ABC, 27 de Septiembre de 2021
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

Si barajamos un mazo de cartas, es probable que el orden exacto en el que lo pongamos nunca haya existido antes en la historia del universo

Adobe Stock

Aunque nuestro recuerdo escolar de la **Combinatoria** puede no ser muy feliz (aquello de las variaciones, permutaciones y combinaciones), hay que reconocer que proporciona unas herramientas muy útiles, tanto en nuestra vida cotidiana como en asuntos de mayor calado. Prácticamente todo el mundo (que en la actualidad no se dedique a nada relacionado con las matemáticas) te soltará algo del tipo: «Nunca lo entendí», «No fui capaz de diferenciar cuando eran variaciones o combinaciones», «Era muy complicado»... Pero, a toro pasado, seamos honestos: ¿Por qué no lo entendíamos? ¿Por qué no nos gustaba?

La respuesta a la segunda pregunta es sencilla: no nos gustaba tener que esforzarnos, pensar (seguramente ahora tampoco, ¿a quién le gusta?). El ser humano tiende a lo cómodo,a lo fácil, y se acostumbra a ello rápidamente. Somos vagos por naturaleza. Todos. Y seguramente el que esto escribe, de los que más. Preferíamos resolver una ecuación ya planteada a encontrarla a partir de un **«problema de enunciado»**, igual que preferíamos memorizar unos datos geográficos o históricos y soltarlos como papagayos en un papel, a averiguar el tipo de clima según unos datos, o comparar razonadamente el gobierno de Carlos V respecto al de Felipe II, pongamos por caso. ¿Y si probáramos a impartir todas las asignaturas de un modo práctico, con algo más que el uso de la memorieta y a otra cosa? Ya, ya sé lo que piensan: aumentaría el fracaso escolar. Y a lo mejor también el número de ciudadanos críticos, lo cual a casi nadie interesa. Dejémoslo ahí.

Afortunadamente, quien lee estas líneas ya no se tiene que examinar, y lo hace por pura curiosidad, placer o deseos de recordar, aprender o simplemente leer algo de esas matemáticas que todos ahora dicen que son tan útiles (¡¡a ver si los convenzo!!). Como idea general, quédense con que las **variaciones, permutaciones y combinaciones** son herramientas que nos permiten contar el **número de posibilidades** que podemos encontrarnos cuando trabajamos con una cantidad concreta y finita de objetos. Pero para contarlas de un modo inteligente, sin tener que perder el tiempo. Por ejemplo, si quiero saber cuántas banderas de cuatro colores puedo componer con siete colores sin que se repita ninguno, o repitiendo dos como máximo, perder el tiempo sería ponerse a confeccionar todas y luego contar cuántas hay. Además, así siempre tendremos la duda razonable de ¿habré repetido alguna? o ¿estarán todas? Y encima con lo vagos que dijimos que éramos al principio, como para fiarse.

Evidentemente contar con la ayuda de estas herramientas es mucho más ventajoso cuanto más grande sea el número que vamos a obtener o los objetos con los que trabajamos. Y además nos permite **comparar magnitudes o fenómenos que nos pueden llegar a asombrar**, como la que les voy a proponer, que es el meollo final de toda esta larga introducción que les estoy haciendo.

Número de Avogadro

Aparquemos por un instante la combinatoria. Vamos a intentar entender cómo han calculado otros científicos **el número de átomos que hay sobre la Tierra,** que como todo el mundo supondrá, son muchos, una cantidad enorme, pero una cantidad finita. Veamos cómo hacer una estimación a tal número.

En 1811, el físico y químico **Amadeo Avogadro** propuso que el volumen de un gas, a una presión y temperatura concretas, no depende de la sustancia que lo constituye, sino que es únicamente proporcional al número de átomos o moléculas. Planteada la idea, hubo diferentes intentos de calcular qué constante de proporcionalidad era esa, si es que existía.

Finalmente (por supuesto, hay toda una larga historia detrás) se determinó su valor: 6.023 x 10^23. Más tarde, en 1971, con la introducción del mol como unidad básica, ese número pasó a ser una magnitud física, con unidades mol^(–1) en el Sistema Internacional, llamándose desde entonces **constante de Avogadro**. Su valor es entonces 6.023 x 10^23 moléculas/mol. Veamos con un ejemplo qué mide.

Consideremos un mol de agua. Sabemos que el agua consta de dos átomos de hidrógeno por uno de oxígeno (si desempolvamos la formulación elemental, eso está claro de su expresión química: H_2O). Si localizamos en la tabla periódica el átomo de oxígeno (número atómico Z = 8) tiene un peso aproximado de 16 gramos, y el hidrógeno (Z = 1) un gramo. De modo que un mol de agua pesa 18 gramos y tiene 6.023 x 10^23 moléculas.

Tomando la densidad del agua como la unidad, una sencilla regla de tres (disculpas para los que las odian, pero que quieren que les diga, a mí me enseñaron lo poco que sé de química con ellas), nos da que un litro de agua (10^3 gramos), suponiendo que su densidad es la unidad, contiene

$$\frac{10^3 \cdot 6.023 \cdot 10^{23}}{18} \approx 3.34 \cdot 10^{25} \text{ moléculas-átomos}$$

Para hacer el cálculo sobre la Tierra, se hace algo similar, sólo que hay que tener en cuenta previamente la composición de los metales que contiene, que, aproximadamente es la siguiente: hierro, 34.6%; oxígeno, 29.54%, silicio, 15.2%; magnesio, 12,7%; níquel, 2,4%; azufre, 1.9% y titanio, 0.05%. Y también hay que considerar el porcentaje de agua que tiene, que es un 71% de la superficie terrestre. Total, que, después de tener en cuenta esos porcentajes, finalmente podemos estimar que el 'mol de Tierra' es de 38 gramos. Google nos dice que la masa de la Tierra se estima en 5.972 x 10^24 kilogramos. Entonces una cuenta como la de antes nos da como resultado

$$\frac{5.972 \cdot 10^{24} \cdot 10^{3} \cdot 6.023 \cdot 10^{23}}{38} \approx 9.3 \cdot 10^{49} \text{ moléculas-átomos}$$

Por redondear, pongamos que 10^50, es decir, un uno y cincuenta ceros. Un númerorealmente grande, sin duda.

Una sencilla baraja

Sin embargo, es un número superable. Y además está en nuestra mano. Cojamos una baraja francesa, ya saben, la de póker, con sus diamantes, tréboles, corazones y picas. Tiene 52 cartas. ¿De cuántas maneras diferentes podemos disponer esas cartas? Aquí es donde entra la combinatoria que les decía antes, y las permutaciones. Una permutación es cualquier cambio de orden que hagamos en los elementos de un conjunto. Supongamos el orden inicial de las cartas de la baraja. La primera carta es el as de corazones. ¿En cuántas posiciones diferentes podemos situar el as de corazones en el mazo de naipes? Claramente en 52 posiciones, porque hay 52 cartas (la podemos poner la primera, la segunda, la tercera, etc.). ¿Y la segunda carta, el dos de corazones? Teniendo en cuenta que ya hemos considerado todas las posiciones en que podemos colocar el as de corazones, ahora nos quedan 51 posibilidades para el dos de corazones (es decir, fijada la posición de la primera, quedan 51 posibilidades para la segunda). Considerando ambas a la vez, tendremos el producto 52 x 51 posibilidades. Para entender por qué se multiplican, piénsenlo solo con dos o tres cartas. Considerando todas las cartas de la baraja, las 52 a la vez, nos encontramos con el producto

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \ldots. 3 \cdot 2 \cdot 1$$

lo que los matemáticos escribimos abreviadamente como 52! (se lee 52 factorial). Es decir, que el número total de permutaciones de un conjunto de n elementos es n! En el caso de la baraja de 52 cartas esa cantidad, 52!, es

80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000

Si se toman la molestia de contar el número de cifras que aparecen, resultan ser 68, es decir, un 8 y 67 ceros. Del orden por tanto de 10^67. Muchísimo mayor que el número de átomos sobre la Tierra, que les recuerdo eran del orden de 10^50.

¿Qué conclusiones podemos sacar de este valor? Además de la indicada (que el número de posibles configuraciones de una baraja de cartas es mayor que el número de átomos sobre la Tierra), que si barajamos un mazo de cartas, es probable que el orden exacto en el que lo pongamos, nunca haya existido antes en la historia del universo, que nunca antes nadie haya dispuesto esa configuración. ¡¡Y mira que hay y ha habido tahúres sobre la faz de la Tierra!! Porque dada la inmensidad del número calculado de posibilidades de disponer las cartas, probablemente el universo terminaría antes de que llegáramos a disponer una mil millonésima parte de las posibilidades sin haber encontrado una repetición.

Llegados a este punto, parémonos un momento. ¿Me estás diciendo que, del mogollón de veces que una persona ha jugado a las cartas, jamás ha dispuesto las cartas del mismo modo? Seguramente, jugando a un determinado juego, un solitario, por ejemplo, sí hayamos repetido varias veces la misma configuración, porque los juegos de cartas tienden a ordenar el mazo de un determinado modo de acuerdo a sus reglas y a sus objetivos. Es decir, en el momento que introducimos unas reglas, perdemos la aleatoriedad. De hecho, también se ha estimado que es preciso **barajar el mazo unas siete veces** con alguna de las técnicas conocidas (por ejemplo, la popular mezcla americana, 'riffle shuffle', en inglés) para que quede perfectamente barajado (¡¡que se lo digan a los incontables tramposos, en el buen sentido, que pululan por el mundo!!).

Por supuesto, la otra conclusión, que es la más interesante, es que gracias a una sencilla herramienta matemática soy capaz de saber exactamente **el número total de configuraciones diferentes** que podría hacer con un mazo de 52 cartas (aunque no tendría vida suficiente para detallarlas todas). Para la baraja española de 40 cartas, las cosas no son tan espectaculares, porque

40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000

O sea, 'solo' un ocho y cuarenta y siete dígitos, que no alcanzan el número estimado de átomos sobre la Tierra.

Así pues, cuando vuelvan a coger una baraja de cartas, en las próximas Navidades, por ejemplo, háganlo con cierto respeto, porque tienen en su mano un número gigantesco de posibilidades. Y hay juegos con mayor número posible de configuraciones. ¿Se atreven a pensar en el ajedrez, o en el Go ?

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)