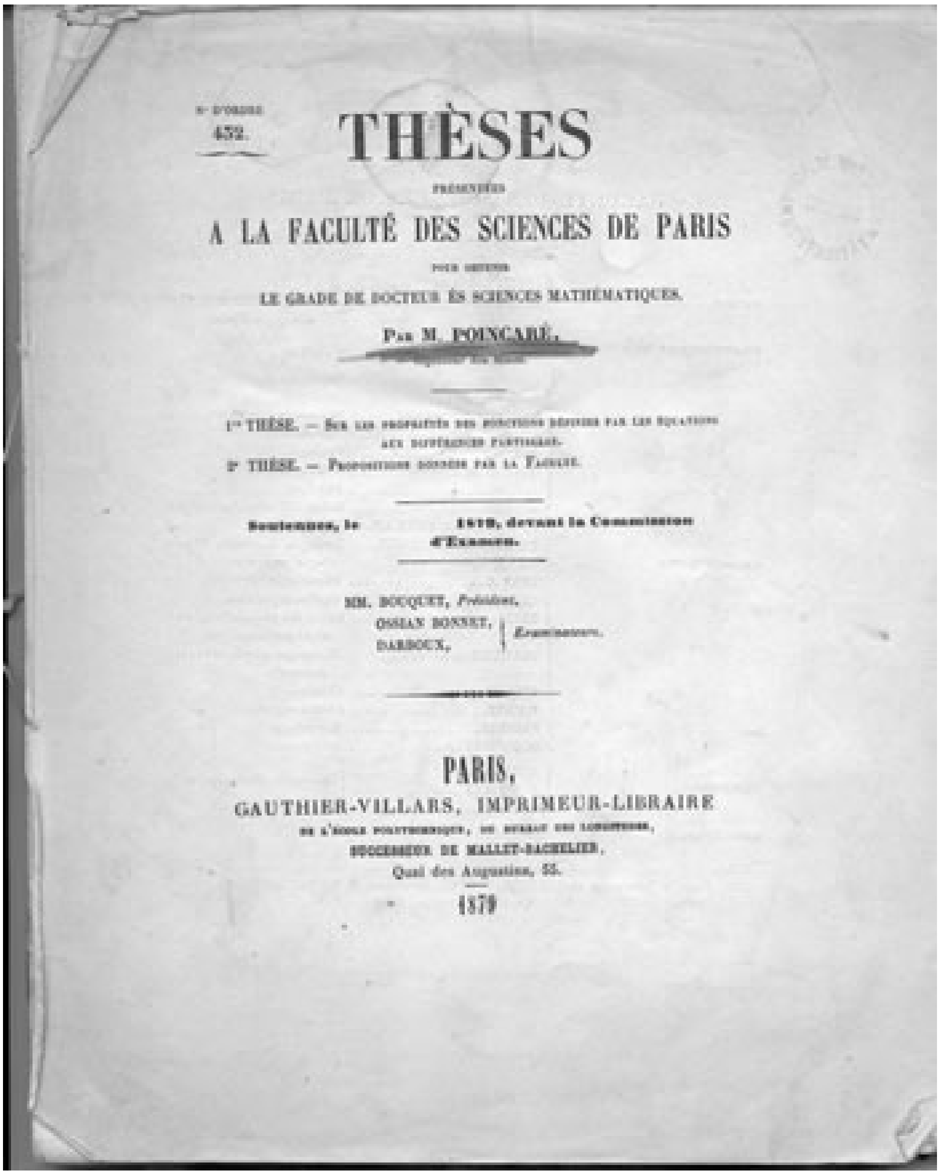
Muchos de los grandes nombres de la historia de la matemática no han hecho sólo -¿ni principalmente?- matemática: la "Geometría" de Descartes es un apéndice del Discurso. Newton escribió *también* los Principia, Leibniz.... Incluso sin salir de la matemática, no sólo autores de obra muy extensa, como Euler o Lagrange, hicieron contribuciones a todas o casi todas sus ramas; también hicieron lo mismo gentes de obra escasa (en volumen): Fermat, Abel. Todavía a lo largo del siglo XIX fueron muchos quienes, además de los citados, siguieron en esa línea: Gauss, Dirichlet, Cauchy, Riemann,… Pero algo cambia, se diría, hacia el final del siglo, la especialización ha ido haciéndose más y más estrecha, y suele dudarse entre Hilbert y Poincaré a la hora de decidir quién fue el último "matemático universal". Con el añadido de que ambos dedicaron tiempo y trabajo a la Física, algo que es -y sobre todo fue- mucho más conocido en el segundo caso que en el primero.

Jules-Henri Poincaré nació en Nancy en 1854, en una familia de clase media alta muy ligada a la universidad y a la administración, algo más frecuente en Francia que en España. Su padre fue profesor de universidad además de médico, y su primo Raymond, varias veces primer ministro, llegó a presidente de la República durante la Primera Guerra Mundial. El joven Henri destaca ya en el liceo, gana un premio nacional e ingresa en 1873 en la Escuela Politécnica con el número uno, ingresando también en la Escuela Normal. Escoge la primera y una anécdota, tal vez apócrifa, lo muestra contestando al reproche que le hace un profesor de estar distraído con la repetición al pie de la letra de lo dicho por éste durante los últimos minutos. Tras trabajar como ingeniero por poco tiempo, presenta su tesis doctoral en matemáticas en 1879, mientras escribe una novela que no llega a terminar, enseña otro poco en Caen y en 1881 es nombrado profesor en París, de donde ya no se moverá. Allí muere demasiado joven, tras una intervención quirúrgica, en 1912. Tuvo una vida tranquila y sin incidentes marcados. Fue hecho miembro de la Academia de Ciencias a los 33 años y de la Academia Francesa, donde se le dijo que "no tenía más historia que su bibliografía", en 1908. Recibió numerosos premios y distinciones y fue mucho más famoso y conocido que otros científicos.


N° D'ORDRE
432.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PAR M. POINCARÉ,

1re THÈSE. — SUR LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues, le 1879, devant la Commission d'Examen.

MM. BOUQUET, *Président*,
OSSIAN BONNET,
DARBOUX, *Examinateurs*.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1879

Como científico es autor de una obra extraordinariamente extensa realizada, según todas las apariencias, con facilidad asombrosa. Escribió unos 500 artículos y sus Obras Completas ocupan once volúmenes, aun sin incluir los tres tomos de los Métodos nuevos de la Mecánica Celeste : como Euler y Bach, no como Riemann y Beethoven. Escribía mucho, con gran facilidad, y de él se ha dicho, como antes de Cauchy, que dio lugar a que se impusieran limitaciones al número de páginas de las notas que podían publicar los académicos. Tuvo en cambio, como después Lebesgue, muy pocos discípulos. Y fama, sobre todo en ciertas épocas, de leer muy poco a sus colegas.

Vamos a exponer brevemente, más o menos en orden cronológico, algunas de sus aportaciones más importantes a la matemática.

FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA. FUNCIONES

AUTOMORFAS

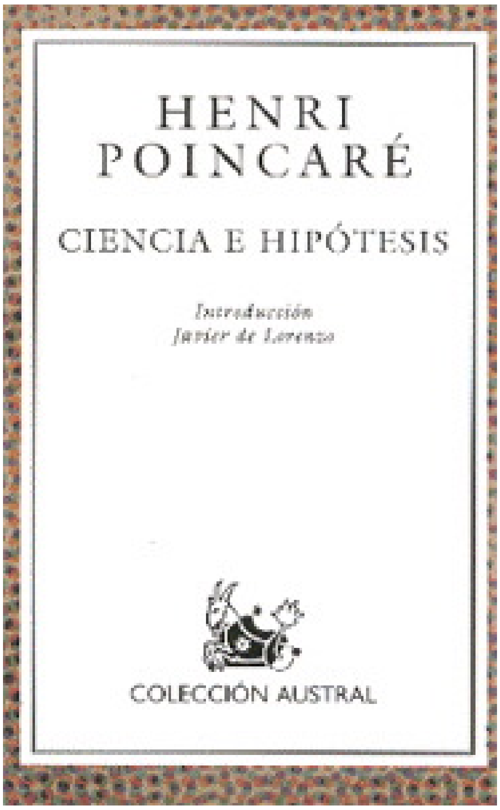
Con su paso por Caen y la famosa historia del pie apoyado en el estribo del autobús está asociado el arranque de sus trascendentales aportaciones a esta teoría. Poincaré demostró que para todo grupo de transformaciones de la forma (az + b) / (cz + d), con ad - bc = 0 de un dominio D del plano complejo que tiene la propiedad de ser "propiamente discontinuo" existe lo que se llama un "dominio fundamental", cuya frontera está formada por segmentos o arcos de círculo, y cuyas transformadas mediante los elementos del grupo recubren el dominio D sin que haya solapamiento. D puede ser el semiplano superior o el interior de un círculo, pero puede igualmente poseer una frontera que sea un conjunto perfecto no denso, o una curva sin tangente en ningún punto. En la demostración de Poincaré se usa de manera muy inteligente y original la geometría no euclídea, de la que había hablado bastante mal poco antes, privilegio de los grandes matemáticos...Aquí tuvo lugar una dura lucha con Klein, que se suele decir tuvo como consecuencia un hundimiento psicológico del que Klein nunca se recuperó del todo.

Estudia las funciones automorfas (cocientes de funciones thetafuchsianas, relacionadas con ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden) con coeficientes racionales P y Q estudiadas por Fuchs, de ahí su nombre. Poincaré aplicó estas funciones fuchsianas a la representación paramétrica de curvas algebraicas P(x, y) = O y a la expresión mediante ellas de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes funciones algebraicas. Estos resultados fueron probados (o "probados") usando el que después sería el muy conocido método de continuación, para el que entonces (hacia 1880) no se disponía de bases topológicas sólidas, que aportaron los trabajos de Brouwer, en particular su teoría del grado topológico (en dimensión finita), de hacia 1912.

Consecuencia de lo anterior fue el teorema general de "uniformización", a partir de la parametrización de curvas algebraicas. Este teorema equivale, bajo ciertas condiciones, a la existencia de una representación conforme de una superficie de Riemann. También aquí hubo problemas con el rigor, no sólo por su parte sino también por la de Koebe, hasta que en 1907 se llegó a una demostración aceptable.

ECUACIONES DIFERENCIALES. TEORIA CUALITATIVA Poincaré trabajó a lo largo de toda su vida sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones, muy especialmente a la Mecánica Celeste. Además de todo lo relativo a las ecuaciones en el campo complejo, de lo que algo se ha dicho arriba, le debemos lo que se llama “teoría cualitativa”, que ha sido, según Dieudonné, “uno de los pocos ejemplos de teoría matemática que surge aparentemente de la nada y casi inmediatamente alcanza la perfección en manos de su creador”.

Entre 1880 y 1886 publicó una serie de artículos fundamentales sobre la cuestión. En ellos estudia ecuaciones de la forma $dy/dx = P/Q$, donde P y Q son polinomios reales generales, procurando describir el comportamiento, las “propiedades cualitativas”, de todas sus soluciones. Para ello, y a fin de evitar dificultades con las “ramas infinitas”, proyectaba las trayectorias desde el centro de una esfera situada fuera del plano, iniciando de este modo el estudio de las curvas integrales de un campo de vectores sobre una variedad compacta.



En este estudio desempeñan un papel muy importante las soluciones de equilibrio (o puntos críticos), es decir, las soluciones del sistema estacionario $P = Q = 0$, que se clasifican en nodos, puntos de silla, centros y focos (o “espirales”). Demuestra el famoso teorema según el cual se tiene $N + F - C = 2 - 2p$, donde N es el números de nodo, E el de focos, C el de puntos de silla y p el género de la superficie (que es $p=0$ para la esfera o el plano y $p=1$ para el toro); nótese el parecido con el teorema de Euler para los poliedros de que se habla más abajo. Estudia asimismo las ecuaciones de orden superior, es decir ecuaciones en variedades de dimensión > 2, donde usa el índice de Kronecker para establecer resultados que hacen intervenir conceptos de la topología algebraica, como por ejemplo los números de Betti.

En el curso de estos estudios introduce diversos métodos y conceptos nuevos que han perdurado hasta hoy, entre ellos el de las llamadas “secciones de Poincaré” y el “operador de Poincaré” asociado; recordemos también resultados relativos a la existencia y propiedades de los llamados ciclos límite (soluciones periódicas “atractivas”), alguno tan famoso como el teorema de Poincaré-Bendixon. (Uno de los famosos 23 problemas de Hilbert -el 16- se refiere precisamente al número de ciclos límite, y sobre él se sigue trabajando a fondo hoy).

MECANICA CELESTE

En 1878 Hill había encontrado una solución periódica para el problema de tres cuerpos cuando la masa de dos de ellos es despreciable con respecto al otro. En 1883 Poincaré prueba, usando el índice de Kronecker, la existencia de todo un continuo de ellas.

La convocatoria en 1885 de un premio para conmemorar el sesenta aniversario del Rey de Suecia Oscar II ayudó tal vez a que Poincaré se concentrara aún más en el problema de n cuerpos y cuestiones anejas. Estudia de nuevo el problema de tres cuerpos cuando una de las masas es nula y la otra (m) muy pequeña. Partiendo de la existencia de una solución periódica “trivial” para m=0, utiliza un método de “perturbación” a fin de obtener nuevas soluciones próximas para m pequeña, soluciones que obtiene en la forma de series de potencias en m con coeficientes funciones del tiempo. No es evidente que las series obtenidas de esta manera por otros autores-Euler, Lagrange, Lindstedt- fueran uniformemente convergentes y Poincaré muestra que, aunque no es así, son “asintóticas” y pueden resultar útiles en los cálculos. Empieza también a estudiar el problema de la estabilidad, y uno de los resultados más notables es su “teorema de recurrencia”, obteniendo una infinidad de soluciones estables en cierto sentido, y también soluciones inestables, pero que se presentan con “probabilidad nula”, en lo que es una de las primeras apariciones en análisis de lo que hoy llamamos conjuntos de medida cero.

El premio le fue otorgado en 1889 por un muy distinguido jurado que formaron Mittag-Leffler, Hermite y Weierstrass, a los que la lectura de su larga memoria causó dificultades más que considerables. Pero cuando se estaba imprimiendo para su publicación en Acta Mathematica se descubrió un error de importancia, lo que provocó la detención del proceso hasta que Poincaré (que aceptó pagar los gastos ocasionados) dio en noviembre de 1890 una versión corregida. La dificultad surgida tenía que ver con él complicadísimo problema que se presenta al estudiar las soluciones próximas a las soluciones periódicas inestables, lo que da lugar a las soluciones “asintóticas” y “doblemente asintóticas”, a la intersección extraordinariamente intrincada entre las variedades “estable” e “inestable”: este es uno de los primeros antecedentes del “caos determinista”, hoy tan de moda:

“…puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales den lugar a otras muy grandes en los fenómenos finales: un error pequeño en las primeras daría lugar a un error enorme en las últimas. La predicción se hace imposible y estamos ante el fenómeno fortuito”.

Estos problemas han sido objeto de estudio intenso durante muchos años, cristalizando en lo que ha llamado Teoría KAM (de Kolmogorov-Arnold-Moser), una de las más profundas de la matemática contemporánea. FIGURAS DE EQUILIBRIO DE UN FLUIDO En 1885 escribe un artículo fundamental acerca de las figuras de equilibrio que puede adoptar un fluido en rotación sometido únicamente a la fuerza de la gravedad, un problema evidentemente relacionado con la forma (más o menos achatada) de la Tierra y otras cuestiones relativas al Sistema Solar. McLaurin había encontrado elipsoides de revolución a los que Jacobi añadió-después de una presunta demostración de Laplace de que no había otras figuras “casi-esféricas” de equilibrio-una familia de elipsoides con ejes desiguales, y Tait y Thompson (Lord Kelvin) formas anulares; en este último caso las demostraciones no eran del todo rigurosas. Poincaré, desarrollando en parte algunas ideas de Liouville, prueba su existencia y encuentra nuevas series de figuras “periformes”, poniendo también en evidencia un fenómeno de “bifurcación”, es decir, de figuras que pertenecen a dos o más series distintas; hay también un fenómeno de “intercambio de estabilidad”. De aquí surgió una larga discusión sobre el origen de la Luna, en la que tuvo un papel destacado Darwin (hijo) y que no fue zanjada hasta 1915 por J.Jeans.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. TEORIA DEL POTENCIAL

Durante muchos años Poincaré explicó (y escribió) cursos sobre casi todas las ramas de la Física desde el punto de vista de lo que se denomina, tal vez un poco imprecisamente, Física Matemática, lo que le llevó a notar que “las propiedades del potencial no siempre habían sido demostradas ni con suficiente generalidad ni con suficiente rigor. Me dí cuenta de ello cuando intenté enseñarlas, y también cuando intenté aplicarlas a cuestiones de Análisis”.

Es muy notable la mezcla de ideas físicas y nociones matemáticas que lleva a cabo en sus trabajos (algo así hizo Klein también), como por ejemplo el papel de las cargas eléctricas y la energía en el tratamiento del problema de Dirichlet **** $-\Delta u = 0$ en D, u = h en S, donde D es un dominio acotado de frontera S y h es continua, usando su método de *“barrido” (bliayage),* donde debe imponer condiciones de regularidad (la de “cono exterior”) sobre S.

También considera el problema de valores propios **** $-\Delta u = \lambda u$ en D, u = o en s, para cuyo estudio establece las llamadas “desigualdades de Poincaré” que tan importantes han venido siendo en el desarrollo de las “soluciones débiles” de las ecuaciones en derivadas parciales, de las que hay algunos antecedentes en estos trabajos. Establece la existencia y propiedades de los valores propios, mejorando mucho resultados previos de Picard y, sobre todo, Schwarz.

TOPOLOGIA ALGEBRAICA

He aquí otra rama de la matemática para la que Poincaré puede reclamar el título de fundador: “todos los problemas -escribe en 1901- que atacaba me conducían al *Analysis Situs* [en terminología de la época]”.

En 1894 inició una serie de artículos donde pone los cimientos de la topología algebraica (que entonces se llamó también topología combinatoria), que tan enorme desarrollo tuvo a lo largo del siglo XX. Crea lo que hoy llamamos homología simplicial; es decir, triangulaciones, subdivisión baricéntrica, complejo dual, papel de los números de Betti. Esto le permite generalizar el famoso teorema de Euler para poliedros, el que se resume en la igualdad C + V - A =2, donde C es el número de caras, V el de vértices y A el de aristas. Con su resultado se cierra precisamente la parte del libro Pruebas y refutaciones, de Imre Lakatos, dedicado en gran parte a este teorema. Define el llamado grupo fundamental o primer grupo de homotopía. Alguno de sus enunciados no se demostró hasta muchos años después (por de Rham en 1931).

En su último artículo sobre ecuaciones diferenciales, escrito el mismo año de su muerte, muestra que la existencia de soluciones periódicas del problema restringido de tres cuerpos se reduce a un teorema de punto fijo para cierta función definida en el plano, lo que se ha llamado “último teorema geométrico de Poincaré”. Quedó sin demostrar, algo que hizo G.D.Birkhoff poco después de su fallecimiento.

Un siglo después de haber asentado sus fundamentos, Poincaré vuelve-o sigue, si se prefiere-en el escaparate. Desde hace algún tiempo viene hablándose ampliamente en el gremio de si los trabajos del matemático ruso Grisha Perelman proporcionan la demostración del único caso(n = 3) de la llamada Conjetura de Poincaré, es decir, que toda variedad compacta de dimensión n orientable y con primer grupo de homotopía trivial es homeomorfa a la esfera.

La conjetura fue enunciada por el propio Poincaré en 1904, precisamente para n = 3, parece que antes había dado una presunta demostración… para la que él mismo halló un contraejemplo. Este es justamente el único caso hoy pendiente de solución. En efecto, la conjetura, que es trivial para n = 1 y clásica si n = 2, fue extendida a todo n y demostrada para n > 4 por S.Smale (Medalla Fields en 1966). El caso n = 4 lo fué por M.Freedman en 1982 (lo que le valió la medalla Fields de 1986) usando ideas y métodos en apariencia muy alejados de estos dominios que han hecho avanzar la teoría de las 4-variedades.

Vamos a resumir ahora, para terminar, casi telegráficamente, otras de sus contribuciones a la matemática:

Funciones de varias variables complejas: Fue uno de los fundadores de la teoría, que aplicó a la de las funciones abelianas. Extiende nociones como representación conforme y residuo, contribuyendo a sentar las bases de lo que después se llamó “geometría analítica”.

Teoría de números: Estudia la teoría aritmética de formas, extendiendo algunos resultados de Hermite y Jordan. Su último trabajo en la materia, de 1901, abre el camino a la geometría algebraica sobre el cuerpo de los racionales dentro de la teoría de las ecuaciones diofánticas. Dieudonné llega a sugerir que pudo conjeturar el famoso teorema de Mordell (1922), después de Mordell-Weil -el grupo de puntos racionales de la curva es de tipo finito- y que alguna de sus técnicas influyó en la prueba de Mordeil.

Algebra: Se ocupa de sistemas hipercomplejos. Introduce la noción de ideal en un álgebra. Se interesa por los grupos y álgebras de Lie, introduce la noción de "álgebra envolvente" y demuestra el teorema que hoy se llama de Poincaré-Birkhoff-Witt, importante en la teoría.

Geometría algebraica: Trabaja en la reducción de funciones abelianas, generalizando resultados de Jacobi, Weierstrass y Picard; también generaliza resultados de Riemann para funciones theta. Hacia 1910 se ocupa de curvas sobre una superficie algebraica, y da la primera demostración rigurosa él -con su fama no del todo inmerecida- de un muy discutido teorema de Castelnuovo, Enriques y Severi, cuya demostración no era correcta. Hasta 1965 no se consiguió dar otra demostración adecuada.

La teoría de la luz y el electromagnetismo fueron dos de sus principales intereses en la Física, estudiando las teorías de Lorentz y el papel del éter. Escribió un célebre artículo sobre "La dinámica del electrón" y contribuyó al desarrollo de las ideas de Lorentz y del "principio de relatividad", de manera que se le ha considerado -no por todo el mundo y no sin complicadas discusiones, en las que podemos entrar aquí- como uno de los inventores de la Teoría (restringida) de la Relatividad.

Pero para algunos el más interesante de estos aspectos es el que se refiere directamente a la actividad del matemático. Sus textos sobre el descubrimiento en matemática son ya clásicos desde hace muchos años. Para Poincaré:

"La actividad del matemático consiste precisamente en coleccionar los hechos, en reconocer lo que se esconde tras ellos, captar las analogías y encontrar las leyes que unen hechos ajenos a primera vista, buscar la elegancia en los métodos y la economía en el pensamiento". Esto último, en cambio, parece de Dieudonné. O de Bourbaki.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Las Obras completas de Poincaré han sido publicadas por Gauthier-Villars en París en 11 volúmenes. De los tres libros con los métodos de la Mecánica Celeste se han hecho varias reediciones. Otros libros y cursos han sido reeditados en facsimil en la editorial Jean Gabay, de París.

[2] Los cuatro libros que recogen casi todos sus escritos sobre cuestiones "filosóficas"-Ciencia y método, La ciencia y la hipótesis, Últimos pensamientos, El valor de la ciencia - han sido traducidos al castellano (no siempre bien) en la Colección Austral de Espasa-Calpe. El segundo ha sido reeditado en 2002 con una introducción de Javier de Lorenzo; los otros tres están agotados hace tiempo, y sería deseable su reedición en buenas condiciones. Los originales franceses son reeditados con cierta frecuencia por la editorial Flammarion, de París.

[3] No hay ninguna gran biografía ni tampoco ningún estudio sistemático y general de su obra. Puede verse J.Hadamard, L'oeuvre mathématique de Poincaré, Acta Math. 38(1921), 203-287. Una corta biografía científica es la de J.Dieudonné en el Dictionary of Scienfific Biography, de Scribner's, Nueva York, tomo 11-12, 1981 pags. 51-61.

[4] Puede encontrarse mucha información, no muy accesible para el lector no especialista en F.E. Browder (editor). The Mathematical Heritage of Henri Poincaré (2 volúmenes). American Mathematical Society, 1983. Incluye el "Analyse de ses travaux scientifiques", del propio Poincaré(vol. 2, pags 257-357) así como el artículo de Hadamard arriba citado(vol.2, pags. 359-439)

[5] Un texto muy legible y útil es U.Bottazzini, Poincaré. philosophe et mathématicien, Pour la Science, agosto-noviembre 2000.

[6] Naturalmente, se habla de él en las historias generales de la matemática, como las bien conocidas de Boyer y Kline. La referencia del libro de Lakatos es I. Lakatos. Pruebas y refutaciones. Madrid, Alianza Universidad 206, 1978.

[7] Para su papel en la Teoría de la Relatividad, puede verse J.M.Sánchez Ron, El origen y desarrollo de fa relatividad, Madrid, Alianza Universidad 362, 1983.

[8] En cuanto a su filosofía de la matemática puede verse J. de Lorenzo. La filosofía de la matemática de Jules-Henri Poincaré. Madrid, Tecnos, 1971.