

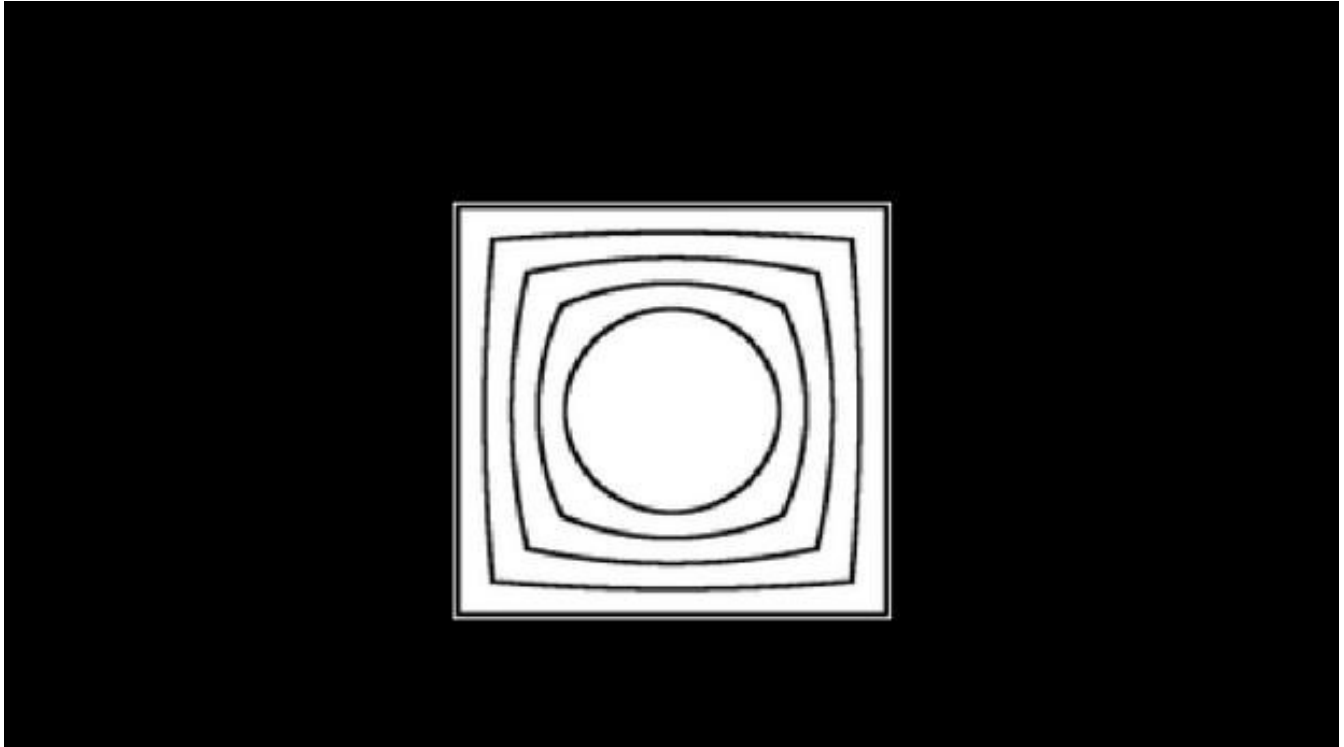
ABC, 25 de Abril de 2022

CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas

Alfonso Jesús Población Sáez

En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer los objetos, pero sin romper ni pegar nada. Si a un cuadrado se le 'golpea' en sus vértices de forma precisa, se puede convertir en una circunferencia

['Nobel' de matemáticas para Dennis Sullivan por el estudio de los objetos que no cambian cuando se deforman](#)



El cuadrado y el círculo en topología son equivalentes - ABC

Hace unas semanas se hizo pública la concesión del [Premio Abel 2022](#) al matemático norteamericano

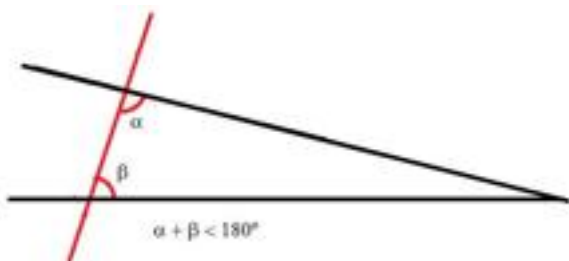
ennis Parnell Sullivan

por sus contribuciones a la topología entre otros merecidos méritos. Los medios de comunicación se hicieron eco de la noticia, pero no han sido muchos los que han podido describir con detalle sus trabajos e investigaciones, habida cuenta de su especificidad y la dificultad para ser explicadas de un modo comprensible, sin un bagaje técnico suficiente, incluso para matemáticos de otras especialidades.

Leyendo los comentarios de los lectores al artículo publicado en este diario, costumbre que quizá debería ir abandonando pero no consigo, porque sigo confiando en que es un medio magnífico para aclarar (cuando sabemos) las cuestiones que no han quedado claras o sencillamente no se han detallado, me encuentro con alguno llamativo.

Concretamente, un lector se sorprende de que «**un círculo y un cuadrado sean la misma cosa**» y, aunque yo no tengo nada que ver con la redacción de ese artículo, creo necesario explicar siquiera por encima el porqué de esa afirmación, porque creo que es una de esas ideas tipo conocimiento básico, o como se decía antes, de cultura general. Por cierto, dicha afirmación iba precedida de la aclaración «en topología». De donde se deduce que el lector no sabe qué es la topología. Vamos con ello.

Cuando Euclides de Alejandría recopila en sus célebres Elementos (la obra más leída de la Historia después de la Biblia, lo cual tiene mérito, al tratarse de un tratado matemático) todo el saber griego de la Geometría, lo organiza con el primer esquema metódico, lógico y preciso que se conozca de la Historia, utilizando los mínimos conceptos posibles, a partir de los cuales deduce todos los resultados conocidos. Comienza definiendo los objetos, las nociones con las que se va a trabajar (punto, recta, superficie, ángulo y sus tipos, circunferencias y sus elementos, etc.). Después explicita cinco nociones comunes a esos objetos y cinco postulados o axiomas, verdades estas últimas que no se pueden probar pero que de tan evidentes como son, cualquiera las daría por ciertas sin mayores objeciones. Todas excepto la última, el conocido como quinto postulado o axioma de las paralelas, que ha dado mucho juego a lo largo de los siglos, y del que podemos hablar largo y tendido otro día.



Simplemente indicar sobre él, a modo de resumen, que a diferencia de la sencillez de los otros cuatro, su formulación resultaba enrevesada (de hecho, es una proposición condicional: Si una línea recta (la roja de la imagen) corta a otras dos formando con ellas ángulos interiores a un mismo lado menores que dos rectos (o sea menos que 180°), dichas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado en que están situados esos ángulos menores que dos rectos), y desde su presentación causó discrepancias. Se investigó entonces en la posibilidad de eliminarlo, analizando las demostraciones de las proposiciones en las que se utiliza ese axioma por ver si era posible probarlas sin utilizarlo. Intentos inútiles, a lo largo de siglos. A la vez se buscaron enunciados equivalentes más sencillos, y se dieron unos cuantos, pero ninguno se logra probar sin suponer el quinto postulado, ni equivalentemente se logra

demostrar el quinto postulado sin suponer cierta su formulación alternativa.

A principios del siglo XIX, dos matemáticos, modificando ese quinto postulado, cada uno con una formulación diferente e independientemente entre sí, consiguen demostrar la coherencia de las geometrías que surgen (se denominarán geometrías no euclideas, y serán la geometría hiperbólica y la geometría esférica, ambas con perfecto sentido y aplicación cuando nos encontramos en determinadas superficies). Anteriormente había surgido también la geometría proyectiva, que daba sentido y fundamentación matemática a los métodos de la perspectiva que habían desarrollado los artistas del Renacimiento. E incluso antes, [René Descartes](#) introduce herramientas algebraicas definiendo la geometría analítica.



En el siglo XX, **Benoît Mandelbrot** desarrolla la geometría fractal, que parece simular mucho mejor que ninguna otra la representación de fenómenos y objetos naturales (como la forma de las nubes, de las costas, de las montañas o la trayectoria de un rayo, por ejemplo; imagen: rama de helecho fractal). Hay más, pero con esas son suficientes para preguntarnos: ¿Cómo compatibilizar los métodos sintético, algebraico y el analítico? ¿Podría definirse una única Geometría que aglutine todas las anteriores, son diferentes caras de la misma moneda, o son ramas matemáticas diferentes?

Estas cuestiones ya fueron planteadas a finales del siglo XIX y principios del XX, y se consiguió dar una base común, pensando no en los objetos y sus peculiaridades (método

sintético) como hizo **Euclides**, sino en conjuntos de axiomas, de propiedades comunes a todas esas visiones. En definitiva, la fundamentación de la Geometría pasaba por establecer unos axiomas similares a lo que se hacía en el **Álgebra**

Abstracta, con sus estructuras (grupos, anillos, cuerpos, etc.). Se comprueba entonces que cada geometría es el estudio de ciertas propiedades que no cambian cuando se le aplican un tipo de transformaciones. Esas propiedades, por no cambiar, se las denomina invariantes, y las transformaciones que no hacen cambiar a un invariante han de tener estructura de grupo bajo la operación de composición (componer dos transformaciones es hacer una de ellas y aplicarle la otra transformación al resultado de la primera).

La **Geometría Euclídea**, que seguimos utilizando en nuestro día a día, responde perfectamente a cuestiones que tenemos a nuestro alrededor, a los que podemos aplicar propiedades métricas (ángulos, distancias, áreas, volúmenes) y determinar perfectamente la forma de los objetos que nos rodean. Ese 'que nos rodean' es lo que los matemáticos denominamos estructura local. Sin embargo, no puede dar respuesta, por ejemplo, a cómo es la forma del universo en que estamos inmersos. Ni siquiera si el suelo que pisamos es plano, esférico, o que estructura global tiene. Dos objetos son equivalentes en la geometría euclídea si podemos pasar de uno a otro mediante una transformación que mantenga sus propiedades métricas, es decir que conserve las distancias. Esas transformaciones se denominan por eso isometrías, y son las traslaciones, las rotaciones o giros, y las simetrías o reflexiones. También se les llama movimientos rígidos, precisamente porque mantienen los objetos como están, ya que transforman rectas en rectas, circunferencias en circunferencias del mismo radio y conservan los ángulos.

Esta concepción sin embargo es demasiado rígida para determinar, por ejemplo, si dos fotografías diferentes de un mismo rostro corresponden de verdad a la misma persona. Al estar tomadas en diferentes momentos, en otra postura, con otra cámara, etc., no podemos comprobar midiendo distancias si representan o no lo mismo. La topología en cambio estudia las características de los objetos que permanecen inalteradas después de aplicarles una transformación continua.

En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer los objetos, pero sin romper, ni pegar nada. Si a un triángulo o un cuadrado le voy dando con cuidado golpecitos en sus vértices, y lo hago con cierto esmero, lo puedo convertir en una circunferencia. Son, por tanto, topológicamente equivalentes, porque he pasado de uno a otro sin romper ni pegar nada. En cambio, un triángulo no se puede transformar dándole golpecitos a sus lados en una corona circular (un anillo), porque para conseguir el agujero tendría que romper la superficie del triángulo. Estas transformaciones se entienden muy bien pensando en que los objetos fueran de goma o de plastilina, que se pueden moldear con facilidad. Para un geómetra euclidiano, el

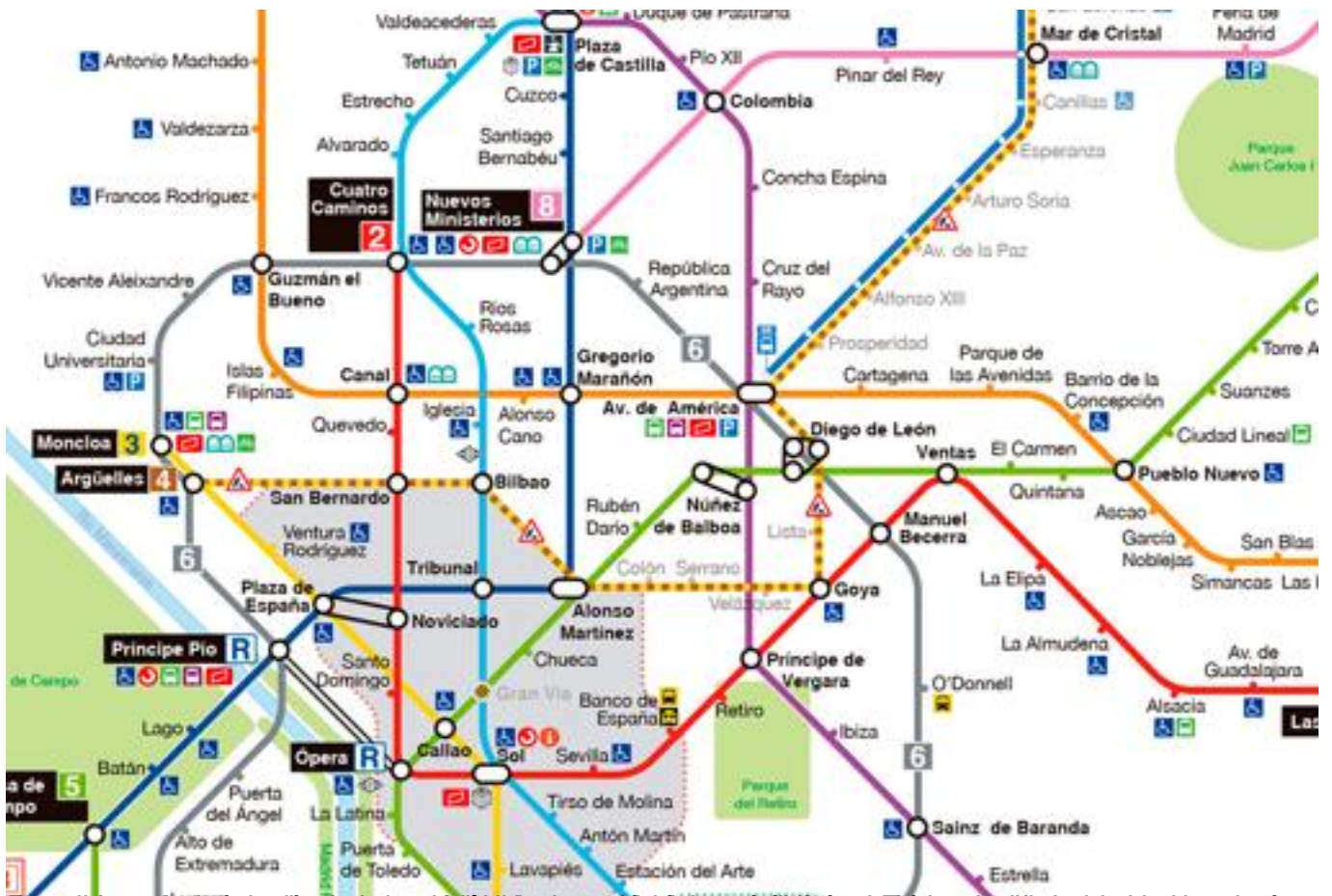
cuadrado es el objeto con cuatro lados con idéntica longitud y un ángulo recto en cada esquina; para un topólogo el único interés del cuadrado es que está formado por una única línea continua que forma un bucle. Espero que con esta explicación quede entendida perfectamente la frase «un círculo y un cuadrado son la misma cosa, topológicamente hablando», aunque entre matemáticos se omite el añadido porque es claro en qué contexto hablamos.



Así como la geometría euclídea estudia propiedades métricas de los objetos, la topología lo hace con otras propiedades como son el número de agujeros, el tipo de consistencia (o textura) que presenta un objeto, la proximidad, la conectividad, la compacidad, etc. De este modo, la esfera, el cubo, el corazón e incluso el tenedor de la imagen pueden deformarse de forma continua y transformarse en cualquiera de los demás; sin embargo, no pueden hacerlo para ser la taza o el neumático, porque deberían rasgarse para hacer el agujero que tienen. Estos dos últimos sí son topológicamente equivalentes.

Un ejemplo clásico en el que las distancias o la representación exacta de las cosas no nos importan es el plano del [metro](#). En él lo que buscamos es la información de las líneas, las paradas, las intersecciones de líneas, etc., pero sabemos que no describe cómo están físicamente en la realidad.

El caso en el que el círculo y el cuadrado son lo mismo



[Matemática Española \(RSME\)](#) [Real Sociedad](#)