ABC, 24 de Enero de 2022
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

Resolvemos el acertijo matemático sobre la inscripción en las paredes del palacio granadino

EAdobe Stock

El fin del mundo no se espera para el 2342 (a lo mejor es antes).

Son muchos los autores de matemática recreativa (y ciencia en general) que han ideado cuestiones, ejercicios y problemas enmarcándolos y dándoles vida dentro de alguna obra clásica o imitándolas. En 1907, por ejemplo, el británico **Henry Ernest Dudeney** (junto al norteamericano **Samuel Loyd**, posiblemente los más notables inventores de problemas y juegos de ingenio de la historia), publica 'Los acertijos de Canterbury' ('The Canterbury Puzzles'), un conjunto de situaciones y enigmas matemáticos en boca del grupo de peregrinos que protagonizan la célebre obra del siglo XIV del poeta **Geoffrey Chaucer**. O 'El hombre que calculaba', del ficticio **Malba Tahan**, con más de 54 ediciones desde su primera edición en 1938.

Con esta inspiración escribí el relato del fin del mundo enmarcado en la Alhambra que apareció en esta sección hace quince días, situándolo en términos paralelos a los magníficos 'Cuentos de la Alhambra'. Para mí sorpresa, hubo quien asumió la historia como real, aunque quedaba bien indicado que se trataba de una ficción con el propósito de ofrecer al lector **un enigma matemático a resolver.** Agradezco el halago implícito de saber que, terminada mi carrera docente, quizá pueda dedicarme a la narrativa fantástica.

$$1492^n - 1898^n - 1936^n + 2342^n$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

Observen que esa igualdad puede también expresarse del siguiente modo:

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$$

$$1936^2 - 1898^2$$

$$x^3 - y^3 = (x^2 + xy + y^2)(x - y)$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots + x^2y^{n-2} + y^{n-1}$$

$$1492^n - 1898^n - 1936^n + 2342^n$$

'Casualmente' (sí, ya con segundas)

$$2342 - 1936 = 1898 - 1492 = 406 = 2 \cdot 7 \cdot 29$$

$$2342 - 1898 = 1936 - 1492 = 444 = 2^2 \cdot 3 \cdot 37$$

$$\frac{1492^n - 1898^n}{1492 - 1898} + \frac{2342^n - 1936^n}{2342 - 1936}$$

$$\frac{1936^n - 1492^n}{1936 - 1492} + \frac{2342^n - 1898^n}{2342 - 1898}$$

El número total de divisores

Una cuestión que aparece en muchas circunstancias, no sólo en ejercicios de matemáticas, sino también en nuestra vida cotidiana, tiene que ver con el número total de divisores que puede tener un número. Si es un número pequeño, como 6, no nos cuesta demasiadas dificultades porque lo hacemos casi mentalmente: como 6 = 2 × 3, los divisores son 1, 2, 3 y 6. Es decir, 4 divisores en total. Pero, ¿y si el número es más grande? Por ejemplo, 32. Si factorizamos el 32 tenemos que es igual a 2^5. También es sencillo, porque sólo tiene un factor primo (el 2). Entonces sus divisores son 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5. Es decir, hay 6. ¿Podemos establecer una regla general en estos casos? Evidentemente. Si el número se factoriza como p^a, entonces sus divisores son

$$1, p, p^2, p^3, \ldots, p^a$$

que son justamente tantos como indica el exponente (a), más el 1. En definitiva, si llamamos d(n) a la función que proporciona el número de divisores del número n, entonces

$$d(p^a) = a + 1$$

Fácil. Pero la cosa se complica cuando la factorización tiene más de un factor primo, por ejemplo, ¿qué pasa si n = p^a × q^b? Tampoco es muy complicado utilizando el recurso de una tabla, del siguiente modo:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & p & p^2 & \cdots & p^a \\
q & pq & p^2q & \cdots & p^aq \\
q^2 & pq^2 & p^2q^2 & \cdots & p^aq^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
q^b & pq^b & p^2q^b & \cdots & p^aq^b
\end{array}$$

$$d(p^a\, q^b) = (a + 1)(b + 1)$$

Es sencillo deducir que, en general, tengamos los factores primos que tengamos, el número total de divisores es el producto de todos los exponentes más una unidad en cada uno de ellos. Entonces, el número total de divisores que proporciona la expresión de marras, la de nuestro enigma, teniendo en cuenta que $360528 = 2^4 \times 3 \times 7 \times 29 \times 37$, será $d(360528) = (4+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$

¿Os atrevéis a encontrarlos todos?

Un último comentario sobre las respuestas de los lectores y la dificultad de la cuestión. Me llegaron un par de respuestas por correo electrónico perfectamente resueltas (de matemáticos o profesores de matemáticas seguramente), en twitter se describió otra, y en los comentarios de los lectores, alguno también proporcionaba las pistas necesarias para la resolución (vía binomio de Newton, para obtener los coeficientes de la división de los polinomios). Otros cuestionaban la veracidad de que los alarifes musulmanes de 1492 conocieran el calendario gregoriano o los exponentes en las expresiones matemáticas.

Reitero una vez más que la historia en la que enmarqué el ejercicio es totalmente inventada, pero por aclarar estas cuestiones de historia de las matemáticas (interesantes por sí mismas, como cualquier otro aspecto de la cultura universal), en efecto el calendario gregoriano se empieza a considerar a partir de 1582. Pero, astrónomos y matemáticos árabes habían considerado otros sistemas para adecuar con más precisión la duración de los años a los movimientos de la Tierra. En concreto, **Omar Khayyam** (ver la explicación en esta misma sección) corrigió el calendario persa mediante el calendario yalalí que tiene un error de un día en 3770 años, menor que el del calendario gregoriano que es de un día en 3330 años. El calendario yalalí se empezó a utilizar el 15 de marzo de 1079, y es el calendario empleado todavía hoy en países como Irán y Afganistán. Así que, aunque inventada por mí, la expresión pudo haberse escrito en 1492 por algún matemático musulmán. En cuanto a los exponentes, también a Omar Khayyam le debemos la descripción más temprana de la potencia de un binomio con exponente natural. Así que, el marco en el que se presentó la cuestión, no estaba tan desencaminado. Respecto a la dificultad de la cuestión, podríamos decir que es de grado medio-alto para alguien que haya estudiado matemáticas alguna vez en su vida, y asequible para quienes hayan cursado matemáticas superiores en cualquier grado universitario.

En cualquier caso, mi felicitación y agradecimiento a todos los lectores que trataron de resolver la cuestión por si mismos.

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la [Real Sociedad Matemática Española (RSME)]