Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)
Domingo 01 de Enero de 2006 00:29

El año pasado realizamos unos juegos de adivinación relacionados con el teorema chino del resto y propusimos el problema de resolverlos matemáticamente.

Algunos de nuestros lectores nos han ofrecido sus respuestas y, como agradecimiento, las vamos a reproducir aquí.

El primer problema, planteado por el propio **Sun Tsu,** es el siguiente:

Tengo un conjunto de objetos. Cuando los cuento de tres en tres, me sobran dos; cuando los cuento de cinco en cinco, me sobran tres; cuando los cuento de siete en siete, me sobran dos. ¿Cuántos objetos poseo?

Solución:
La primera condición establece que, si tengo x objetos, x – 2 es múltiplo de 3; la tercera condición afirma también que x – 2 es múltiplo de 7. Por tanto, x – 2 es múltiplo de 21. Por otra parte, de la segunda condición deducimos que x – 3 es múltiplo de 5. El número más pequeño que cumple ambas condiciones es precisamente x = 23.

El segundo problema, planteado como juego de adivinación, se puede enunciar como sigue:

Sea N un número entre 1 y 1000 y a, b, c los restos de la división de N por 7, 11 y 13, respectivamente. Hallar el valor de N.

Solución:
El número pensado es el resto de la división de 715a + 364b + 924c por 1001. ¿De dónde han salido estos números?
"715" es precisamente el mínimo múltiplo de "11 x 13" que es una unidad mayor que alguno de los múltiplos de 7; "364" es el mínimo múltiplo de "7 x 13" que es una unidad mayor que alguno de los múltiplos de 11; "924" es el mínimo múltiplo de "7 x 11" que es una unidad mayor que alguno de los múltiplos de 13; por último, "1001" es precisamente el producto "7 x 11 x 13" (lo que justifica además el segundo de los trucos).

Una solución más detallada la ofrece el ganador de nuestro concurso, **Miguel Herraiz Hidalgo**.
Transcribimos aquí su explicación.

Caso Particular

Escojamos un número cualquiera. En mi caso, elegí el 821.

$821 \equiv 2 \pmod{7}$
$821 \equiv 7 \pmod{11}$
$821 \equiv 2 \pmod{13}$

¿Cómo se puede adivinar el número elegido?

En el primer caso nos olvidamos del 7, y consideramos el producto de los otros dos divisores: $11 \cdot 13 = 143$.

$143 \equiv 3 \pmod{7}$

Ahora buscamos un número que multiplicado por este 3, sea congruente con 1 módulo 7. En este caso el 5.

Nos quedaremos con el producto de este 5 y el primer 2 que obtuvimos para el divisor 7, y lo multiplicamos por el 143.

2·5·143 = 1430

Acordaos de este número.

Hacemos lo mismo para el 11. Nos olvidamos de él, y calculamos el producto de los otros dos: 7·13 = 91.

$91 \equiv 3 \pmod{11}$

Buscamos un número que multiplicado por 3 sea congruente con 1 módulo 11. El 4. Y así obtenemos el siguiente producto:

7·4·91 = 2548

Repetimos la operación con el 13.

Calculamos cuánto es 7·11, y comprobamos su congruencia módulo 13.

$77 \equiv 12 \pmod{13}$

Además 12 también es el número que buscamos para:

$12 \cdot 12 = 144 \equiv 1 \pmod{13}$

Obtenemos el último producto:

$2 \cdot 12 \cdot 77 = 1848$

Para terminar, sumamos los tres resultados. Como el número que buscamos está entre 0 y 1000, tendremos que hallar su congruencia módulo $7 \cdot 11 \cdot 13$, es decir, módulo 1001.

$1430 + 2548 + 1848 = 5826$

$5826 \equiv \mathbf{821} \pmod{1001}$

Caso General

Para un número N cualquiera, hallamos los restos a, b, y c, módulo 7, 11 y 13, respectivamente.

$N \equiv a \pmod{7}$
$N \equiv b \pmod{11}$
$N \equiv c \pmod{13}$

En el primer caso, el producto que obtendremos será:

a·5·143 = **715·a**

En el segundo caso:

b·4·91 = **364·b**

Y por último:

c·12·77 = **924·c**

Sumamos estos tres resultamos, y hallamos su congruencia módulo 1001.

$715\ a + 364\ b + 924\ c \equiv \mathbf{N} \pmod{1001}$

Otro concursante, Alberto Castaño Domínguez, también afirma conocer la solución pero no la detalla en su respuesta.

El último problema, ya clásico, se enuncia como sigue:

Escribe en una calculadora un número de tres cifras ABC y, a continuación, el mismo número. Tienes así un número de seis cifras ABCABC.
Divídelo por 7 y no me digas el resto. Sé que es cero.
Divide el resultado por 11 y ¡sorpresa! también la división es exacta.
Divide el resultado por 13 y ¡por increíble que parezca! también el resto es cero.
¡Sorpresa final! El cociente obtenido es el número que habías pensado inicialmente.

Soluciones recibidas:

(1) Fernando Yagüe.
La solucion del problema es por que si multiplicamos 7*11*13=1001 y si multiplicas un numero ABC por 1001 = ABCABC

(2) Daniel Garrido Sánchez e Inmanor García Retortillo. I.E.S. Gabriel y Galán de Montehermoso (Cáceres).
El número ABCABC=ABC*7*11*13 = ABC*1001 por lo tanto el número es divisible por 7, el cociente por 11 y el cociente por 13.

(3) Alberto Castaño Domínguez.
El segundo es resultado de que 7 por 11 por 13 es 1001, luego cualquier número de la forma ABCABC es ABC por 1001, es decir, ABC por 7 por 11 por 13, luego al dividirlo entre

7, 11 o 13 obtenemos resto nulo, y al final conseguimos el número ABC sin repetir.

(4) Miguel Herraiz Hidalgo.
ABCABC = 1001·ABC dando la "casualidad" de que 7·11·13 = 1001 de ahí que el resto entre 7, 11 y 13 sea siempre 0, y que el cociente final sea ABC.

Como es habitual, el ganador del concurso recibirá un obsequio por parte de Divulgamat. Agradecemos nuevamente a todos los concursantes su participación y animamos a todos los lectores a que participen la próxima vez.