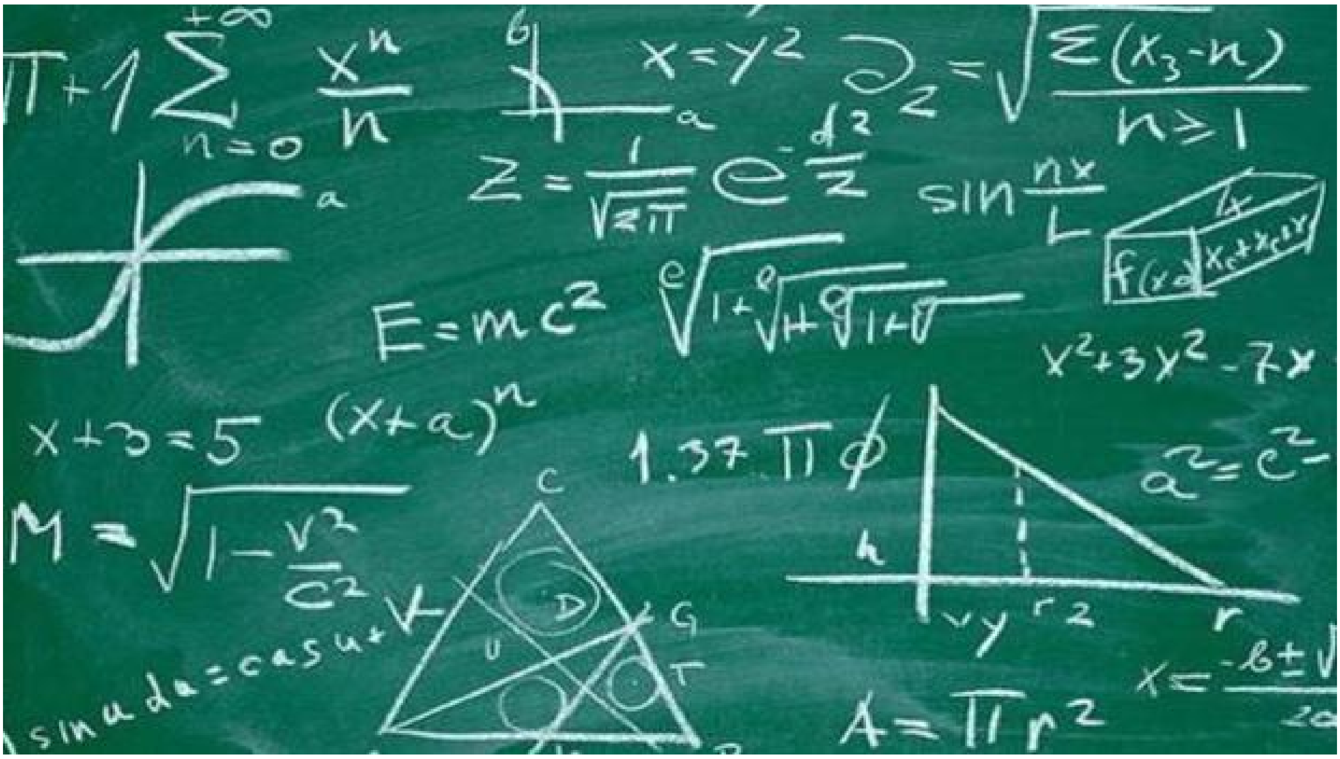
ABC, 19 de Octubre de 2020
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Víctor M. Manero

La inducción matemática es una técnica de demostración que permite probar propiedades que son ciertas para el conjunto de los números naturales



«Si queréis decir a alguien que le queréis para siempre, regaladle un diamante, pero si le queréis decir que le queréis para siempre siempre, regaladle un teorema, eso si…, lo tendréis que demostrar, que vuestro amor no se quede en conjetura». Con este precioso consejo concluía su charla TED '**Las matemáticas son para siempre**' el genial matemático y divulgador **Eduardo Sáenz de Cabezón**.

Y es que es verdad, las personas que nos dedicamos a las matemáticas le damos un valor enorme a esas verdades inmutables y eternas conocidas como teoremas. Eso sí, pagamos un alto precio por ellas y es que las tenemos que demostrar. Pero, **¿qué es una demostración?**

Según la RAE existen varias acepciones para el término demostración entre las cuales destacan las siguientes:

- Prueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes.

- Comprobación, por hechos ciertos o experimentos repetidos, de un principio o de una teoría.

- Fin y término del procedimiento deductivo.

Nos encontramos ya con tres términos de suma importancia para entender la demostración: prueba, comprobación y procedimiento deductivo. Pero, si pensamos en el caso particular de las matemáticas, ¿qué entendemos por demostración matemática?

Según Scheinerman (2001) «En matemáticas, una demostración o bien una prueba es un argumento deductivo para asegurar la verdad de una proposición matemática. En la argumentación se pueden usar otras afirmaciones previamente establecidas, tales como teoremas o bien las afirmaciones iniciales o axiomas».

Cabe destacar que al hablar de demostración matemática la idea de comprobación desaparece, pues si bien puede ser muy útil comprobar que algo se cumple en uno o varios casos, esto no constituye una prueba de que sea cierto en general.

Demostrar versus comprobar

Por ejemplo, puedo comprobar que: un número Q de la forma

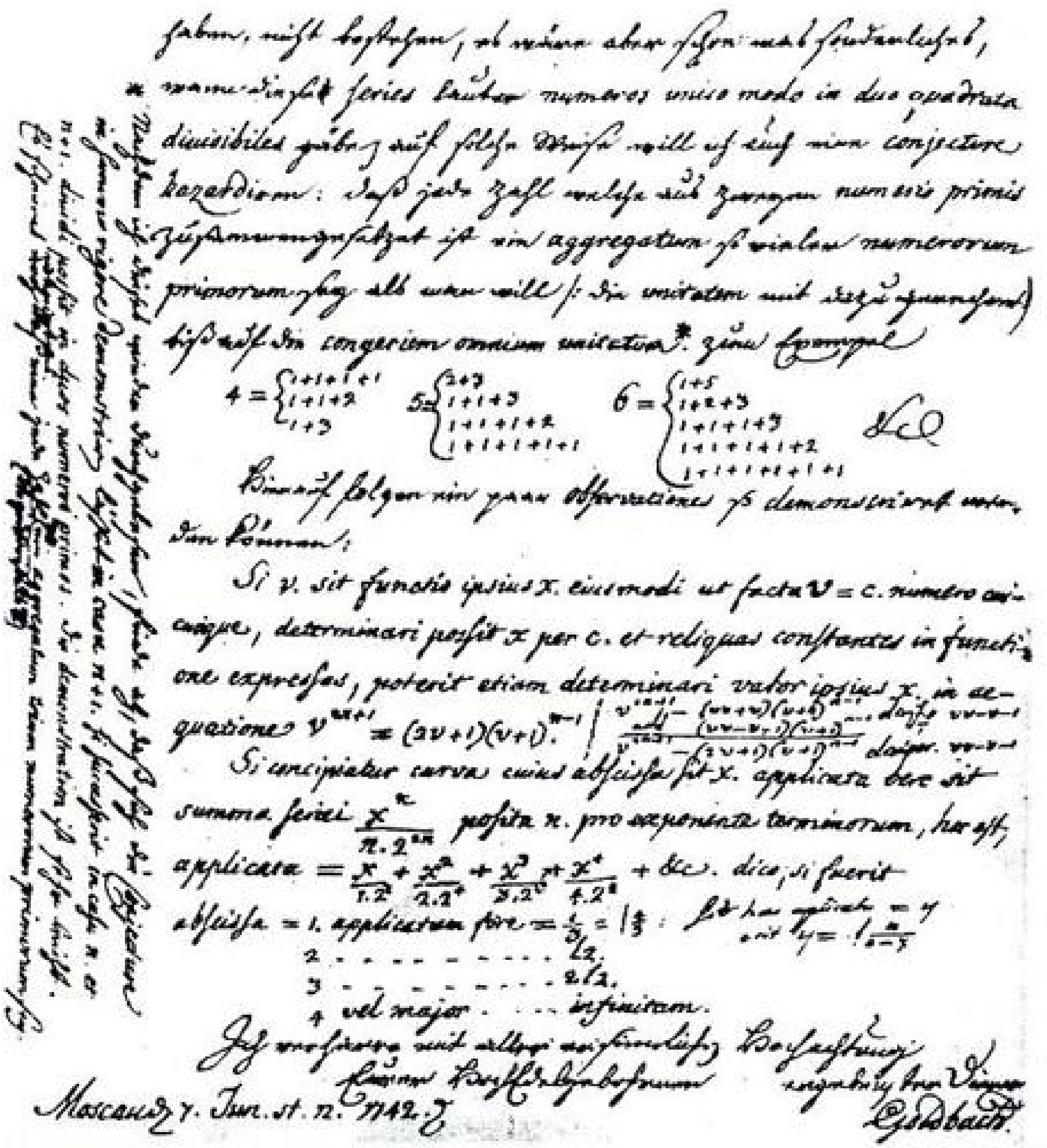
$$2^{2^n} + 1,$$

donde n es un número natural, es siempre primo. Basta ver lo que ocurre con n = 1, 2, 3, 4 para cuyos valores se obtienen, respectivamente, Q = 5, 17, 257, 65537 que son todos primos. Sin embargo, a pesar de que esta comprobación nos lleve a pensar que la afirmación es cierta en general, resulta que no es así y para comprobar la falsedad de la misma no hace falta más que tomar n = 5 por lo que obtenemos Q = 4294967297 el cual no es primo ya se puede descomponer como producto de 671 y 6700417.

Podemos poner ejemplos aún más peliagudos como que: todo número par es suma de dos números primos. Se puede comprobar que esto es cierto para muchos, muchos, muchos casos

4 = 2 + 2; 6 = 3 + 3; 8 = 3 + 5; 10 = 5 + 5; … 1000 = 443 + 557

Es más, a día de hoy no se conoce ningún caso en el que no se cumpla, pero el hecho de que esta afirmación se satisfaga en todos los casos comprobados no constituye una demostración matemática. Por ello este resultado sigue siendo una mera conjetura, conocida como conjetura de Goldbach, en honor al matemático que la enunció hace ya más de 250 años. ¡Y sigue sin ser demostrada!



haben, nicht beytragen, ob wäre aber schon sehr fündenlich, wenn eine jede series lauter numeros unico modo in duo quadrata divisibiles gäbe; auf solche Weise will ich auch eine conjecture hazardiren: daß jede Zahl welche aus zweyen numeris primis zusammengesetzt ist ein aggregatum so vieler numerorum primorum sey als man will (die unitatem mit dazu gerechnet) biß auf die congeriem omnium unitatum. zum Exempel

$$4 = \begin{cases} 1+1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+3 \end{cases} \quad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases} \quad 6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases} \quad \&c.$$

Hierauf folgen ein paar observationes so demonstrirt werden können:

Si v. sit functio ipsius x. eiusmodi ut facta v = c. numero cuicunque, determinari possit x per c. et reliquas constantes in functione expressas, poterit etiam determinari valor ipsius x. in aequatione $v^{2x+1} = (2v+1)(v+1)^{x-1}$ …

Si concipiatur curva cuius abscissa sit x. applicata vero sit summa seriei $\frac{x^n}{n.2^n}$ posita n. pro exponente terminorum, hoc est, applicata $= \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.2^2} + \frac{x^3}{3.2^3} + \frac{x^4}{4.2^4} + \&c.$ dico, si fuerit abscissa = 1, applicatam fore $= \frac{1}{2} = l\,2$.

2 . . . . $l\,2$.
3 . . . . 2 $l\,2$.
4 vel major . . . . infinitam.

Ich verharre mit aller ersinnlichen Hochachtung
Ew. Hochedelgebohren
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau d. 7. Jun. st. n. 1742.

Nachdem ich dieses wieder durchgelesen, finde ich, daß sich die conjecture in summo rigore demonstriren lässet in casu n+1, si successerit in casu n, et si n+1 dividi possit in duos numeros primos. Die Demonstration ist sehr leicht. Es scheinet wenigstens, daß eine jede Zahl, die grösser ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sey.

Inducción matemática, ese arma potentísima

Efecto dominó

La inducción matemática es una técnica de demostración que permite probar propiedades que son ciertas para el conjunto de los números naturales. El principio sobre el que se sustenta esta técnica es sencillo, ya que se basa en el efecto dominó, ese que hace que al empujar la primera pieza de un dominó las demás vayan cayendo detrás.

Si tengo una cierta propiedad, llamémosla P(n), que quiero ver si se cumple o no para todos los números naturales n, lo que debo hacer es lo siguiente:

A. Primero compruebo si se satisface para algún numero concreto, generalmente se usa n = 1.

B. Después, suponiendo que la propiedad se cumple para un número genérico k (esto se conoce como hipótesis de inducción) tenemos que probar que se cumple para el siguiente, es decir, para k+1.

Y si conseguimos hacer estos dos pasos ya hemos probado que la propiedad P(n) se satisface para todos los números naturales, y cuando digo todos, me refiero a todos, todos,

todos. He aquí la explicación:

Teniendo en cuenta la condición A sabemos que la propiedad se cumple para n=1 (equivalentemente P(1) es cierta) y ahora usando B sabemos que si se cumple P(1) se cumple P(2). Volviendo a aplicar B sabemos que si P(2) es cierta P(3) también lo es. Conocido que P(3) es cierta, sin más que aplicar B de nuevo tenemos que P(4) también es cierta. Así usando sucesivamente B se obtiene que la propiedad se cumple para todos los números naturales.

Ejemplo de uso

Pensemos en la siguiente propiedad P(n): un número de la forma

$$n^3 - 7n + 9,$$

donde n es un número natural, es siempre múltiplo de 3. ¿Será cierto? Apliquemos la inducción matemática:

A. P(1) es cierta ya que $1 - 7 + 9 = 3$ que efectivamente es múltiplo de 3.

B. Suponiendo que P(k) es cierta veamos que P(k+1) es cierta.

Esto último es equivalente a probar que

$$(k+1)^3 - 7(k+1) + 9,$$

es múltiplo de 3 suponiendo que

$$k^3 - 7k + 9,$$

es múltiplo de 3. Desarrollando los paréntesis vemos que

$$(k+1)^3 - 7(k+1) + 9,$$

es igual a

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 7k - 7 + 9,$$

que agrupando adecuadamente es igual a

$$(k^3 - 7k + 9) + (3k^2 + 3k - 6),$$

por lo que

$$(k+1)^3 - 7(k+1) + 9 = (k^3 - 7k + 9) + 3(k^2 + k - 2),$$

donde

$$k^3 - 7k + 9,$$

es múltiplo de 3 por hipótesis de inducción y

$$3(k^2 + k - 2),$$

también lo es por razones obvias, lo que permite concluir que

$$(k+1)^3 - 7(k+1) + 9,$$

es múltiplo de 3 o lo que es lo mismo, que P(k+1) es cierta.

Esto concluye la demostración de la parte B, que junto con A nos permite asegurar que efectivamente, si n es un número natural cualquiera, todo número de la forma

$$n^3 - 7n + 9,$$

es múltiplo de 3. Y así es como se consigue, en unas pocas líneas, demostrar que una propiedad es cierta para un número infinito de casos.

Víctor M. Manero es profesor de la Universidad de Zaragoza y miembro de la comisión de divulgación de la Real Sociedad Matemática Española.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la [Real Sociedad Matemática Española (RSME)]