

24. (Enero 2006) SOLUCIÓN CONCURSO NAVIDEÑO 2005

Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)
Domingo 01 de Enero de 2006 00:29

El año pasado realizamos unos juegos de adivinación relacionados con el teorema chino del resto y propusimos el problema de resolverlos matemáticamente.

Algunos de nuestros lectores nos han ofrecido sus respuestas y, como agradecimiento, las vamos a reproducir aquí.

El primer problema, planteado por el propio **Sun Tsu**, es el siguiente:

Tengo un conjunto de objetos. Cuando los cuento de tres en tres, me sobran dos; cuando los cuento de cinco en cinco, me sobran tres; cuando los cuento de siete en siete, me sobran dos. ¿Cuántos objetos poseo?

Solución:

La primera condición establece que, si tengo x objetos, $x - 2$ es múltiplo de 3; la tercera condición afirma también que $x - 2$ es múltiplo de 7. Por tanto, $x - 2$ es múltiplo de 21. Por otra parte, de la segunda condición deducimos que $x - 3$ es múltiplo de 5. El número más pequeño que cumple ambas condiciones es precisamente $x = 23$.

El segundo problema, planteado como juego de adivinación, se puede enunciar como sigue:

Sea N un número entre 1 y 1000 y a, b, c los restos de la división de N por 7, 11 y 13, respectivamente. Hallar el valor de N .

24. (Enero 2006) SOLUCIÓN CONCURSO NAVIDEÑO 2005

Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)
Domingo 01 de Enero de 2006 00:29

Solución:

El número pensado es el resto de la división de $715a + 364b + 924c$ por 1001. ¿De dónde han salido estos números?

"715" es precisamente el mínimo múltiplo de "11 x 13" que es una unidad mayor que alguno de los múltiplos de 7; "364" es el mínimo múltiplo de "7 x 13" que es una unidad mayor que alguno de los múltiplos de 11; "924" es el mínimo múltiplo de "7 x 11" que es una unidad mayor que alguno de los múltiplos de 13; por último, "1001" es precisamente el producto "7 x 11 x 13" (lo que justifica además el segundo de los trucos).

Una solución más detallada la ofrece el ganador de nuestro concurso, **Miguel Herraiz Hidalgo**.

Transcribimos aquí su explicación.

Caso Particular

Escojamos un número cualquiera. En mi caso, elegí el 821.

$$821 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$821 \equiv 7 \pmod{11}$$

$$821 \equiv 2 \pmod{13}$$

¿Cómo se puede adivinar el número elegido?

En el primer caso nos olvidamos del 7, y consideramos el producto de los otros dos divisores: $11 \cdot 13 = 143$.

$$143 \equiv 3 \pmod{7}$$

24. (Enero 2006) SOLUCIÓN CONCURSO NAVIDEÑO 2005

Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)
Domingo 01 de Enero de 2006 00:29

Ahora buscamos un número que multiplicado por este 3, sea congruente con 1 módulo 7.
En este caso el 5.

Nos quedaremos con el producto de este 5 y el primer 2 que obtuvimos para el divisor 7, y lo multiplicamos por el 143.

$$2 \cdot 5 \cdot 143 = 1430$$

Acordaos de este número.

Hacemos lo mismo para el 11. Nos olvidamos de él, y calculamos el producto de los otros dos: $7 \cdot 13 = 91$.

$$91 \equiv 3 \pmod{11}$$

Buscamos un número que multiplicado por 3 sea congruente con 1 módulo 11. El 4. Y así obtenemos el siguiente producto:

$$7 \cdot 4 \cdot 91 = 2548$$

Repetimos la operación con el 13.

Calculamos cuánto es $7 \cdot 11$, y comprobamos su congruencia módulo 13.

24. (Enero 2006) SOLUCIÓN CONCURSO NAVIDEÑO 2005

Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)

Domingo 01 de Enero de 2006 00:29

$$77 \equiv 12 \pmod{13}$$

Además 12 también es el número que buscamos para:

$$12 \cdot 12 = 144 \equiv 1 \pmod{13}$$

Obtenemos el último producto:

$$2 \cdot 12 \cdot 77 = 1848$$

Para terminar, sumamos los tres resultados. Como el número que buscamos está entre 0 y 1000, tendremos que hallar su congruencia módulo $7 \cdot 11 \cdot 13$, es decir, módulo 1001.

$$1430 + 2548 + 1848 = 5826$$

$$5826 \equiv 821 \pmod{1001}$$

24. (Enero 2006) SOLUCIÓN CONCURSO NAVIDEÑO 2005

Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)

Domingo 01 de Enero de 2006 00:29

Caso General

Para un número N cualquiera, hallamos los restos a , b , y c , módulo 7, 11 y 13, respectivamente.

$$N \equiv a \pmod{7}$$

$$N \equiv b \pmod{11}$$

$$N \equiv c \pmod{13}$$

En el primer caso, el producto que obtendremos será:

$$a \cdot 5 \cdot 143 = \mathbf{715 \cdot a}$$

En el segundo caso:

$$b \cdot 4 \cdot 91 = \mathbf{364 \cdot b}$$

Y por último:

$$c \cdot 12 \cdot 77 = \mathbf{924 \cdot c}$$

24. (Enero 2006) SOLUCIÓN CONCURSO NAVIDEÑO 2005

Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)
Domingo 01 de Enero de 2006 00:29

Sumamos estos tres resultamos, y hallamos su congruencia módulo 1001.

$$715a + 364b + 924c \equiv N \pmod{1001}$$

Otro concursante, Alberto Castaño Domínguez, también afirma conocer la solución pero no la detalla en su respuesta.

El último problema, ya clásico, se enuncia como sigue:

*Escribe en una calculadora un número de tres cifras ABC y, a continuación, el mismo número. Tienes así un número de seis cifras ABCABC.
Divídelo por 7 y no me digas el resto. Sé que es cero.
Divide el resultado por 11 y ¡sorpresa! también la división es exacta.
Divide el resultado por 13 y ¡por increíble que parezca! también el resto es cero.
¡Sorpresa final! El cociente obtenido es el número que habías pensado inicialmente.*

Soluciones recibidas:

(1) Fernando Yagüe.

La solución del problema es porque si multiplicamos $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ y si multiplicas un número ABC por 1001 = ABCABC

(2) Daniel Garrido Sánchez e Inmanor García Retortillo. I.E.S. Gabriel y Galán de Montehermoso (Cáceres).

El número $ABCABC = ABC \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = ABC \cdot 1001$ por lo tanto el número es divisible por 7, el cociente por 11 y el cociente por 13.

(3) Alberto Castaño Domínguez.

El segundo es resultado de que 7 por 11 por 13 es 1001, luego cualquier número de la forma ABCABC es ABC por 1001, es decir, ABC por 7 por 11 por 13, luego al dividirlo entre

24. (Enero 2006) SOLUCIÓN CONCURSO NAVIDEÑO 2005

Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)

Domingo 01 de Enero de 2006 00:29

7, 11 o 13 obtenemos resto nulo, y al final conseguimos el número ABC sin repetir.

(4) Miguel Herraiz Hidalgo.

$ABCABC = 1001 \cdot ABC$ dando la "casualidad" de que $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ de ahí que el resto entre 7, 11 y 13 sea siempre 0, y que el cociente final sea ABC.

Como es habitual, el ganador del concurso recibirá un obsequio por parte de Divulgamat. Agradecemos nuevamente a todos los concursantes su participación y animamos a todos los lectores a que participen la próxima vez.