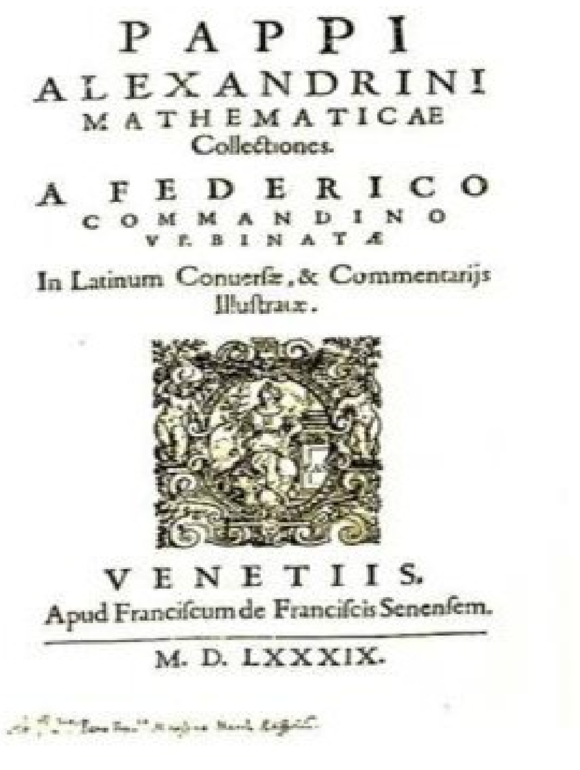
ABC, 2 de Mayo de 2022
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

Pocos teoremas en la Historia han dado pie a tantas repercusiones como el que presentamos, de enunciado muy sencillo por otra parte


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

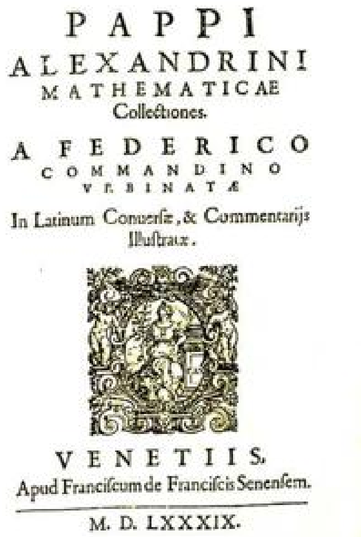

PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
COLLECTIONES
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE
In Latinum conuersæ, & Commentarijs illustratæ.
ET SERENISSIMO PRINCIPI
LEOPOLDO GVLIELMO
ARCHIDVCI AVSTRIAE, &c.
DICATAE.

La semana pasada hablamos del quinto postulado de Euclides (el de las paralelas, ese que ha causado tanto lio a lo largo de los siglos, y ha motivado tantos artículos y tantas búsquedas alternativas). También indicábamos que su sustitución por otros 'parecidos' pero distintos provocó la aparición de las geometrías no euclideas (
geometría esférica
y
geometría hiperbólica
) en el siglo XIX. Pero no vayamos aún tan lejos. Quedémonos en el siglo IV de nuestra era, en la tierra de Euclides, en
Alejandría
. Allí vivió uno de los últimos matemáticos destacados de la Antigüedad, a decir de los historiadores de esta disciplina. Después, en la escuela alejandrina sólo podría destacarse a Teón y a su hija Hipatia, por sus comentarios a otras célebres obras porque, sus obras propias se han perdido totalmente (lamentablemente, a ella se la recuerda más por su espantosa muerte que por sus logros matemáticos, pero así es el género humano, qué le vamos a hacer).

Ese destacado matemático, geógrafo y astrónomo se llamaba **Pappus**, que, para distinguirle de otros homónimos, se le añade el topónimo:

Pappus de Alejandría
. Su biografía se resume rápido porque como otros sabios de la Antigüedad, prácticamente nada se sabe de su vida. Simplemente que era maestro y que tenía un hermano. Gracias a los escritos conservados, y a las referencias de otros autores, sabemos bastante más sobre su obra, y por eso podemos afirmar que fue un gran matemático. Su mayor trabajo es 'La
Synagoge
' (Colección Matemática), compuesta por 8 volúmenes, de los que el primero y algunas partes del segundo no han perdurado hasta nosotros.

Según los historiadores, la forma de escribir de Pappus hereda el estilo que Euclides instauró: relación, ordenada sistemáticamente, de los resultados más importantes obtenidos por sus predecesores a los que añade notas explicativas o de ampliación de esos resultados, algunos originales, otros no. Es patente que se dedicaba a la docencia, ya que presenta unas introducciones y esquemas muy didácticos, buscando ante todo en los comentarios posteriores ser muy claro. Sin embargo, hasta finales del siglo XVI no se pudo aprovechar su contenido ya que tanto árabes como medievales ignoraron (o desconocieron) por completo este tratado. No será hasta 1588 cuando el italiano **Federico Commandino** (1509 – 1575), uno de los más relevantes traductores y editores de obras de la Antigüedad, lo tradujera al latín, aunque como puede verse por las fechas, nunca llegara a verlo físicamente (se editó póstumamente). En el siglo XX ha habido versiones en inglés y francés.

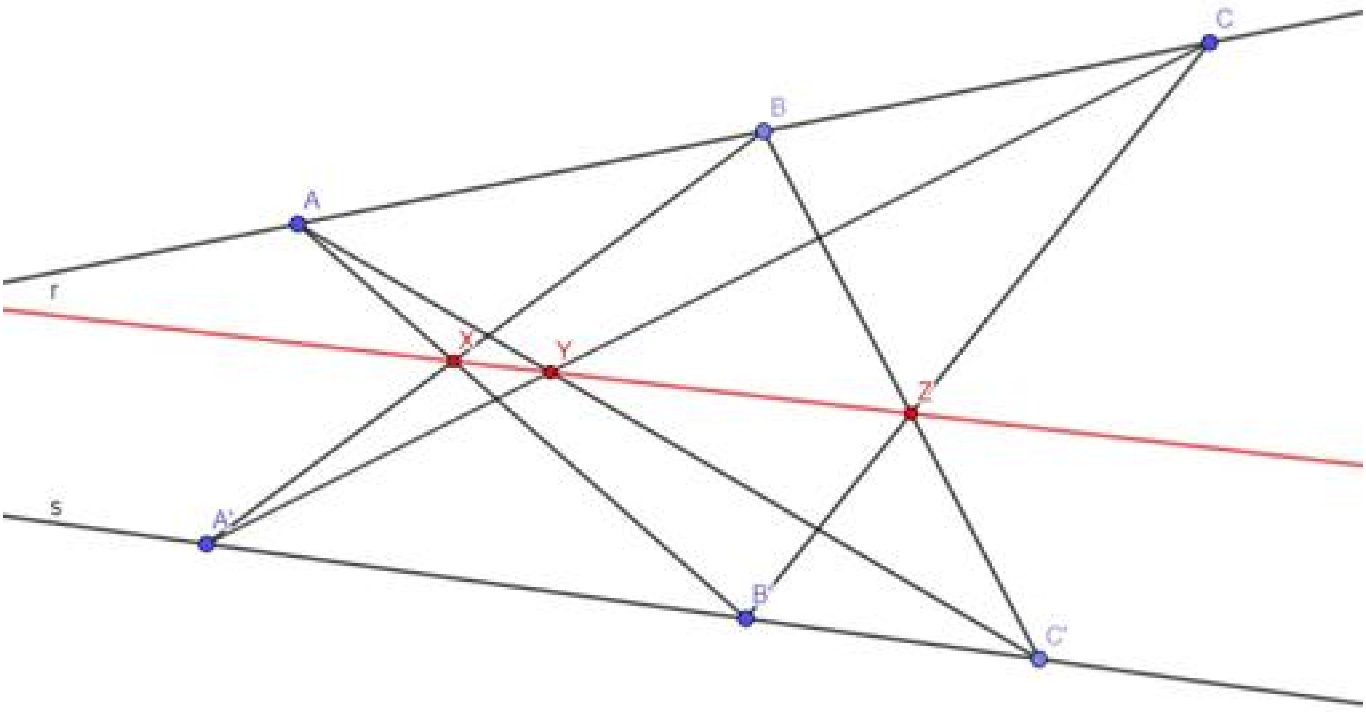

PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

Son varios los resultados de interés compilados y/o comentados por Pappus en su obra (por ejemplo, las conocidas fórmulas sobre los centros de gravedad de los cuerpos en rotación,
teorema de Pappus-Guldin

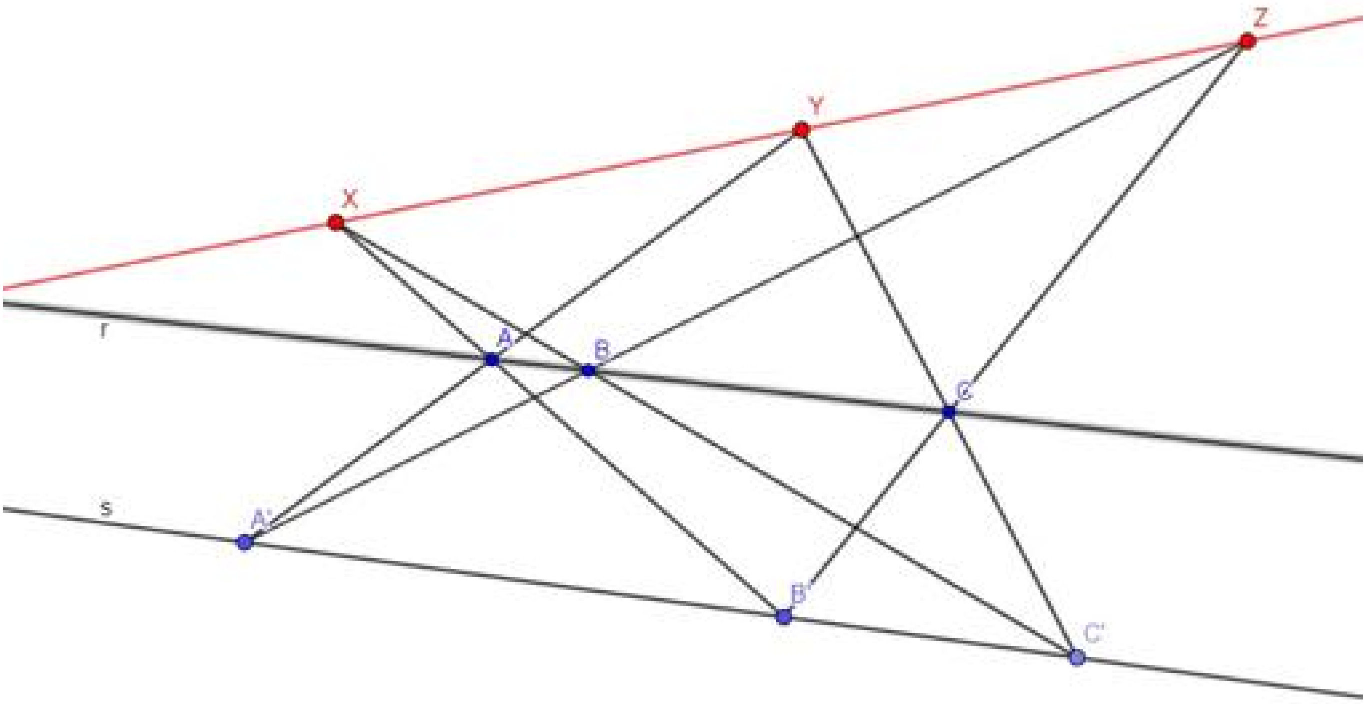
), pero hoy nos referiremos exclusivamente al que cuestiona de alguna manera la geometría euclidea. Y sólo vamos a exponer una pequeñísima parte de sus consecuencias, porque hay tratados bastante gruesos sobre todo lo que involucra ese resultado. La intención de estas líneas es tratar de transmitir cómo una única proposición puede dar tanto juego. Seguramente sea el resultado más relevante de la geometría clásica después de los teoremas de Tales y de Pitágoras, aunque probablemente haya quien considere esa disposición en otro orden, en favor de éste.

Empezaremos diciendo que es de los resultados que menos 'protagonistas' requiere: nueve puntos, nueve rectas y como relación entre éstas sólo su punto de intersección. Aunque en nuestro país se conoce como Teorema de Pappus, 'a secas', en la literatura anglosajona sobre todo se le denomina teorema del hexágono de Pappus. Veamos lo que dice:

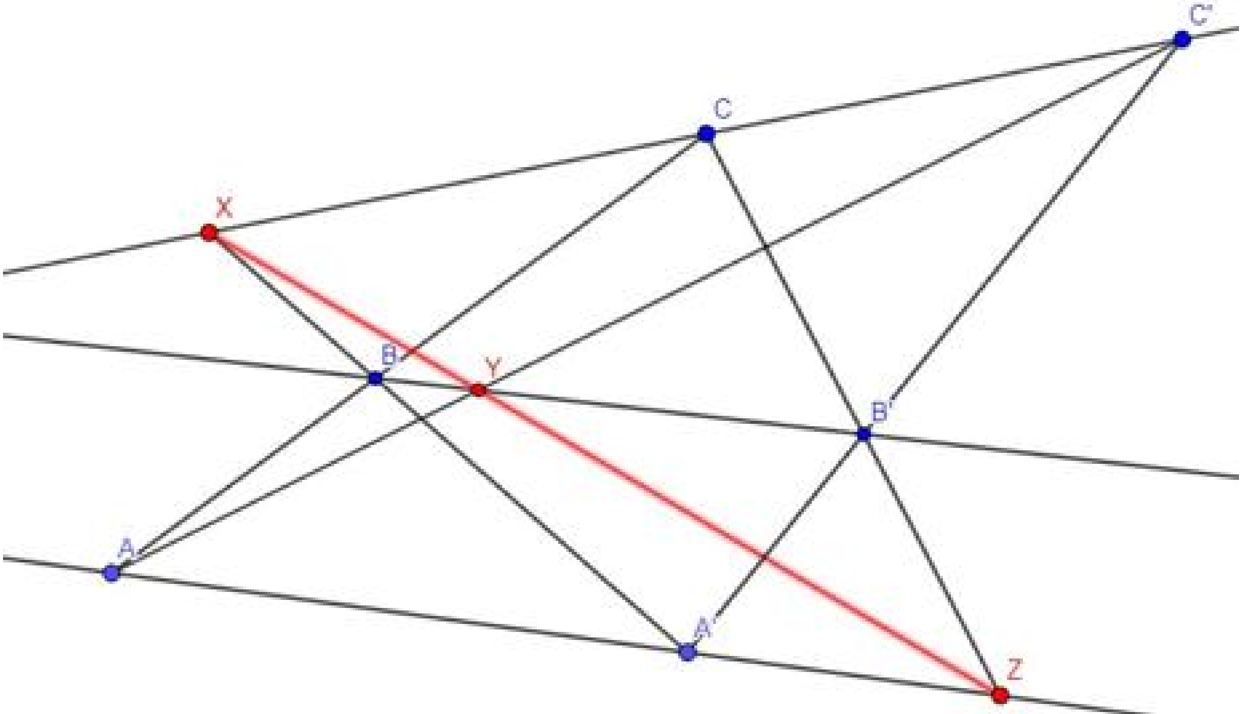
«Si sobre dos rectas r y s, paralelas o no, se toman tres puntos (llamaremos A, B, C los de r, y A’, B’, C’ los de s), entonces los puntos de intersección de los segmentos AB’ y BA’ (sea éste X), AC’ y CA’ (llamémosle Y), BC’ y CB’ (bauticémosle como Z), están alineados»

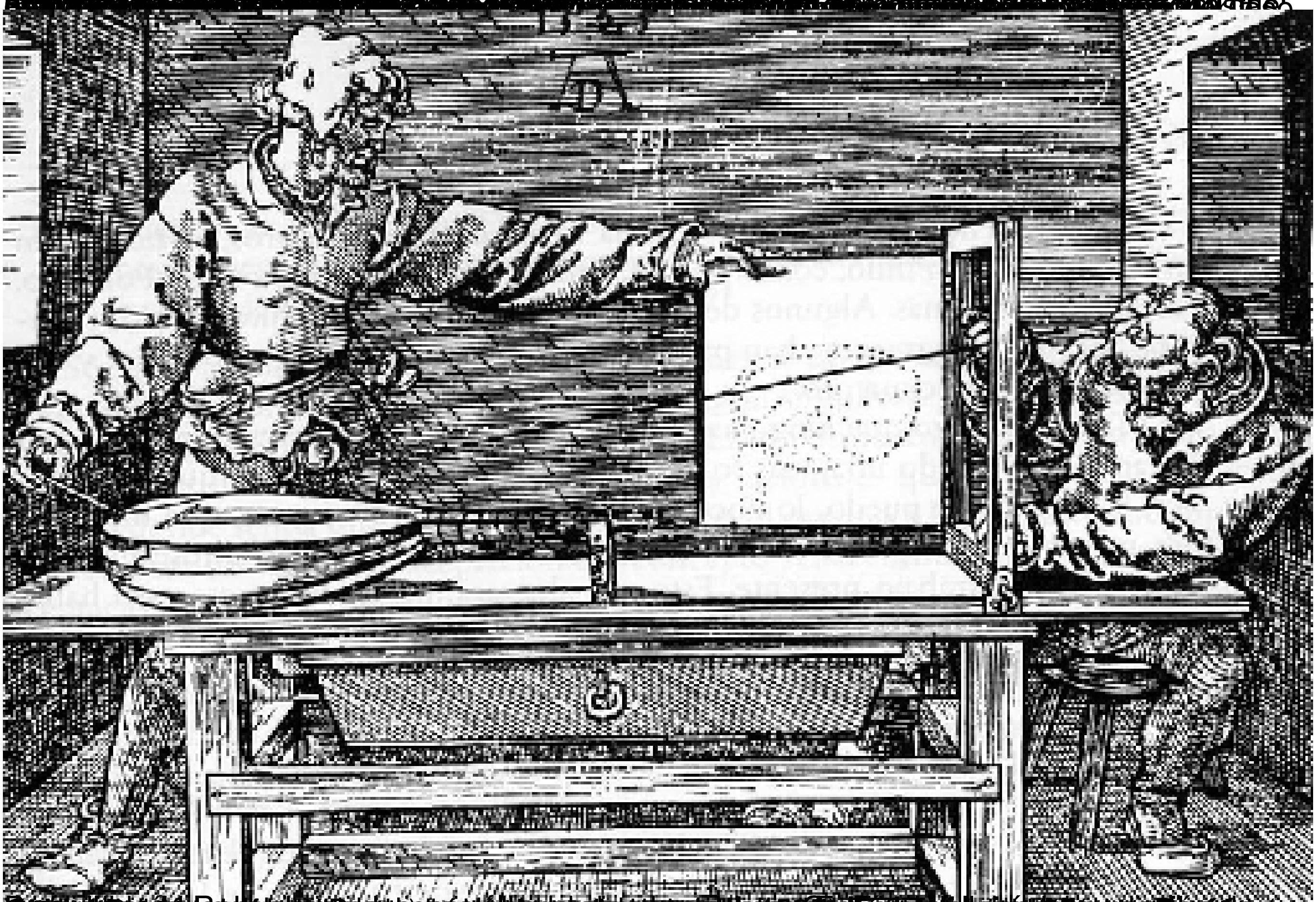


La representación gráfica que hemos hecho es la típica de los textos clásicos de geometría, la que se infiere directamente del enunciado. Sin embargo, podríamos tener esta otra interpretación: si la recta r, en lugar de la original, fuera la que hemos obtenido, y sobre ella hubiéramos elegido como puntos A, B, C, los obtenidos respectivamente X, Y, Z (observen que he cambiado los colores además de las notaciones), si hiciéramos la misma construcción, es decir, unir los puntos del mismo modo que antes, y prolongar las rectas hasta que se corten, obtendríamos que los nuevos X, Y, Z están alineados, ¡¡¡en la recta r primitiva!!! Y además la construcción es idéntica. Sólo hay una cosa que ha cambiado. ¿Se percatan?



Pero no sólo eso. ¡¡¡El papel de cada punto y cada recta es perfectamente intercambiable!!! Es decir, sean ahora A, B, C y A', B', C' los marcados en el nuevo dibujo. Unámosles dos a dos y denotemos por X, Y, Z los puntos de corte. Salen de nuevo alineados, pero es que ¡¡¡la representación gráfica es la misma!!!

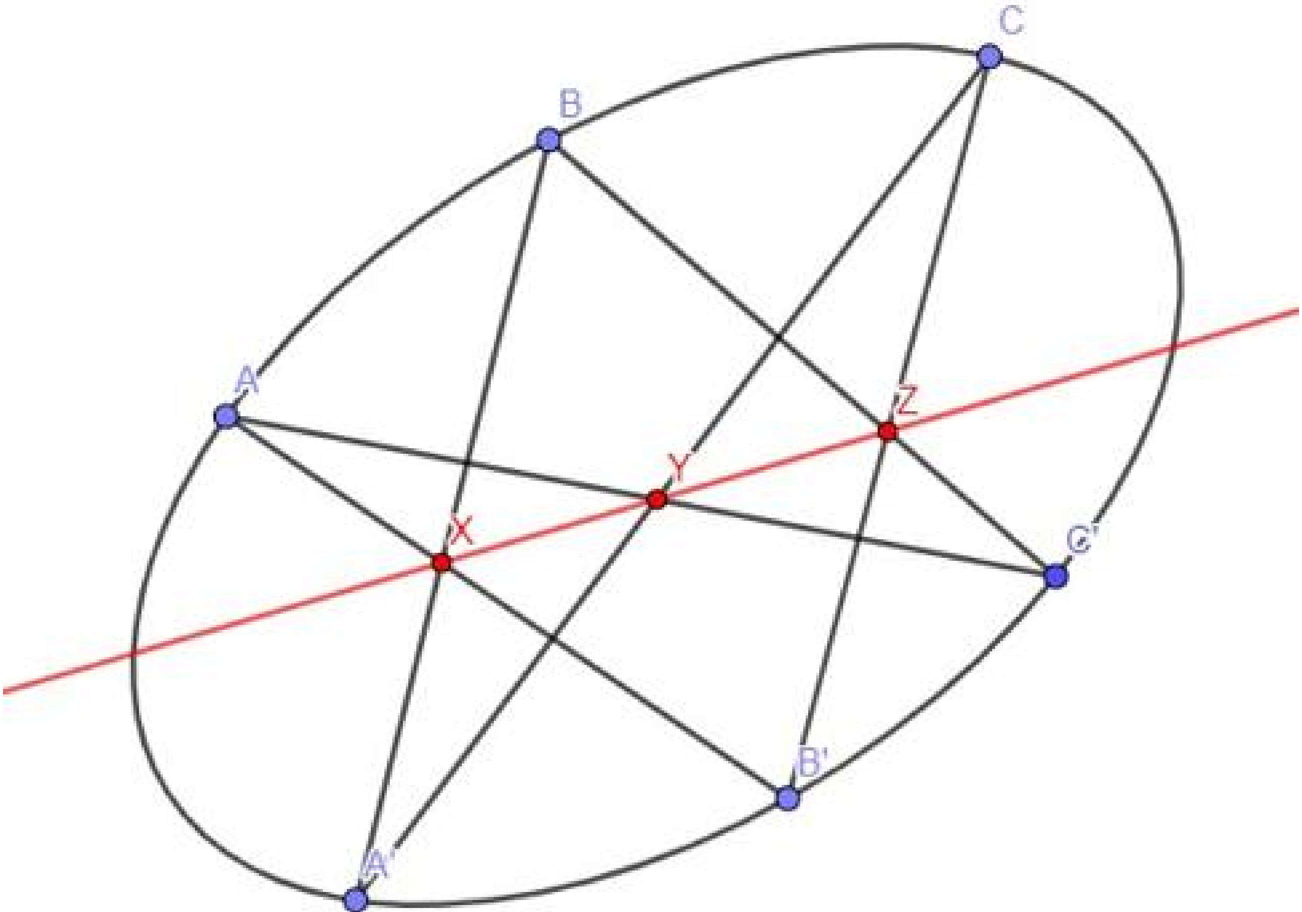




La idea

Todos hemos comprobado en algún momento que, si nos colocamos en medio de las vías rectas de un tren y miráramos hasta que nuestra vista alcance, tenemos la impresión de que las vías se juntan al fondo. Del mismo modo aparece una fotografía tomada desde ese mismo punto. La perspectiva provoca que desaparezca cualquier atisbo de paralelismo. Todo se encuentra en un punto en el horizonte. De hecho, en las fotografías, además el tamaño real de las cosas disminuye, las circunferencias aparecen como elipses, los ángulos de intersección de los segmentos son diferentes a los de la realidad. La geometría proyectiva se fundamenta (Desargues lo fundamenta) precisamente en ese cambio de la realidad a lo que sucede al tomar una fotografía, que es lo mismo que nuestro cerebro hace al mirar 'al infinito'. La geometría euclidea no sirve para esto, porque las distancias y los ángulos se alteran, y desaparece el paralelismo. Todo confluye en un punto, el punto de fuga, el punto que en matemáticas llamamos 'el punto del infinito'. Ahora bien, dado que hay infinitas direcciones posibles para las rectas, hay una infinidad de puntos del infinito, que Desargues establece alineados en una recta, la recta del horizonte. En este contexto, el teorema de Pappus no tiene restricción alguna.

A Blaise Pascal (1623 – 1662) la geometría descrita por Desargues le llama la atención, y trabaja también en ella. Y encuentra una generalización del teorema de Pappus (que pasa a la historia como teorema de Pascal, obviamente; por cierto, lo encontró y demostró, ¡¡con 16 años!!). Pascal demuestra, con las nuevas herramientas de esta geometría proyectiva, que el resultado de Pappus no sólo se verifica cuando tomamos tres puntos en dos rectas, sino que es cierto cuando tomamos seis puntos cualesquiera de cualquier cónica (elipse, hipérbola o parábola), como vemos en la imagen en el caso de una elipse: los puntos de corte de los segmentos están siempre alineados (recta de color rojo)



Newton y los árboles

El matemático y escritor de libros de matemática recreativa inglés **Henry Ernest Dudeney**, atribuye a
Isaac Newton
el siguiente acertijo:

Matemática Española (RSME) ... Real Sociedad