

### 35. (Enero 2007) SOLUCIÓN CONCURSO NAVIDEÑO 2006

Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)  
Lunes 01 de Enero de 2007 00:00

---

Recuerdo en primer lugar el problema planteado el mes pasado:

---

#### EL JUEGO DE LOS MONTONES

- Coloca diez cartas en un montón sobre la mesa.
- Divide ese paquete en tantos montones como desees. Cada montón tendrá las cartas que tú quieras.
- Coge una carta de cada uno de los montones y forma con todas ellas un nuevo montón.
- Repite esta misma operación (coger una carta de cada montón y formar con todas ellas un nuevo montón) un total de doce veces.

¿Se puede saber cuál es la disposición final de las cartas, es decir cuántos montones habrá y cuántas cartas tendrá cada montón?

¿Podrías deducir una situación más general, es decir saber la disposición final en el caso que se utilice una cantidad distinta de cartas?

---

**Transcribo a continuación la solución ofrecida por nuestro seguidor Alberto Castaño, a quien agradecemos su participación y quien ha sido merecedor de un regalo por parte de la redacción de Divulgamat.**

Estudio del caso general:

---

### 35. (Enero 2007) SOLUCIÓN CONCURSO NAVIDEÑO 2006

Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)  
Lunes 01 de Enero de 2007 00:00

---

Llamemos redistribución al proceso de coger una carta de cada montón y formar uno nuevo con ellas. Si se experimenta un poco, se ve que con algunos números se llega siempre a una posición estable y con otros se llega a un ciclo de algunas. Pues bien, veamos que se llega a una posición estable si y sólo si el número  $N$ , se puede expresar como suma de naturales consecutivos, es decir, como en nuestro caso,  $N=10=1+2+3+4$ :

Supongamos que estamos en una posición estable y tenemos  $k$  montones ordenados por número de cartas  $m_1, m_2, \dots, m_k$ . Al redistribuir las cartas, nos quedamos con los montones del modo  $m_1-1, m_2-1, \dots, m_k-1$ , y otro más con  $k$  cartas. Como  $m_1-1$  era el que menos tenía y ahora sigue habiendo otro con el mismo número de cartas, necesariamente  $m_1-1 = 0$ , luego  $m_1 = 1$ .

$m_1 = 1$   
 $m_1 - 1 = 0$ , luego  $m_1 = 1$

$m_2 = 2$   
 $m_2 - 1 = 1$  tenía una sola carta. El siguiente era  $m_3 = 3$ .

$m_3 = 3$   
 $m_3 - 1 = 2$ , por lo que  $m_4 = 4$ .

$m_4 = 4$   
 $m_4 - 1 = 3$  y  $m_5 = 5$ .

$m_5 = 5$   
 $m_5 - 1 = 4$ . Razonando así con los demás, llegamos a que el montón  $m_k$

$m_k$  tenía  $j$  cartas exactamente, con  $j=1, \dots, k$ . Por lo que  $N=1+2+\dots+k$ . Ahora bien, si el número es de esa forma, podemos formar  $k$  montones  $m_1, \dots, m_k$

$m_1 = 1, m_2 = 2, \dots, m_k = k$ , cada uno con  $j$  cartas, y ya hemos visto que ésta es una posición estable.

Entonces, si  $N$  no es suma de naturales consecutivos, no, digamos, convergerá. Como sólo hay un número finito de posiciones (repartos en montones), si a base de repetir la redistribución pasamos por todas las combinaciones posibles, deberá repetir alguna, entrando en un ciclo. Normalmente, ese ciclo tendrá menos posiciones distintas que todas las posibles, aunque en algún caso particular se alcance; por ejemplo, si  $N=3$ , el ciclo es  $1, 1, 1 - 3 - 1, 2$ .

Por último, antes de centrarnos en el caso  $N=10$ , cabe señalar qué pasaría si en lugar de una carta, quitáramos más de una de cada montón. Entonces, sólo podemos dividir  $N$  en montones con una cantidad múltiplo del número de cartas que quitamos, y el caso se reduce a estudiar qué pasaría si hacemos la redistribución normal cuando  $N$  es igual al anterior número de cartas dividido por cuantas se quitan de cada montón.

### 35. (Enero 2007) SOLUCIÓN CONCURSO NAVIDEÑO 2006

Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)

Lunes 01 de Enero de 2007 00:00

---

Ahora ya sabemos que en nuestro caso particular,  $N=10$ , siempre llegamos a la posición de estabilidad 1,2,3,4, pero, ¿en cuántas redistribuciones? Haciendo un estudio de todos los casos posibles podemos ver que sólo se necesitan doce, en los siguientes casos:

1,1,2,3,3 - 1,2,2,5 - 1,1,4,4 - 3,3,4 - 2,2,3,3 - 1,1,2,2,4 - 1,1,3,5 - 2,4,4 - 1,3,3,3 - 2,2,2,4 -  
1,1,1,3,4 - 2,3,5 - 1,2,3,4  
1,2,2,2,3 - 1,1,1,2,5 - 1,4,5 - 3,3,4 y sigue como el anterior  
1,1,1,2,2,3 - 1,1,2,6 - 1,4,5 y como el anterior

Con todas las demás posiciones, el número de redistribuciones necesario es menor.