ABC, 20 de Junio de 2022
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

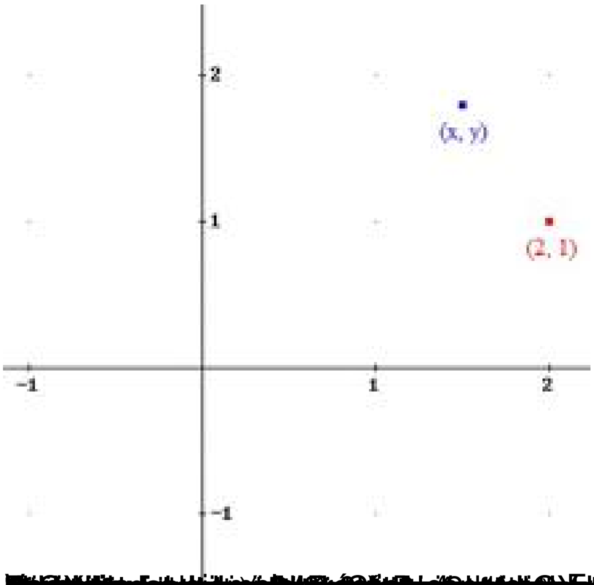
Cuando vean una grúa en una obra, piensen cómo es más sencillo llegar a cualquier punto a depositar los materiales

Adobe Stock

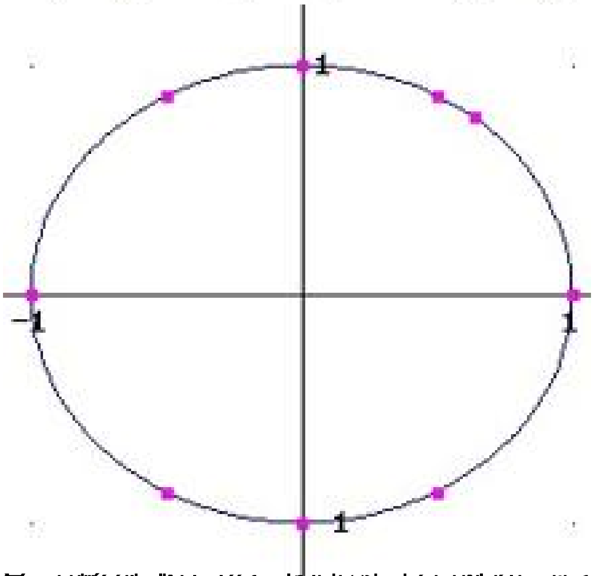
En muchas ocasiones los alumnos de matemáticas (y es de suponer que el ciudadano en general) se preguntan por qué hay tantos resultados, proposiciones, teoremas, propiedades, etc., dando a entender que nos complicamos mucho la vida (y de paso se la complicamos a ellos, claro). Suelo responderles que nada más lejos de la realidad, que todo lo que deducimos es necesario para hacer mucho más sencillas las cosas. Utilizo la analogía con el mecánico o el fontanero: cuantas más herramientas tengan, mejor y más rápido realizarán su trabajo. Si dispusieran de un único destornillador y un único martillo, difícilmente podrían reparar muchas averías. Necesitan un completo juego de utensilios, con diferentes medidas, además. Por supuesto, a ello hay que añadir el saber cómo utilizarlas.

Recuerden el famoso chascarrillo en el que se ha atascado la puerta de una lavadora que no se abre ni a tiros. Llamada al técnico, un par de miradas al aparato, un golpecito en un lugar concreto, se abre, y por la broma solicita 200 € (es una cantidad inventada; probablemente pediría menos, pero aun así demasiado por cinco minutos de 'trabajo', a juicio del cliente).

Y entonces el técnico le aclararía que no es sólo el tiempo, sino también el saber. Para resolver un ejercicio o un problema de matemáticas (o de física, o de química, o de lo que sea), primero hay que entender bien la situación (perdonen que insista en lo que comentamos hace un par de semanas, lo de trabajar y entrenar el sentido matemático : se ha malacostumbrado a los estudiantes a resolver situaciones mecánicas, algorítmicas, de aplicar una fórmula y se acabó; eso no son las matemáticas), analizar (pensar), y utilizar la herramienta que consideramos más adecuada (que a lo mejor no vale, y hay que intentarlo de otro modo). Y para eso, obviamente, necesitamos esas 'herramientas'.



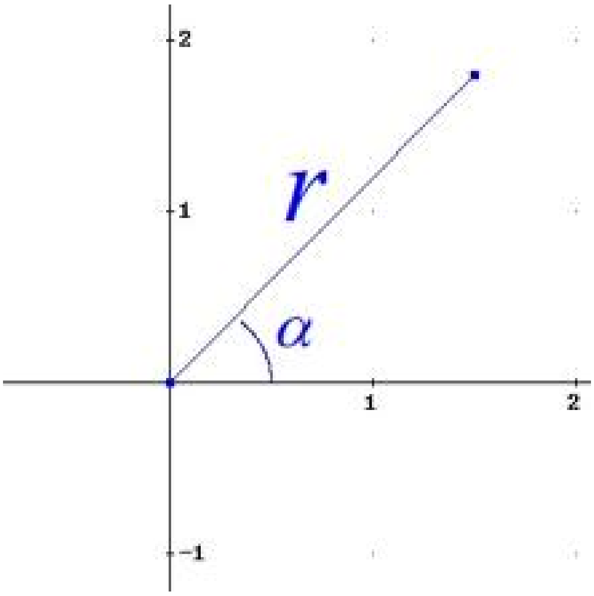
$$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}),(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}),(\frac{2}{\pi},\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi})$$



$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

Otros tipos de coordenadas

Pero en el pasado hubo otras personas de carne y hueso como nosotros que pensaron lo mismito que ustedes piensan si han llegado hasta aquí: ¿y no habrá otro modo más sencillo de resolver esta tontería de calcular una 'sencilla' área de un círculo? Pues sí: pasando a coordenadas polares. ¿Coordenadas polares? ¿Y eso qué es? Hombre, no nos vendría mal un poco de fresco en estos días, pero seguramente no tiene nada que ver con hacer la integral dentro de un frigorífico, ¿no?



En efecto, las coordenadas polares son otra forma de describir los puntos en el plano diferente al de las coordenadas cartesianas. El mismo punto (x, y) del gráfico de antes puede localizarse de otras formas que conociendo sus distancias a los ejes. Por ejemplo, echen un vistazo al nuevo dibujo: conociendo la distancia r del punto al centro de coordenadas (el (0, 0), recuerden) y el ángulo α que la semirrecta que une el punto con el origen forma con el eje de las X, medido en sentido antihorario. Es decir, con esos valores de r y de α, tenemos perfectamente localizado cualquier punto. Hay unas expresiones que nos permiten pasar de coordenadas cartesianas a polares, y viceversa, pero eso lo dejamos para otro día, que los noto ya cansados. Pues bien, con este sistema de coordenadas, la ecuación de la circunferencia de radio R, es sencillamente

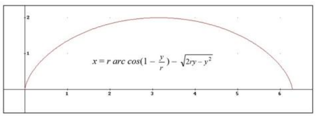
r = R

En efecto, constante. Y entonces la integral para calcular su área es

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 d\alpha$$

que es muy sencilla de resolver. Sin hacer casi operación alguna nos devuelve el famoso πR^2. Es decir, trabajar en coordenadas polares me simplifica todo muchísimo. Pero entonces, hay que conocer la 'herramienta' de las coordenadas polares.

Fíjense las complicaciones a las que nos lleva una sencilla circunferencia. ¿Qué pasará con elipses, o con curvas cuyas ecuaciones sean mucho más complicadas? Miren, los ingenieros tienen que utilizar con frecuencia las llamadas **curvas mecánicas** (el nombre no está puesto por casualidad: intervienen en muchos procesos industriales). Dos de las más simples son la
cicloide
y la
epicicloide
(también la hélice, la catenaria, la espiral, etc., pero esas son de otros tipos diferentes). Por simple curiosidad, la ecuación de una cicloide en coordenadas cartesianas es la que aparece junto a su representación gráfica:



Sin embargo, en **coordenadas paramétricas**, la cicloide tiene este otro aspecto, más 'amigable'

$$\begin{cases} x = r(t - sen\,t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

Ni que decir tiene que, a la hora de hacer cálculos, son estas últimas las ecuaciones que se utilizan. Pero de nuevo hay que conocer la 'herramienta' de las coordenadas paramétricas.

Esta es una de las innumerables ocasiones en las que se hace hincapié a los alumnos en que para este tipo de situaciones es necesario saber y estudiar resultados que nos facilitan las cosas (y es uno entre cientos, créanme). O sea, las matemáticas también se estudian (no se crean la leyenda urbana de que las matemáticas se practican, no se estudian; es sólo verdad a medias: si no conozco resultados, ¿con que voy a practicar? ¿Sólo con lo que proponen los C4OP? Eso se nos queda corto en tres minutos).

Por supuesto existen otros sistemas de coordenadas (**coordenadas cilíndricas**, **coordenadas esféricas**, **coordenadas astronómicas**, etc.) que nos facilitan la labor en otras situaciones.

El apunte histórico

Aunque en la antigua Grecia hubo trabajos conteniendo relaciones entre ángulos y distancias aplicados a la navegación y la astronomía (Hiparco, Arquímedes, por citar un par de ellos), la utilización de las coordenadas polares tal y como la hemos descrito no aparece hasta que se desarrolla la geometría analítica en el siglo XVII. De hecho, Grégoire de Saint-Vincent y Bonaventura Cavalieri las emplearon de forma independiente en la resolución de problemas geométricos. El segundo, por ejemplo, para determinar el área encerrada por la espiral de Arquímedes. Posteriormente, Blaise Pascal las utilizó para calcular la longitud de arcos parabólicos. Son sin embargo trabajos aislados. El que realmente formaliza con rigor este tipo de coordenadas (junto a otros ocho sistemas diferentes), fue Isaac Newton en 1671.

Su nombre, coordenadas polares, se atribuye un siglo después a Gregorio Fontana. De las coordenadas paramétricas (y otros sistemas), hablaremos en otra ocasión. De momento, cuando salgan a la calle, y vean una grúa en una obra, piensen cómo es más sencillo llegar a cualquier punto a depositar los materiales: ¿con un sistema basado en coordenadas cartesianas, o con uno en polares? No tiene más que observar cómo se mueve la grúa.

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con

la Comisión de Divulgación de la [Real Sociedad Matemática Española (RSME)]