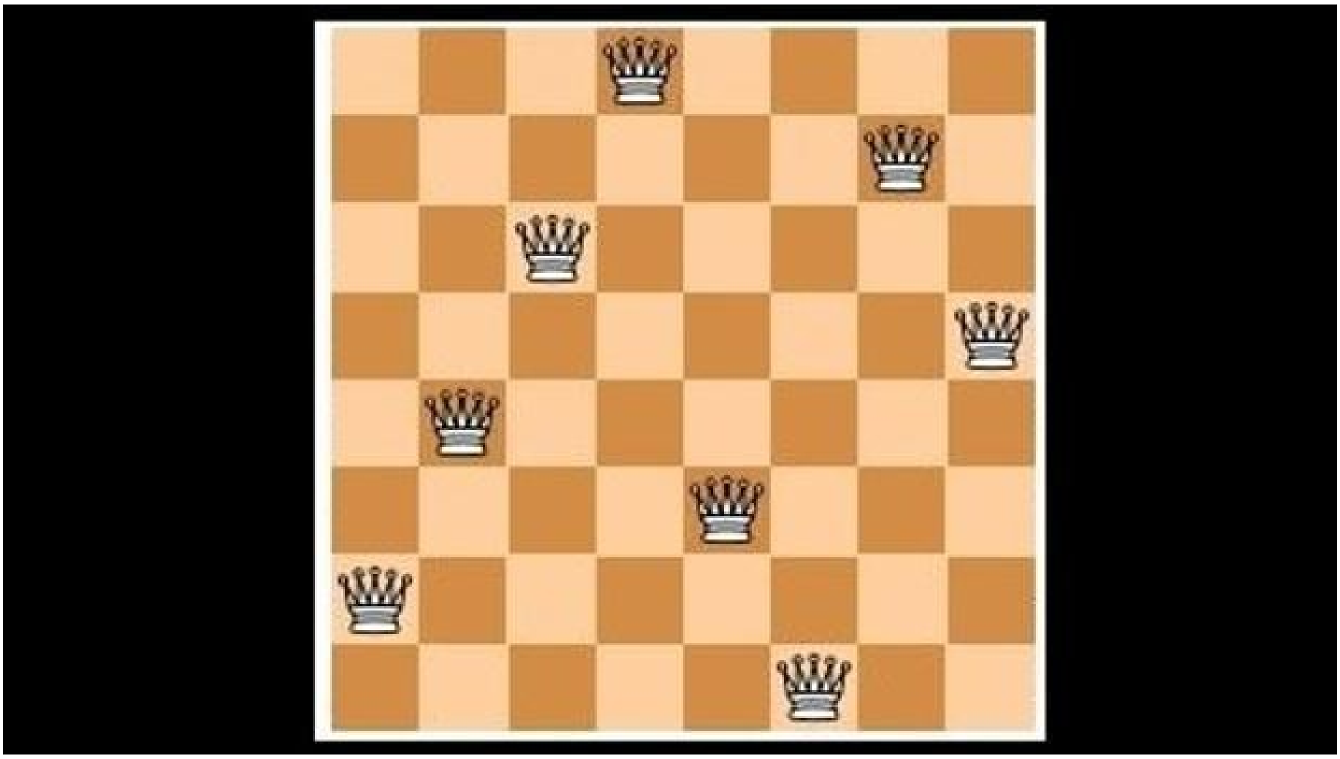
ABC, 7 de Febrero de 2022
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

La noticia de la resolución de un enigma de hace 150 años ha corrido como la pólvora, pero las cosas no son tan sencillas

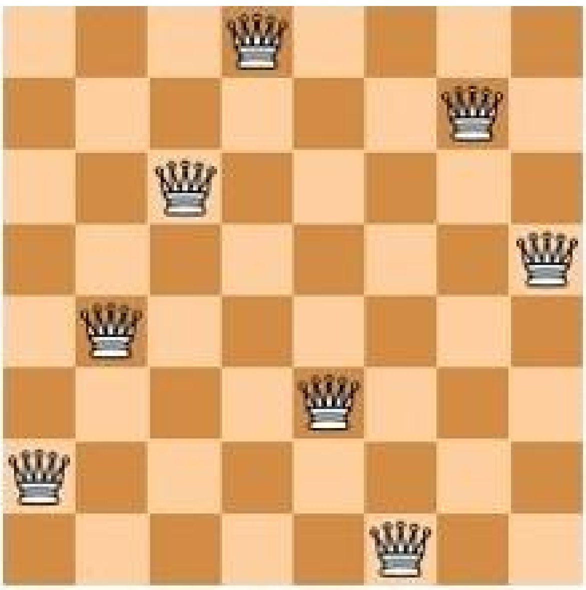


Una de las soluciones al problema de las ocho damas - Archivo

Hace unos días se difundió en las agencias de noticias y, posteriormente, en algunos medios de comunicación, la noticia de que un matemático de Harvard había resuelto un problema propuesto hace 150 años. Como todo, hay que hacer algunas matizaciones.

En 1848, el ajedrecista **Max F. W. Bezzel** (1824 – 1871) propuso la cuestión de cómo disponer ocho damas en un tablero estándar de ocho por ocho escaques de manera que ninguna amenazara al resto (la dama se puede desplazar a todas las de su fila, columna o diagonales). Aunque los matemáticos y profesores de matemáticas llevemos la fama de proponer problemas y ejercicios de nuestra asignatura constantemente (tanto que gran parte del tiempo de las clases nos la pasamos resolviéndolos y explicando sus soluciones), hay muchas otras disciplinas en las que se plantean montones de ejercicios.

Los juegos son una parcela importante en estos menesteres, en particular el ajedrez. Y miren ustedes por donde, hay una conexión muy estrecha entre ellos y las matemáticas, habida cuenta de que éstas son capaces de modelizar de modo abstracto prácticamente cualquier actividad humana.

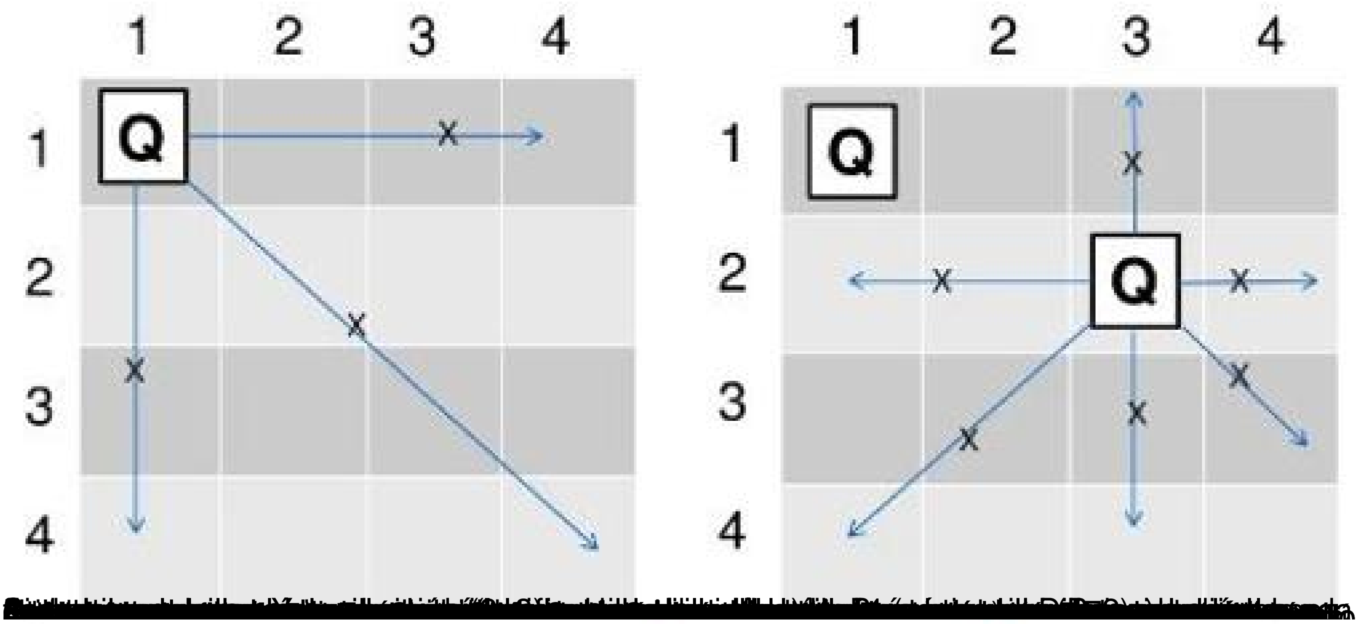


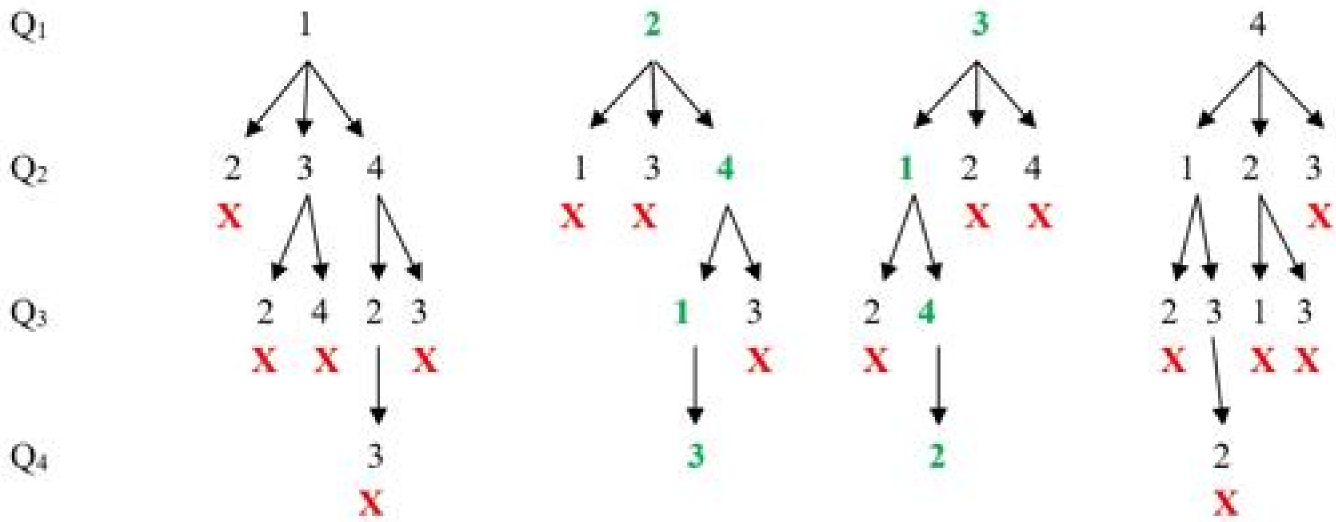
Matemáticos y ajedrecistas célebres pensaron en el problema de las ocho damas, y encontraron varias soluciones. Entonces se planteó la cuestión de cuántas maneras diferentes es posible hacerlo. La primera solución completa la describió sólo dos años después, en 1850, el matemático **Franz Nauck**. Y a su vez planteó el problema general de las n damas: dado un tablero cualquiera de n x n escaques, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden disponer n damas, sin que ninguna amenace al resto? Por cierto, una cuestión previa, mucho más sencilla de resolver: ¿podrían situarse más de n damas verificando esa condición? La respuesta es obviamente negativa, como máximo pueden ser n damas, porque no puede haber más de una por fila y/o columna. Ahora bien, ¿se pueden controlar todas las casillas del tablero con menos de n damas para un tablero n x n? ¿Cuál sería el número mínimo, y donde deberían colocarse? ¿Y cuántas configuraciones diferentes habría?

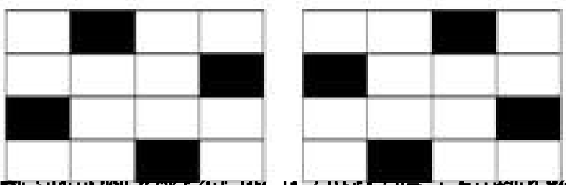
Para nuestro problema inicial, en un **tablero 8 x 8, hay 92 soluciones** (en la imagen anterior vemos una posible), aunque sólo 12 de ellas son esencialmente distintas, ya que las restantes se deducen de esa docena por giros y simetrías. Pero antes de abordar esta situación, examinemos casos con menos casillas, para comprender mejor el problema.

Tablero 4 x 4

Analicemos el problema en sus primeros casos. Si el tablero fuera de una sola casilla (1 x 1), es evidente que hay una sola manera de colocar una dama. En los tableros 2 x 2 y 3 x 3 no es posible situar respectivamente 2 y 3 damas sin que se amenacen mutuamente. Veamos en el caso 4 x 4.


1 2 3 4
1 2 3 4
Q
Q
1 2 3 4
1 2 3 4
Q


Q1
Q2
Q3
Q4



n	Sol. diferentes	Total soluciones
1	1	1
2	0	0
3	0	0
4	1	2
5	2	10
6	1	4
7	6	40
8	12	92
9	46	352
10	92	724

Tablero 8 x 8

Como indicamos anteriormente, el problema original de las 8 damas fue resuelto a los dos años de su planteamiento. En el libro '**Ajedrez y Matemáticas**' (Ed. Martínez Roca, 1974) aparecen descritas las 12 soluciones diferentes al mismo. Con la notación expuesta anteriormente serían

1) 15863724

2) 16837425

3) 24683175

4) 25713864

5) 25741863

6) 26174835

7) 26831475

8) 27368514

9) 27581463

10) 35281746

11) 35841726

12) 36258174

Todas ellas tienen 7 simetrías diferentes (aparte de la descrita), salvo la décima que sólo tiene 4 (la dada y las de giros de 90º, 180º y 270º del tablero). Una sencilla cuenta nos da por tanto todas las soluciones posibles: 11 x 8 + 4 = 92. Un número pequeño si tenemos en cuenta que ocho damas pueden colocarse en 61 escaques, ¿de cuántas formas? (Repasen la **Combinatoria**: serían combinaciones de 64 elementos tomados de 8 en 8, es decir, 4.426.165.368 solamente).

En la primera imagen de este artículo aparece la solución 47382516. Es una situación simétrica de las 12 dadas anteriormente. ¿Saben de cuál de ellas?

Tablero n x n

Conforme aumenta el número de filas y columnas del tablero, el número de soluciones crece considerablemente. En el caso de un tablero 20 x 20, por ejemplo, el número de soluciones diferentes es de 4.878.666.808 y el total, contando todas sus simetrías y giros de 39.029.188.884. Todas ellas se han calculado con algoritmos y ordenadores. Pero no existe una expresión general que nos diga ésta o aquella es esa cantidad.

Michael Simkin

El becario postdoctoral **Michael Simkin**, del Centro de Ciencias y Aplicaciones Matemáticas de la Universidad de Harvard (Cambridge, Massachusetts, EE. UU.) y **Zur Luria**, graduado de la Universidad hebrea de Jerusalén y experto ajedrecista, han estado cinco años trabajando en el problema, con varios artículos publicados. Hace unas semanas Simkin ha publicado un nuevo artículo en solitario en el que recapitula todas sus investigaciones y explica con cierto detalle los algoritmos desarrollados en sus trabajos. Los medios de comunicación se han hecho eco de la noticia recalcando, como siempre, lo espectacular: que si es un problema planteado hace 150 años, que si ha logrado dar una cota inferior al valor exacto, es decir, una aproximación al número mínimo de configuraciones posibles, y es la cifra más cercana que se puede obtener en este momento todas estas configuraciones distintas para un tablero n x n:

$$(0.143n)^n$$

Y más. Si el lector calcula los valores que esa expresión desde n igual a 1 en adelante, y los compara con los valores exactos que hemos descrito en la tabla descrita más arriba, realmente no parecen aproximaciones demasiado 'buenas': [0.143, 0.0817, 0.0789, 0.10704, 0.1868, 0.3989, 1.007, 2.9336, 9.68739, 35.7569] y probablemente exclame: «¡¡Cinco años para esto!!».

Cuando un matemático lee ese tipo de noticias, con valores numéricos como ese 0.143, lo primero que hace es preguntarse «¿de dónde sale?». Y acaba yendo a la fuente original, al artículo. Y descubre que las cosas no son tan simples como han difundido los medios de comunicación. Para empezar, con un vistazo rápido, el artículo (de 51 páginas) contiene un montón de resultados, proposiciones y demostraciones nada triviales, y además ese 0.143 no aparece por ninguna parte. Bueno, aparece, pero no así.

El objeto del artículo es demostrar que, si Q(n) son el total de posibles configuraciones en que una dama puede colocarse en un damero n x n sin que ninguna esté amenazando a ninguna de las demás, entonces existe una constante α que se encuentra en el intervalo (1.94, 1.9449) tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{Q}(n)^{1/n}}{n} = e^{-\alpha}.$$

Es decir que, asintóticamente (a grandes rasgos, que los valores son más precisos cuanto más grande es n; por eso los valores de n pequeños resultan muy malos), el número de configuraciones se 'acerca' a esa cota inferior. Por cierto:

$$e^{-1.94} \approx 0.1437039497$$
$$e^{-1.9449} \approx 0.1430015227$$

de ahí el 0.143 de la fórmula. Del límite anterior, para n lo suficientemente grande (detalle que se obvia y es muy importante para entender lo que se ha obtenido):

$$Q(n) \approx (n\frac{1}{e^{\alpha}})^{n}$$

lo cual 'acerca' el resultado del paper con lo publicado en los medios de comunicación.

En dicho artículo Simkin ha utilizado algoritmos de tipo probabilístico y combinatorio: esencialmente algoritmos voraces aleatorios y de absorción. Su mecanismo no es difícil de comprender; en posteriores entregas podemos explicar brevemente en qué consisten a grandes rasgos, con ejemplos entendibles. Mediante otros algoritmos (concretamente uno de tipo entropía), el autor ha determinado también un límite superior al número de posibles configuraciones, es decir, el mayor número posible de ellas, de modo que tenemos acotado el valor exacto entre dos aproximaciones, que no distan mucho entre sí, para cualquier valor de n, por grande que sea. Pero de nuevo, con el matiz que hemos comentado para interpretar esas cotas.

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)