Categoría: **Historia de las matemáticas**

Autor:

Pedro Miguel González Urbaneja

Editorial:

Nivola. Colección Ciencia abierta

Año de publicación:

2008

Nº de hojas:

368

ISBN:

978-84-96566-98-9

Tenemos entre las manos un libro interesante y ameno; erudito sin caer en la pedantería; divulgativo por su claridad de exposición; básico, pues examina los aspectos fundamentales relacionados con el nacimiento y creación del cálculo integral. Contiene numerosas referencias históricas y bibliográficas sobre el tema que aborda, sin descuidar el análisis riguroso y el comentario objetivo. El profesor González Urbaneja realiza un recorrido esencial a través de los diversos métodos de exhaución ideados para componer cuadraturas; desde los más primitivos, practicados por Antifón y Bryson; deteniéndose en las elegantes deducciones concebidas por Euclides; escudriñando los complejos razonamientos planteados por Arquímedes; y mostrando las construcciones con indivisibles llevadas a cabo por Cavalieri, Fermat y Pascal. Comienza su obra exponiendo los aspectos más relevantes de la geometría y la filosofía griegas: las aporías de Zenón, el entorno de la Academia, el pensamiento de Aristóteles. Después, revisa los enunciados euclídeos y repasa las principales obras arquimedianas: *Sobre la esfera y el cilindro, De la medida del círculo, La cuadratura de la parábola, Sobre conoides y esferoides, Sobre las espirales, Sobre los cuerpos flotantes, Del equilibrio de los planos* y, muy especialmente, *El Método*.

Mucho antes que Arquímedes, los matemáticos de la Antigüedad habían comprobado que las superficies curvas contienen un elemento de irracionalidad que dificulta su medida. El descubrimiento de la inconmensurabilidad no hizo sino confirmar este hecho: no existe una medida común a todas las magnitudes, de la misma manera que la unidad es la medida del número. Los matemáticos griegos se enfrentaron a este dilema tras descubrir la inconmensurabilidad entre la diagonal y el lado del cuadrado, o entre el perímetro del círculo y su diámetro. Los escribas babilonios y egipcios trabajaron con números muy próximos a estas cantidades, pero desconocían el significado del término razón, que enlaza magnitudes homogéneas, o el de antifairesis (también llamado *algoritmo de Euclides*), que compara secuencias de sustracciones sucesivas. Eudoxo de Cnido, insigne representante de la Academia platónica, enunció los conceptos de razón y proporcionalidad para determinar la medida de cualesquiera magnitudes, pues la antifairesis resultaba útil solamente entre pares de números o en sus representaciones lineales. El cálculo de magnitudes irracionales precisaba establecer una relación de proporcionalidad entre razones, o entre razones y proporciones numéricas. Euclides recogió este pensamiento en los libros V y VI de los *Elementos*.

Los matemáticos griegos concibieron el método de exhaución para encontrar la medida del círculo. Este procedimiento se apoya en la hipótesis de que la diferencia entre la superficie de un círculo y uno de sus polígonos inscritos puede ser tan pequeña como se quiera; todo depende del número de lados que contenga ese polígono. Así, Hipócrates de Quíos y Demócrito de Abdera, determinaron que *los círculos son uno a otro como los respectivos cuadrados de sus diámetros*, aunque ambos matemáticos introdujeron en su razonamiento sumas infinitas y un límite (el contorno de la curva) que desvanecía esa diferencia. Desde una perspectiva platónico-aristotélica, este modo de proceder infringía el postulado de homogeneidad (identificaba líneas curva y poligonal) y contradecía el *dictum divisibilidad infinita*, que niega el continuo formado de puntos; pues esta corriente filosófica (acorde con el pensamiento euclídeo) aborrecía del infinito; al menos, del *infinito actual*, que contempla universos ilimitados coexistentes. Para Aristóteles, infinitas magnitudes finitas componen un todo infinito; por tanto, imposible. A lo único que el filósofo de Estagira no ponía trabas era a la acción de dividir en el continuo o de añadir en el número.

El método de exhaución, convertido en teorema por Euclides (*Elementos* X.1), dejaba un resquicio abierto a contradicciones, aunque el geómetra alejandrino insistiera en que las diferencias entre las superficies curva y poligonal siempre eran finitas. Arquímedes fue consciente de las dificultades que entrañaba la aplicación de este teorema e intentó precisarlo aún más, proponiendo el llamado *axioma de continuidad* (por ejemplo, en *Sobre la esfera y el cilindro* I, asunción 5), que asegura la homogeneidad entre esas diferencias y las figuras de las que se extraen. Ajustándose a este principio, las construcciones de Hipócrates y Demócrito no contradecían los postulados filosóficos, pues las dichas diferencias nunca podrían ser líneas, respecto de las superficies, o planos en relación a los sólidos.

Arquímedes fue heterodoxo en muchos aspectos, nos dice el Profesor González Urbaneja.

No sólo se desligó de las tesis platónicas, también introdujo elementos ajenos al contexto de la geometría, procedentes del entorno de la mecánica, como son las líneas y los planos de anchura unitaria, semejantes a los contrapesos utilizados en la balanza. Extrajo de las máquinas simples las relaciones que luego trasladaba a la geometría. Así consiguió resultados sorprendentes en el cálculo de cuadraturas de segmentos parabólicos, y cubaturas de paraboloides y elipsoides. No obstante, después sometía sus razonamientos al formalismo euclídeo. Todo esto lo dejó explicitado en una obra tan breve como hermosa, dirigida a Eratóstenes, y que tituló *El Método relativo a los teoremas mecánicos*, de la que tenemos una edición en castellano a cargo de los profesores González Urbaneja y Joan Vaqué. Este tratado no se conoció hasta que en 1906, el ilustre investigador Johan Ludvig Heiberg lo descubriera oculto tras los rezos de un palimpsesto medieval procedente de Constantinopla. Por tanto, Bonaventura Cavalieri desconocía el método mecánico arquimediano cuando enunció su *Principio* o cuadratura (cubatura) básica, estableciendo relaciones de proporcionalidad entre *todas las líneas* o *todos los planos* de dos figuras geométricas y esas mismas figuras o cuerpos (*Geometria degli indivisibili*, teorema IV). Tampoco Evangelista Torricelli y John Wallis sabían cómo Arquímedes había obtenido tan óptimos resultados, pero sospechaban que sus procedimientos de exhaución por *compresión* y *aproximación*, con doble razonamiento de reducción al absurdo, habían sido preparados con posterioridad a la obtención de esas soluciones. Durante décadas, los argumentos empleados por estos matemáticos fueron criticados y desautorizados por otros especialistas más ortodoxos (como Paul Guldin), quienes respaldaban los principios aristotélicos que prohíben componer razones entre lo finito y lo infinito o manejar colecciones infinitas de magnitudes finitas. Pues tan complicado era introducir en geometría infinitos elementos indivisibles sin magnitud, como el que éstos tuvieran una anchura específica. La solución a tantas paradojas vendría de la mano de la noción de límite y de la introducción de magnitudes infinitesimales y evanescentes, ordenadas en progresión aritmética y geométrica. Para John Wallis (Arithmetica infinitorum), las líneas y los planos de espesor infinitesimal resuelven el conflicto aristotélico, pues aunque reuniéramos una cantidad infinita de ellos, nunca superaríamos la frontera de la finitud. Y lo mismo sucedía con las magnitudes evanescentes newtonianas. La incorporación a la geometría de las técnicas algebraicas y el estudio de nuevas series determinaron la medida de las cuadraturas.

Pedro M. González Urbaneja ha escrito numerosos artículos relacionados con el origen y evolución del cálculo infinitesimal y en 2006 fue responsable (junto a Antonio J. Durán Guardeño) de la edición facsímil del manuscrito de Arquímedes X-1-14, guardado en la Biblioteca de El Escorial. Publicación conmemorativa del ICM celebrado en Madrid ese mismo año.

Materias: Arquímedes, cálculo integral, geometría griega, exhaución.

Autor de la reseña: Piedad Yuste (Departamento de Filosofía de la UNED)