algebraicamente el principio de dualidad de la geometría proyectiva, que afirma que el intercambio de las palabras “punto” y “recta” en un teorema da lugar a otro teorema. En efecto, las palabras “punto” y “recta” corresponden en geometría analítica a las palabras “constante” y “variable”, y por la simetría de la expresión, es claro que todo teorema se puede enunciar de dos maneras, cada una de ellas dual de la otra.

La introducción de los números complejos en geometría

Es cosa sabida que, dentro de los números reales, solo los positivos tienen raíz cuadrada. Entonces, para de dotar de raíz cuadrada a los que carecen de ella, hay que crear más números. Para ello postulamos un número ***i*** tal que $i^2=-1$, y consideramos después todos los objetos de la forma ***a+bi*** (con ***a*** y ***b*** números reales), a los cuales llamamos
números complejos
. El número
a
es
parte real
del complejo y
b
la
parte imaginaria
. Las posibilidades algebraicas de estos nuevos números son mucho mayores, y no se pierden las ya existentes, porque los números reales pueden ser pensados como complejos de parte imaginaria cero.

Cada número complejo ***a+bi*** se puede asociar con el punto del plano ***(a, b)***, suministrando de este modo un soporte visual al conjunto de los complejos. Esto, con ser útil, en cierta medida empaña sus verdaderas posibilidades geométricas. Si en lugar de asociar el punto

(a, b)
con el complejo
a+bi
, se le identifica con el par de números complejos
(a+0i, b+0i)
, el plano real (entendido como el conjunto de pares de números reales) queda sumergido en el plano complejo (entendido como el conjunto de pares de números complejos). De esta manera se puede hacer una geometría analítica sobre los números complejos, en la cual el plano real es tan solo la parte visible de esta geometría. Pensemos, por ejemplo, en la circunferencia de ecuación
$X^2+Y^2=25$
y en la recta de ecuación
$2X+Y=15$
. Quien intente resolver el sistema formado por ambas ecuaciones llegará a la raíz de un número negativo. Si trabaja en geometría real, allí habrá de parar en seco. Pero si sigue adelante con la ayuda de los números complejos, verá cómo la recta y la circunferencia tienen en común los puntos
$P=(6+2i, 3-4i)$
y
$Q=(6-2i, 3+4i)$
. Entonces, si en la geometría real se afirma que una recta y una circunferencia se cortan c
omo mucho en dos puntos
, en compleja podemos asegurar que se cortan
exactamente
en dos puntos. La curva de ecuación
$X^2+Y^2=0$
, que en el plano real consta de un único punto, en el complejo se desdobla en las rectas
$X+iY=0$
y
$X-iY=0$
.

Plücker sacó un extraordinario partido de la introducción de los números complejos en la geometría. Definió las coordenadas homogéneas complejas del mismo modo que las reales, y dio a los puntos $J=(1, i, 0)$ y $J^*=(1, -i, 0)$, los llamados *puntos cíclicos*, la importancia que merecían. Estos puntos se llaman así porque, de todas las curvas de segundo grado, solo las circunferencias pasan por ellos. En efecto, sea una cónica cualquiera en coordenadas homogéneas: ax^2+bxy+

$$cy^2+dxz+eyz+fz^2=0$$

e imponemos que pase por uno de los puntos cíclicos. Un cálculo muy sencillo demuestra que $a=c$, $b=0$. Además, como $a\neq 0$ y $c\neq 0$ (de lo contrario la cónica no sería tal), podemos suponer $a=c=1$, y la ecuación de la curva queda de este modo (ya en coordenadas cartesianas ordinarias):

$$X^2+Y^2+dX+eY+f=0$$

Claramente, representa una circunferencia. Las rectas que pasan por uno de los puntos cíclicos se llaman *isótropas*, y son de la forma $X\pm iY+c=0$. En ambos casos, la pendiente es un número igual al opuesto de su inverso, luego son perpendiculares a sí mismas. Las rectas isótropas solo se dejan ver en un punto.

Utilizando los puntos cíclicos, dio Plücker una definición de foco de una cónica aplicable a curvas de grado superior: un punto del plano de una cónica es foco de ésta si las tangentes trazadas desde él pasan por los puntos cíclicos.

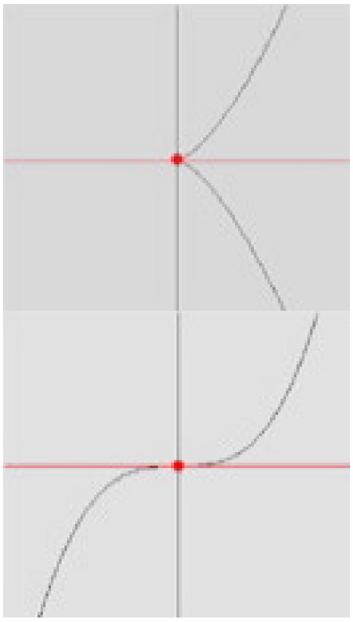
Plücker y las curvas algebraicas

También hizo Plücker importantes descubrimientos en geometría algebraica. En su *System der analytischen Geometrie*, publicado en 1834, abordó el problema de los puntos de intersección de dos curvas algebraicas. Representó todas las curvas que pasan por los puntos de corte de dos curvas de idéntico grado C^*

y C^{**} de la forma siguiente (ya propuesta por G. Lamé, pero a la que Plücker extrajo mayor rendimiento): $C=C^{*}+\lambda C^{**}$, donde λ es un número cualquiera. Mediante este esquema aclaró la siguiente paradoja (llamada de Cramer). Sabemos que una curva algebraica de grado n queda determinada por $n(n+3)/2$ puntos, pero sabemos también que dos curvas de grado n se cortan en n^2 puntos. Pero, cuando $n>3$, $n^2>n(n+3)/2$, de modo que por $n(n+3)/2$ de los n^2 puntos en los que se cortan dos curvas de grado n, pasa más de una curva con dicho grado. Para explicar esto, pensemos en $[n(n+3)/2]-1$ puntos y busquemos dos curvas C^{*} y C^{**} de grado n que los contengan. Si completamos la colección con un punto más, podemos encontrar un valor de λ que proporcione una curva C de grado

n que pase por todos ellos. Las curvas C, C^* y C^{**} tienen en común, no solo el conjunto original, sino los n^2 que comparten C^* y C^{**}. Esto quiere decir que para todo conjunto de $[n(n+3)/2]-1$ puntos existe otro (dependiente del primero) cuya cardinalidad es $n^2-[[n(n+3)/2]-1]-[(n-1)(n-2)/2]$, y tales que cualquier curva de grado n que pase por los primeros pasa también por los dependientes. De este modo, cualquier cúbica que pase por ocho puntos de corte de otras dos, pasa también por el noveno.

Otra importante aportación de Plücker, quizás la más conocida, fue dada a conocer en su *Theorie der algebraischen Curven*, publicada en 1839. Consiste en cuatro fórmulas que ligan entre sí las constantes asociadas a una curva. Si una curva pasa varias veces por un punto, diremos que dicho punto es *múltiple* o *singular*. Si pasa dos veces se llama punto doble. Un punto doble es un nodo si la curva tiene en él dos tangentes distintas (ver en la figura de la izquierda la curva de ecuación $y^2=x^3+x^2$), y una cúspide si las tangentes están superpuestas (figura del medio, curva de ecuación $y^2=x^3$). En cambio, un punto no singular es una inflexión si el orden de contacto entre la curva y su tangente en dicho punto es mayor que tres (figura de la derecha, curva $y=x^3$).



La clase de una curva es el número de tangentes que se pueden trazar desde un punto cualquiera del plano. Pues bien, si una curva tiene grado ***n***, clase ***m***, ***i*** inflexiones, ***t*** bitan gentes (esto es tangentes a la curva en dos puntos diferentes), ***d*** nodos, ***r*** cúspides y ningún otro punto singular, se cumplen las siguientes relaciones:

$$m + 2d + 3r = n(n-1)$$
$$i + 6d + 83 = 3n(n-2)$$
$$n + 2t + 3i = m(m-1)$$
$$r + 6t + 8i = 3m(m-2)$$

Estas son las célebres fórmulas de Plücker. De ellas se deduce que para toda curva de grado ***n*** sin puntos singulares, sucede lo siguiente:

$m=n(n-1)$ $i=3n(n-2)$ $t=n(n-2)(n^2-9)/2$

BIBLIOGRAFÍA

- BIX, R. (1998), *Conics and cubics. A Concrete Introduction to Algebraic Curves*, Springer, New York.

- GRAY, J. (1990), “Algebra in der Geometrie von Newton bis Plücker”, en *Geschichte der Algebra*, Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich.

- MORENO CASTILLO, R. (2005), *Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría*, Editorial Nivola, Madrid.
- MORRIS, K. (1994), E*l pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid.