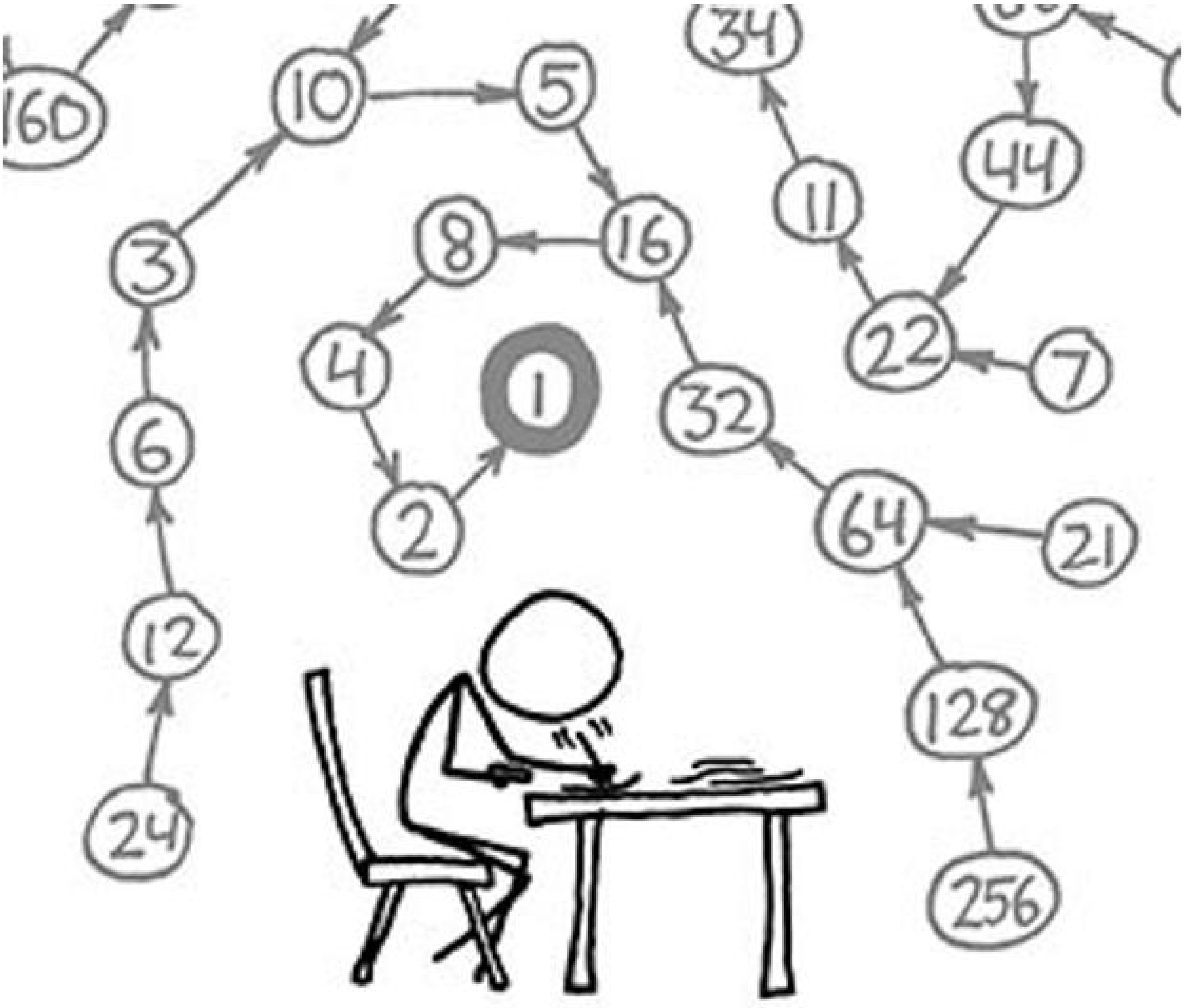
ABC, 18 de Enero de 2021
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Víctor M. Manero y Alfonso Jesús Población Sáez

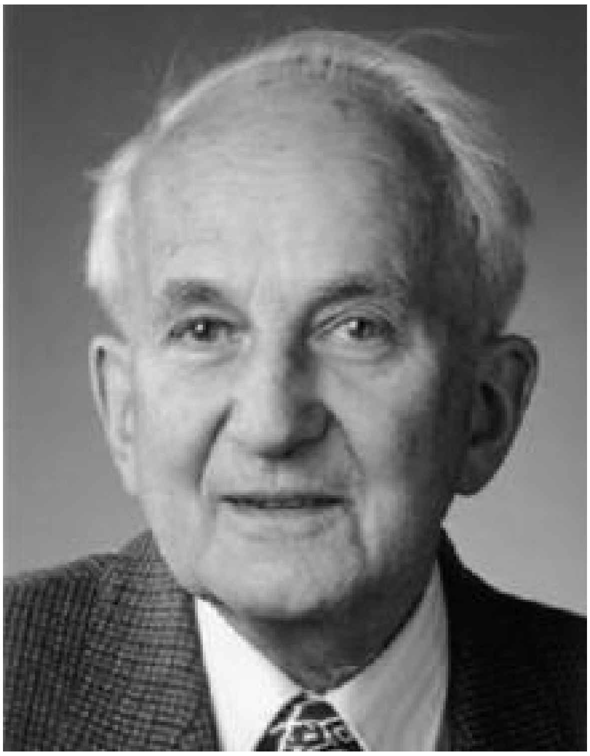
Algunas preguntas solo se pueden enmarcar dentro de las matemáticas y no responden a ningún tipo de situación relacionada con el mundo real



Viñeta de Randall Munroe

En algún momento de nuestras vidas todos nosotros nos hemos preguntado, o por lo menos hemos oído a alguien preguntar, ¿para qué sirven las matemáticas? Hoy en día es más que claro que las matemáticas son muy útiles en muchísimos aspectos de nuestras vidas; comunicaciones, seguridad, meteorología, predicción de casos de Covid-19, y un larguísimo etcétera constituyen una buena muestra de ello.

Pero por otra parte debemos ser conscientes de que la matemática es una disciplina científica que tiene también un componente teórico enorme. Sólo por poner un ejemplo, los matemáticos son capaces de trabajar con números reales como el 7 ó el –3 pero podemos trabajar también con el concepto de infinito o con espacios m-dimensionales en los que ni siquiera tenemos porque fijar o conocer la dimensión del propio espacio.



Lothar Collatz

Por todo ello, y debido al carácter teórico que también poseen las matemáticas, en ocasiones, surgen problemas o preguntas que únicamente se pueden enmarcar dentro de las matemáticas y que no responden a ningún tipo de situación relacionada con el mundo real. La **conjetura de Collatz** es uno de esos problemas.

La conjetura de Collatz fue enunciada por el matemático alemán **Lothar Collatz** (1910-1990) (foto adjunta) y para enunciarla necesitamos definir la secuencia de Collatz de un número.

Tomemos un número natural cualquiera, el 2, el 54, el 17, el 20983, … si dicho número es par, lo dividimos entre dos, y si es impar lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1; es decir, si nuestro número es n hacemos:

$$\begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n\ es\ par \\ 3n+1 & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Al reiterar este proceso obtenemos la secuencia de Collatz de dicho número. Por ejemplo, tomemos el número 13, teniendo en cuenta lo anterior, su secuencia de Collatz es la siguiente:

Conocido lo que es la secuencia de Collatz de un número, la conjetura enunciada por Lothar Collatz establece lo siguiente:

$$13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow \ldots$$

Si tomamos un número natural cualquiera su secuencia de Collatz termina llegando siempre al número 1.

Por poner un ejemplo, si tomamos el número 5, su secuencia de Collatz es la siguiente:

$5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

y llega a 1. Pero, ¿será esto cierto para todo número natural?

Se puede comprobar que, en efecto, si tomamos distintos números naturales su secuencia de Collatz llega a 1. Sin embargo, tal y como ya vimos en el artículo «La demostración matemática o cómo llegar a la verdad invariable y eterna de los teoremas», una comprobación en varios o incluso muchos ejemplos no constituye una demostración del caso general.

A media docena de pruebas que se hagan sobre varios números, uno se da cuenta rápidamente que el que la sucesión, acabe antes o después, no depende del tamaño de n. Así, por ejemplo, partiendo de n = 27 (un número bajo), se termina en el 1 al cabo de 112 iteraciones, llegando a alcanzarse el valor 9232:

27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Sin embargo, para n = 1221, en 39 pasos se alcanza la unidad:

1221, 3664, 1832, 916, 458, 229, 688, 344, 172, 86, 43, 130, 65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Si nos fijamos en los ejemplos descritos (y en los que el lector haga), terminar en la unidad es equivalente a «caer» en el ciclo:

$16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$

Y se han probado ya con varios miles de millones de números, e indefectiblemente siempre acabamos en el 1. Pero, ¿garantiza eso que siempre es así para cualquier número por enorme que sea?

Pues en verdad no, y por eso para la comunidad matemática, si no hay una demostración general, no hay nada que hacer: seguirá siendo una conjetura.

Collatz se interesó por las iteraciones sobre los números enteros, que representaba mediante grafos. Hacia 1937 plantea este problema y lo expone en varios seminarios. En 1952, en Hamburgo, explica el problema a **Helmut Hasse** (1898 – 1979), matemático alemán que trabajó, entre otros asuntos, en teoría algebraica de números.

(Hasse fue quien reemplazó a **Hermann Weyl** en la Universidad de Gotinga en 1934. A modo de curiosidad, casi siempre se habla de los científicos o personalidades relevantes destacando sus valores humanos, sus compromisos sociales, su progresismo, etc., pero también los hay, como no podía ser de otro modo, de ideas más extremistas. En este caso, Hasse fue un nacionalista de ultra-derecha que solicitó su admisión en el partido nazi en 1937, aunque le fue denegado al tener antepasados judíos).

Posteriormente, Collatz lo plantea en una conferencia impartida en la Universidad de Siracusa (Nueva York), razón por la que el problema adopta también este nombre, conjetura de Siracusa. Paralelamente, el matemático polaco **Stanislaw Ulam** (1909 – 1984), uno de los participantes en el proyecto Manhattan, trabaja sobre ella en el Laboratorio Nacional de Los Álamos. En la década de 1960, el problema es asimismo difundido y trabajado por el matemático **Shizuo Kakutani** (1911 – 2004) en las Universidades de Yale y Chicago. Kakutani es autor de un teorema de punto fijo que generaliza al de Brouwer, y que permitió la prueba de la existencia del Equilibrio de Nash en teoría de juegos. En esos años sesenta, en plena guerra fría, se corrió el rumor de que la conjetura de Collatz era parte de un complot soviético para frenar otras investigaciones de mayor calado de los EE.UU.

En 1996, Bryan Thwaites estableció un premio de 1.000 dólares para quien lograra resolver la conjetura. (Cada dos años, el IMA, Institute of Mathematics and its Applications, otorga el premio Lighthill-Thwaites al mejor trabajo en matemática aplicada; su denominación alude a sus primeros presidentes, los profesores británicos Sir James Lighthill y Sir Bryan Thwaites). Así pues, como una particular Trinidad, esta conjetura (que tiene diferentes variantes y generalizaciones) es conocida indistintamente al menos con tres denominaciones: conjetura de Collatz, conjetura de Siracusa y conjetura 3n + 1.

Collatz fue una persona muy inquieta y con una enorme vitalidad (falleció cuando se encontraba en un Congreso en el que iba a dar una conferencia). Sus intervenciones públicas, y dio muchas, eran siempre todo un acontecimiento. Defensor acérrimo de la matemática aplicada, también son interesantes dos de sus pasiones: la matemática recreativa (inventó varios juegos e ideó un montón, conocidos como Collatz Problems, fáciles de entender, pero bastante complicados de resolver), y los llamados **«ornamentos geométricos».** Bajo este nombre se engloban todos los adornos utilizados en Arquitectura y Artes decorativas a los que se puede dar una estructura geométrica.

Desarrolló además un sistema propio para caracterizarlos. En uno de sus últimos artículos sobre este tema, abordaba los ornamentos definidos implícitamente mediante valores absolutos. Como consecuencia de este asunto, visitó un gran número de catedrales en todo el mundo buscando nuevos patrones y formas que luego describiría matemáticamente.

Sobre la conjetura de Collatz, se han propuesto diferentes demostraciones, entre ellas una de **Peter Schorer** en 2009, pero por el momento ninguna ha sido aceptada como satisfactoria por la comunidad matemática. En este artículo se describe cómo se encuentra la investigación actualmente, por si alguien se anima…

Víctor M. Manero es profesor de la Universidad de Zaragoza y miembro de la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME).

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)