ABC, 24 de Mayo de 2021
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Iván Blanco Chacón

Los tres problemas griegos son el origen de vasto caudal de investigación matemática que llega hasta nuestros días

Templo dedicado a Apolo - Adobe Stock

En 430 a.C., un año antes de la muerte de **Pericles**, se desató en Atenas una epidemia de peste que diezmó a la cuarta parte de su población. Cuenta la leyenda que los atenienses, desesperados, enviaron una delegación al oráculo de Apolo en Delos para averiguar cómo podían combatir la terrible enfermedad. El oráculo les respondió que debían contentar al dios construyéndole un altar de la misma forma que el original, que era cúbico, pero de doble volumen que éste.

A tal capricho del dios Febo se le conoce como **Problema de Delos** o **Problema de la duplicación del cubo** y es uno de los llamados **tres problemas griegos** o **tres problemas clásicos**; los otros dos son la **trisección del ángulo** y la **cuadratura del círculo** y los tres acapararon la atención de los más eminentes matemáticos griegos, tanto en el periodo clásico como en el helenístico. La condición que se impuso para resolverlos es emplear tan sólo una regla sin marcar y un compás.

El descubrimiento de los **inconmensurables** (es decir, de los números irracionales) a finales del siglo VI a.C. se atribuye al pitagórico **Hipaso de Metaponto** y puso de manifiesto la existencia de magnitudes que no son una razón entre números naturales, aunque algunas de estas se pueden construir con regla y compás, como el caso de la diagonal de un cuadrado o la bisectriz de un ángulo. De aquí el interés de estos problemas en la Grecia clásica.

Pero como se demostró veinte siglos después, ninguno de los tres problemas griegos tiene solución en los términos originales y a pesar de ello, como a menudo sucede en matemáticas, los múltiples intentos y aproximaciones movieron un vastísimo caudal de investigación de cuyas fértiles corrientes emergerían nuevas áreas que habrían de jugar papeles de primer orden en siglos venideros, como por ejemplo la teoría de curvas algebraicas, de enorme relevancia en la actual teoría de números, criptografía y teoría de códigos, o la teoría de las cónicas, nuclear en los resultados de **Copérnico** y **Kepler**.

La duplicación del cubo

Comencemos con el problema de Delos. La fuente más antigua en la que se menciona es una carta de **Eratóstenes** (275-194 a.C.) a un tal **Ptolomeo** (probablemente Ptolomeo III) aunque el compendio más completo acerca de las diversas contribuciones a su resolución es un comentario de **Eutocio**, ya en el S. V d.C., al tratado Sobre la esfera y el cilindro, de **Arquímedes**.

Conviene observar que el análogo de este problema en dimensión dos, es decir, la duplicación del cuadrado, sí es resoluble usando tan sólo regla y compás: dado un cuadrado de área A, su lado medirá raíz cuadrada(A), y para duplicar su área es suficiente construír un segmento de longitud raíz cuadrada(2A), que es precisamente la longitud de la diagonal, en virtud del Teorema de Pitágoras.

Quizá la aproximación más antigua sea la de Hipócrates de Quíos (no confundir con Hipócrates de Cos, el celebrado médico), quien redujo el problema a encontrar dos medias proporcionales: así, dado un cubo de arista *a* y volumen a^3, para encontrar un segmento de longitud x tal que

$$x^3 = 2a^3$$

basta encontrar dos segmentos, de longitud x e y tales que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

pues en ese caso se tendrá que

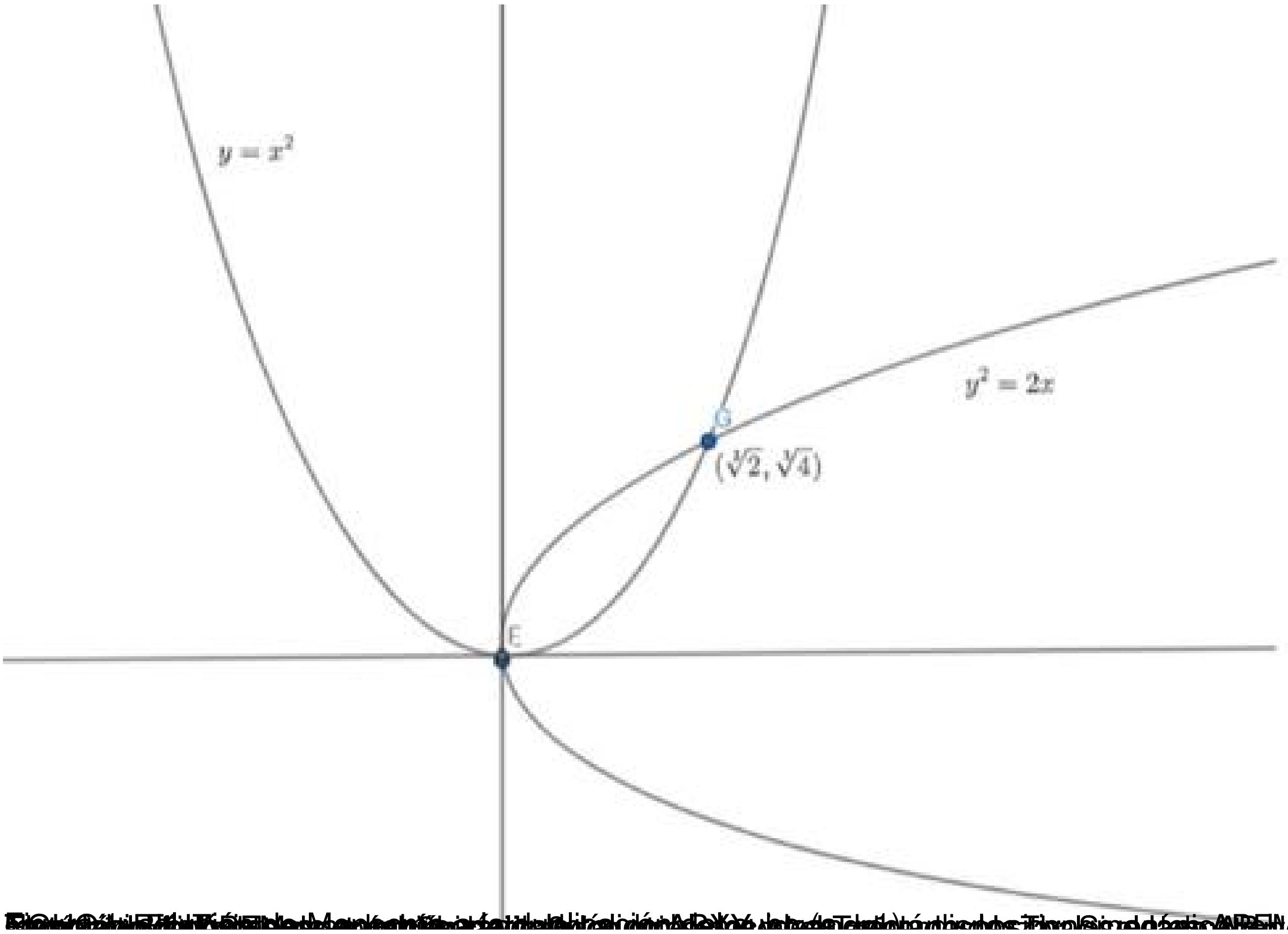
$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

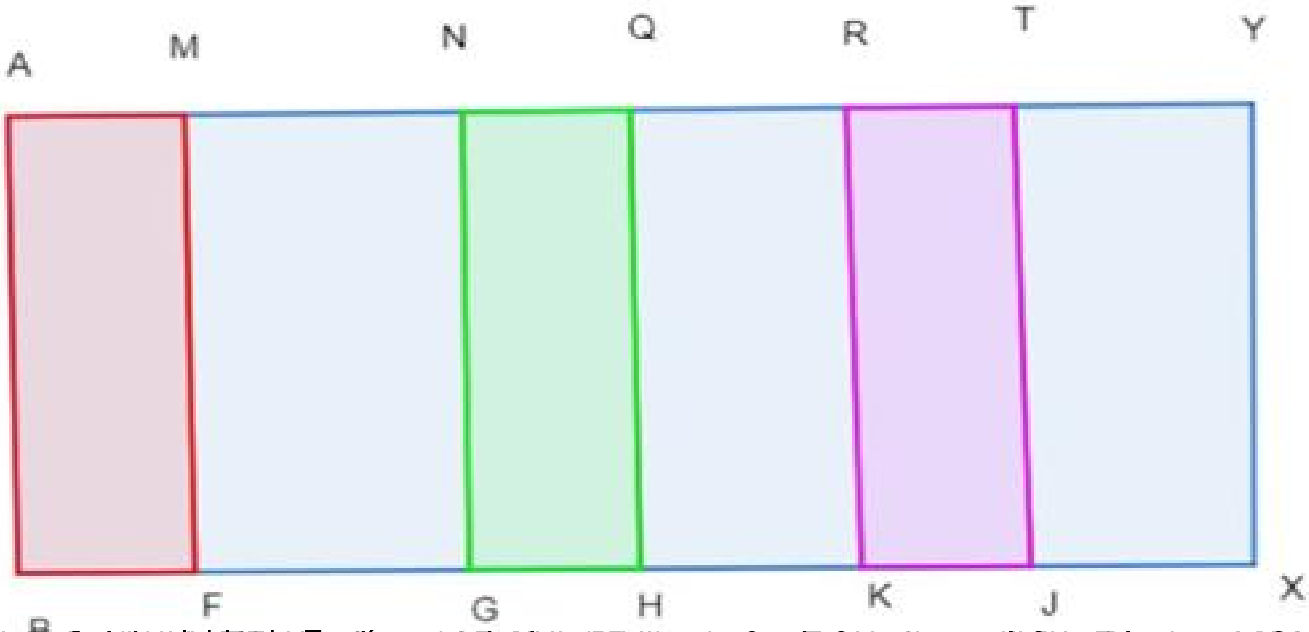
Según hemos mencionado, como producto colateral al estudio de este problema se introdujo la teoría de cónicas. El autor de este enfoque fue Menecmo (375-325 a.C.), que al igual que Hipócrates, había reducido el problema a dos medias proporcionales. Sin embargo, Menecmo se dio cuenta de que este sistema de medias proporcionales es equivalente a encontrar el punto de corte de dos parábolas:

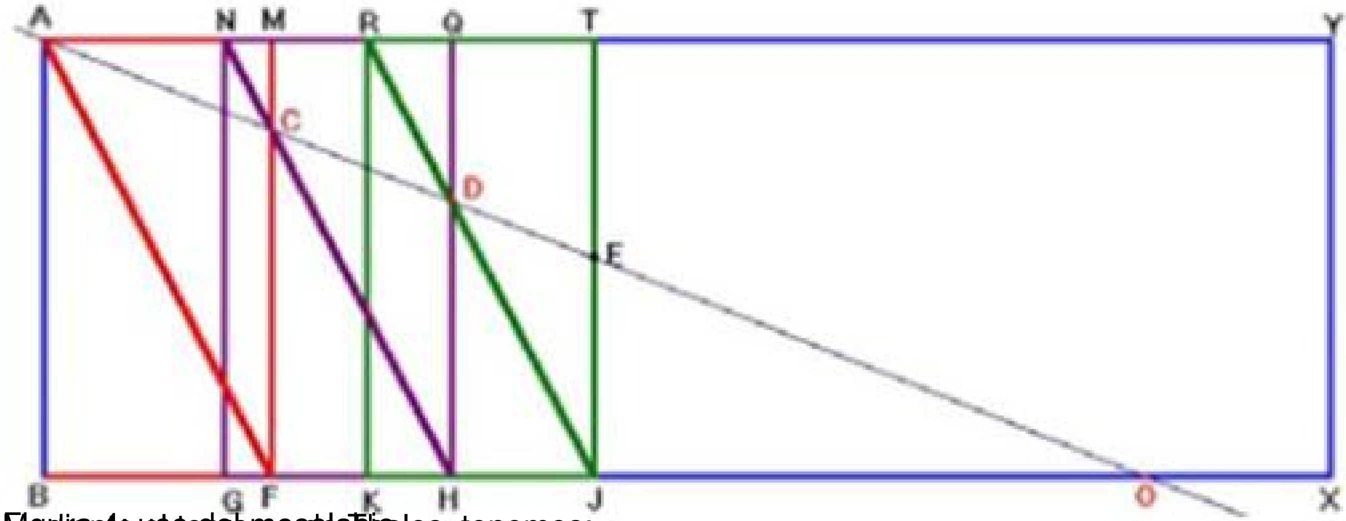
$$y^2 = 2ax \qquad x^2 = ay$$

Efectivamente, estas parábolas se cortan en el punto

$$(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$$


$y = x^2$
$y^2 = 2x$
G
$(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$
E


A
M
N
Q
R
T
Y
B
F
G
H
K
J
X



Mediante el teorema de Thales, tenemos:

$$\frac{AB}{CF} = \frac{CF}{DH} = \frac{DH}{EJ}$$

La trisección del ángulo

Consiste en, dado un ángulo, construir otro cuya medida sea la tercera parte de la medida del primero usando tan sólo regla y compás. El origen de este problema es incierto aunque en todo caso es con seguridad anterior a 399 a.C., fecha de la muerte de Hipias de Elis, quien realizó la aportación tentativa más temprana conocida a su resolución.

A cualquiera que haya seguido un curso básico de Historia de la Filosofía le sonará el nombre de **Hipias** como uno de los sofistas que pululaban por la Atenas de los Treinta Tiranos ofreciendo al mejor postor su arte de hacer pasar lo malo por bueno. Se dice de él que poseía una memoria prodigiosa y que era el más rico de todos sus colegas de oficio, y también uno de los más presuntuosos. Su figura da nombre a dos de los diálogos **Platón** (Hipias mayor e Hipias menor), donde entre otras cosas se traza una semblanza de este curioso personaje.

Pero de todos sus sofismas, el que nos interesa aquí es el llevado a cabo para tratar de resolver el **problema de la trisección** y quizá de la cuadratura, pues como se verá después, más adelante se aprovecharía la contribución del de Elis para tal fin. Se trata de la trisectriz o cuadratriz de Hipias, el primer ejemplo conocido de una curva plana no circular. Esta curva se define dinámicamente de la siguiente manera:

Supongamos un cuadrado de vértices A, B, O y C. Imaginemos que el segmento AB se desplaza en paralelo hacia abajo hasta solaparse con el segmento OC y ello con velocidad constante.

Imaginemos también que a esa misma velocidad se va rotando el segmento OA en sentido de las agujas del reloj hasta que este se superpone igualmente a OC. Entonces, en cada instante, los dos segmentos (el paralelo a AB, que en la figura es A1B1 y la rotación de OA, que es OP') se cortarán en un punto P. Pues bien, el lugar geométrico de todos estos puntos de corte a medida que se mueven estos dos segmentos conforme avanza el tiempo es la **curva de Hipias.**

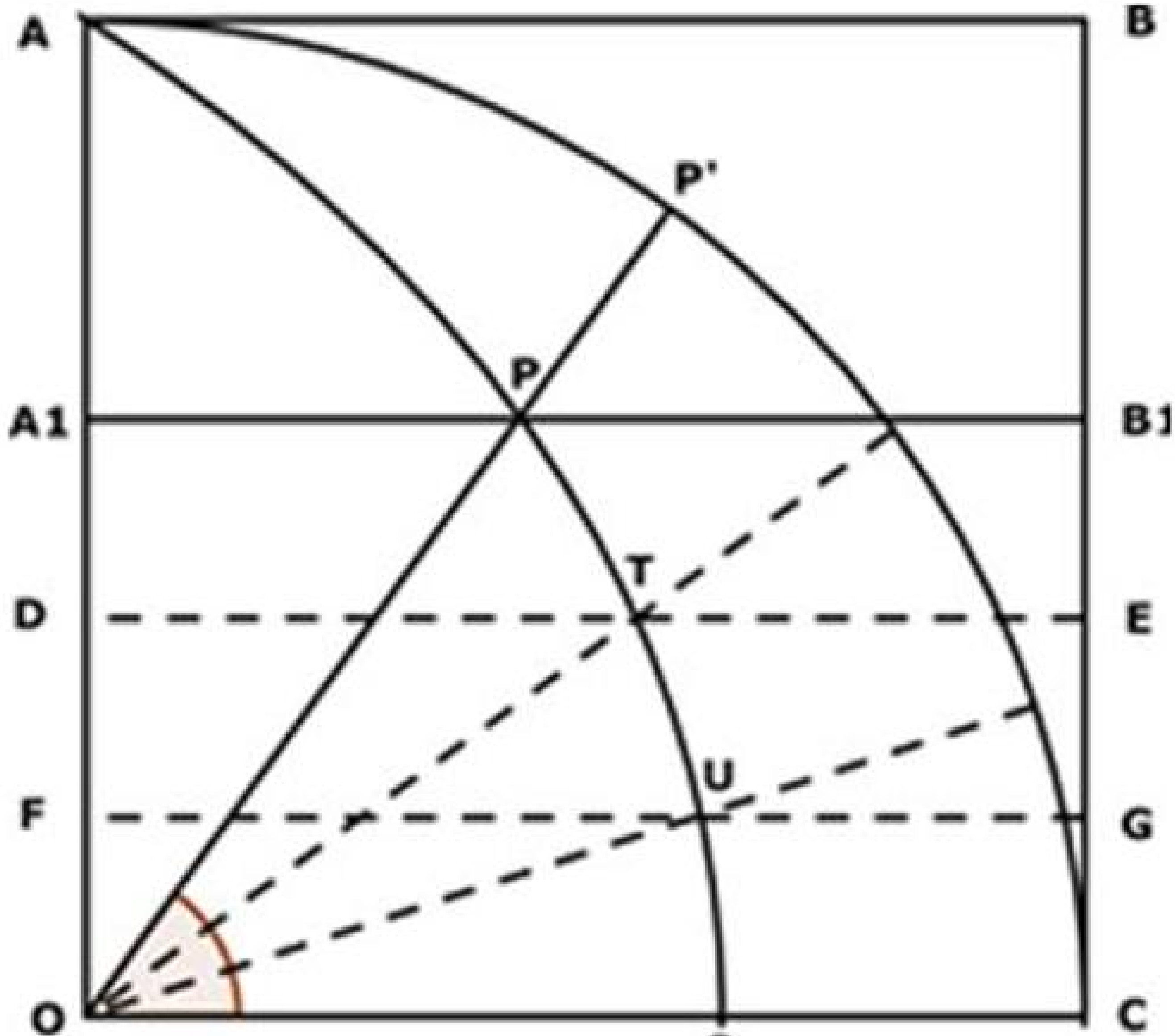


Figura 2: trisectriz de Hipias.

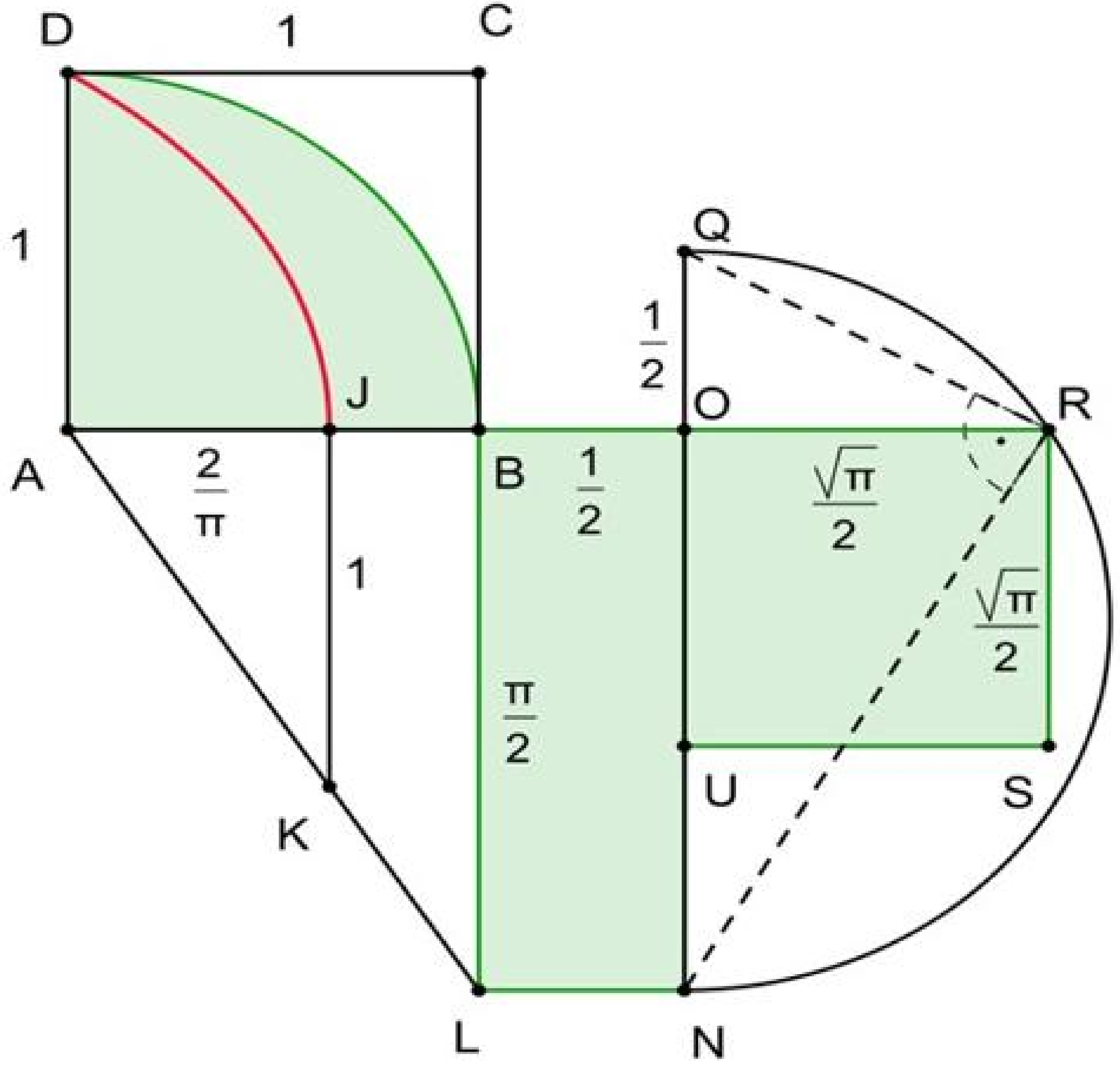
Esta curva resuelve el problema de la trisección: dado el ángulo OP'C delimitado por los segmentos OP' y OC, consideremos el punto P de corte del segmento OP' con la trisectriz. Dibujamos el segmento A1C, que corta a BC en B1 y dividimos el segmento CB1 en tres partes iguales. Sea una de ellas el segmento CG. Construimos el segmento FG que corta a la trisectriz en el punto U y así, por cómo se define la trisectriz, el ángulo OUS mide la tercera parte del ángulo de partida.

La cuadratura del círculo

En este caso se trata de, dado un círculo de radio R (y por tanto de área πR^2), construir un cuadrado del mismo área empleando, como anteriormente, sólo regla y compás. Mediante el **teorema de Thales**
se demuestra que es equivalente a cuadrar el círculo de radio R = 1.

Si hemos de creer a Plutarco, el filósofo Anaxágoras (500-428 a.C.) se ocupó de este problema durante su estancia en prisión a consecuencia de la caída en desgracia de Pericles, su discípulo y amigo. Aunque Hipócrates de Quíos había resuelto satisfactoriamente el problema de la cuadratura de algunas lúnulas con regla y compás, los primeros intentos directos documentados de solución de la cuadratura del círculo se deben a Dinóstrato (390-320 a.C.) y Arquímedes (287-212 a.C.)

El primero, cuenta Proclo, utilizó la curva de Hipias, el segundo, la espiral llamada 'de Arquímedes' en su honor. No diremos nada sobre el método de Dinóstrato pero remitimos al lector a la detallada descripción en 'A History of Mathematics' de U. Merzbach, C.B. Boyer (página 87).



[illegible]

...Quia impossibile

Y aunque imposibles de resolver utilizando tan sólo regla y compás, los tres problemas bien se pueden considerar el leitmotiv de buena parte de la investigación matemática hasta el Renacimiento.

Que cada uno dé su estimación; el presente autor, tras haber dedicado cierta atención a este asunto, se mojará afirmando que estos problemas y la búsqueda de la solución de la quíntica por radicales configuraron el panorama matemático europeo hasta la aparición de Leibniz en prácticamente toda su totalidad.

Pero dejando opiniones de lado, examinemos la idea de la imposibilidad. Nos centraremos en la duplicación del cubo y en la cuadratura del círculo. La idea fundamental es la siguiente:

A) dos rectas cualesquiera que pasen por dos pares de puntos con coordenadas racionales se cortan, si lo hacen, en un punto con coordenadas racionales, es decir, este punto satisface una ecuación lineal con coeficientes racionales.

B) una recta que pasa por dos puntos con coordenadas racionales corta a una circunferencia de centro y radio racional, si la corta, en dos puntos con coordenadas en general ya no racionales sino que pueden contener algún irracional cuadrático (la ecuación genérica de un círculo es de grado 2).

Es decir, los puntos de corte satisfacen una ecuación de segundo grado con coeficientes racionales.

C) Dos circunferencias de centro y radio racionales se cortan, si lo hacen, en uno o dos puntos con coordenadas que pueden contener algún irracional cuadrático. Es decir, los puntos de corte satisfacen una ecuación de primer o segundo grado.

Así las cosas, los puntos de intersección de A), B) o C) satisfacen una ecuación de grado 1 o 2. Si ahora consideramos rectas o circunferencias que pasen por esos puntos de intersección, estos satisfarán ecuaciones de grado 1 o 2 no sobre los números racionales sino sobre una extensión de éstos, a saber, el conjunto de todas las expresiones racionales en las coordenadas anteriores y con coeficientes racionales. Este conjunto es un cuerpo y cada elemento del mismo satisface una ecuación de grado 1, 2 o 4 con coeficientes racionales.

La formalización del concepto número constructible por regla y compás se puede establecer en términos de estas extensiones: podemos definir número real constructible como aquél que verifica una ecuación polinomial con coeficientes racionales de grado potencia de 2. Así las cosas, podemos concluir inmediatamente que raíz cúbica de 2 no es constructible, luego el Problema de Delos es irresoluble.

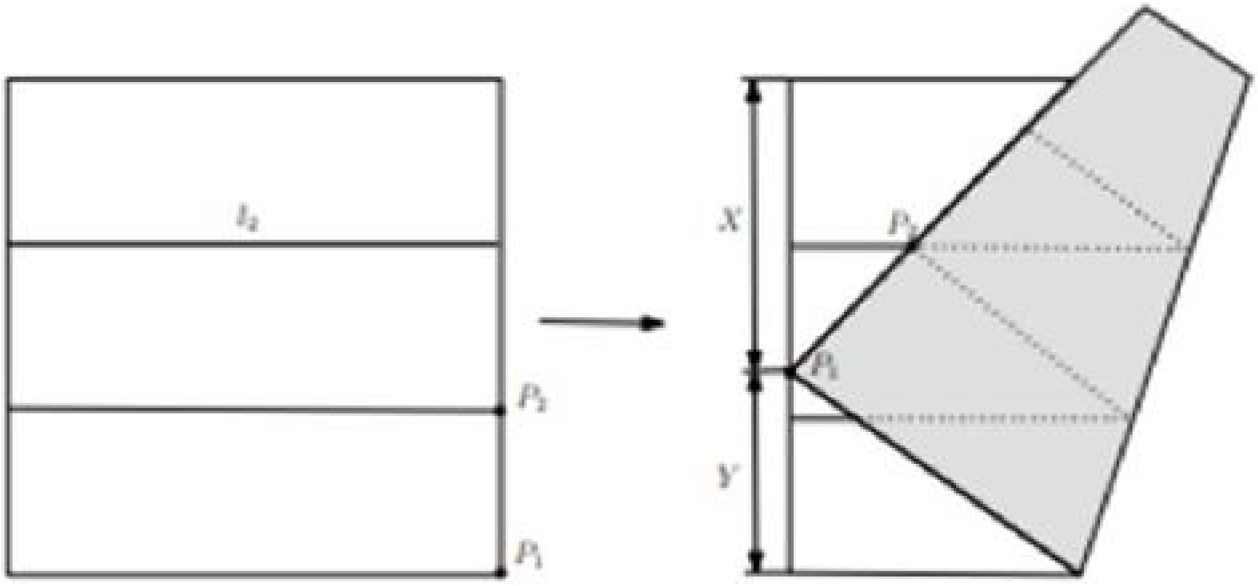
En cuanto a la imposibilidad de la cuadratura del círculo, quedó probada en 1882 con el **Teorema de Lindemann** que afirma que π no es solución de ninguna ecuación polinomial con coeficientes racionales, lo que en matemáticas se expresa diciendo que π es trascendente. Los números que satisfacen alguna de estas ecuaciones, como por ejemplo raíz cúbica de 2 se llaman algebraicos, así, todo número constructible es algebraico pero el recíproco, según acabamos de ver, no es cierto.

El origami y los tres problemas griegos

A pesar de la imposibilidad de resolverlos, es tal la fascinación que estos problemas han suscitado durante generaciones que se han propuesto múltiples variantes en su formulación, relajando, por ejemplo, el requerimiento de usar sólo regla y compás, que la regla sea sin marcar o cambiando la dimensión del objeto a triplicar. Por ejemplo, la duplicación del teseracto (cubo en dimensión 4) sí es posible pues es equivalente a construir con regla y compás un segmento de longitud raíz cuarta de 2, que satisface una ecuación cuyo grado es una potencia de 2 y es por tanto constructible.

Concluimos con un enfoque del que el autor ha tenido noticia recientemente y que merece señalarse por su originalidad y toque artístico: la cuadratura mediante el arte japonés de la papiroflexia u origami. Existen reglas muy precisas en cuanto a las operaciones permitidas de plegado. Son en concreto siete y nos referiremos a ellas como los axiomas de **Hatori-Huzita**, que las introdujeron.

Según demuestraron **Auckley y Cleveland** en 1995, los cinco primeros axiomas junto al séptimo son equivalentes a los requeridos para la construcción por regla y compás, no así el sexto, que es equivalente a trazar una tangente común a dos parábolas, de la que Alperin demostró en 2001 que no es alcanzable mediante regla y compás (ver 'A mathematical theory of origami constructions and numbers', 'New York Journal of Mathematics', 2000). De hecho, en el mismo artículo demuestra que los tres problemas son resolubles mediante operacions de origami.



[illegible] Origami [illegible] *Real Sociedad Matemática Española (RSME)* [illegible]