El País, 17 de Diciembre de 2021
LOTERÍA DE NAVIDAD
Adolfo Quirós

El reto que planteamos a los lectores tiene que ver con uno de los aspectos que hace más popular a este sorteo: su capacidad para generar una ilusión colectiva en los grupos de personas que juegan el mismo número

Un año más EL PAÍS propone a sus lectores un desafío matemático con ocasión del Sorteo de la Lotería de Navidad del 22 de diciembre, presentado, como en ediciones anteriores, por Adolfo Quirós Gracián, profesor de la Universidad Autónoma de Madrid y director de La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. Puedes enviar tu respuesta hasta las 00.00 del martes 21 de diciembre (la medianoche del lunes al martes, hora peninsular española) al correo problemamatematicas@gmail.com. Ese mismo día 21 publicaremos la solución.

El desafío de este año tiene que ver con una de las características que hace más popular a este sorteo: su condición de ilusión colectiva, el hecho de que mucha gente juegue para compartir su suerte con otras personas, sean amigos, familiares o compañeros de trabajo (aunque haya quien piense que no es tanto por compartir como por evitar que a esas personas les toque y a ti no). Mi madre, por ejemplo, compra un número al que jugamos toda la familia. Aparte de ese, yo juego décimos del mismo número con mis compañeros de departamento (sí, aunque seamos matemáticos y sepamos de probabilidades, confieso que lo hacemos). También juego un mismo número con gente anónima, como todos los que compramos las participaciones que vende mi ahijada para financiar su equipo de waterpolo.

Vamos a decir que dos personas comparten suerte en Navidad si juegan un mismo número (aunque no necesariamente compartan el mismo décimo). O varios, no importa. En mi caso, debo compartir suerte de forma consciente con unas ochenta personas, y de forma inconsciente con varios cientos (de cada número de la lotería de Navidad hay disponibles 1.720 décimos), pero no sé la cantidad exacta. Y supongo que lo mismo le pasa a los varios millones de personas que juegan a la Lotería de Navidad: salvo algún millonario egoísta que se comprara las 172 series de un número para él solo, todos comparten suerte con alguien, pero nadie sabe exactamente con cuánta gente.

Nuestro desafío de este año parece un trabalenguas pero en realidad es muy sencillo y consiste en demostrar que **el número de quienes comparten suerte en Navidad con una cantidad impar de personas es par.** Recomendamos leer cuidadosamente la frase para no despistarse con lo que hay que probar, pero, para aclararlo, damos un ejemplo.

Supongamos que solo jugasen cinco personas: Ana, Andrés, Cristina, Eva y Pedro. Ana, Cristina y Eva comparten un número entre las tres. Además, Ana comparte otro número con Pedro. Andrés juega a la Lotería de Navidad, pero no comparte número con nadie. Por tanto, Ana comparte suerte con 3 personas (Cristina, Eva y Pedro), Cristina con 2 (Ana y Eva), Eva también con 2 (Ana y Cristina), Pedro con 1 (Ana) y Andrés no comparte suerte con nadie. Vemos entonces que, en este caso, el número de quienes comparten suerte con una cantidad impar de personas, es 2 (Ana y Pedro), y 2 es par.

Lo que pedimos a los lectores es que demuestren que esto sucede independientemente de cuánta gente juegue a la lotería y de con cuánta gente comparta cada uno: **el número de quienes comparten suerte en Navidad con una cantidad impar de personas es, en cualquier caso, par.**

No nos vamos a poner exquisitos con qué es “demostrar”. Aceptaremos como válidas todas las respuestas que den un argumento coherente y convincente de por qué esto es así. Tampoco pedimos que la solución esté escrita con jerga matemática, lo que nos interesa es que la explicación sea clara y, obviamente, correcta. Esperamos vuestras soluciones.