

3. $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

Escrito por Alfredo Pérez Jiménez
Sábado 01 de Enero de 2005 01:00

Demostrar que se verifica la igualdad: $\arctg 1 + \arct 2 + \arct 3 = \pi$

Utilizaremos para ello:

- * 1 papel cuadrado
- * Conocimientos básicos de Papiroflexia
- * Conocimientos básicos de Trigonometría
- * Conocimientos de Geometría

Para resolver el problema, comenzaremos por realizar los pliegues que se indican en las siguientes figuras:

Figura 1

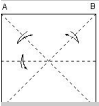


Figura 2

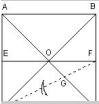


Figura 3

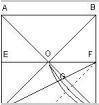


Figura 4

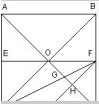
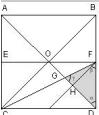


Figura 5



3. $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

Escrito por Alfredo Pérez Jiménez
Sábado 01 de Enero de 2005 01:00

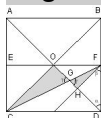
Y, a partir de aquí, utilizaremos el triángulo FGD que se ha formado, hallando las tangentes de sus ángulos α, β, γ

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha \\ = AB/DB = \text{lado/lado} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \beta \\ = CD/FD = \text{lado}/(\text{lado}/2) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tg } \gamma \\ = FH/GH \quad (\text{seguir leyendo}) \end{aligned}$$

Figura 6



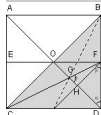
En la figura (6), se puede observar que los triángulos FHG y COG son semejantes, ya que ambos son rectángulos y tienen el ángulo γ igual por ser opuestos por el vértice. De aquí, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \text{tg } \gamma \\ = FH/GH = CO/OG \end{aligned}$$

Y como CO es igual a DO, se puede también expresar:

$$\begin{aligned} \text{tg } \gamma \\ = DO/OG \end{aligned}$$

Figura 7



3. $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

Escrito por Alfredo Pérez Jiménez
Sábado 01 de Enero de 2005 01:00

Por otro lado, en la figura (7) observar que G es el baricentro del triángulo CDB, es decir, el punto en el que se cortan sus medianas: CF, DO y la dibujada a trazos.

Una de las propiedades de este punto, centro de gravedad del triángulo, es que divide a cada una de las medianas en 2 segmentos que están en proporción 2:1, es decir, en la que nos interesa:.

$$DG = 2 \times GO$$

y de aquí:

$$DO = DG + GO = 3 \times GO$$

La demostración de esta propiedad, se puede ver en cualquier tratado de Geometría o, preferentemente para los Papiroflexas, en el fenomenal libro:

"MATEMÁTICAS Y PAPIROFLEXIA" de Jesús de la Peña Hernández

editado por la Asociación Española de Papiroflexia, ISBN 84 - 607 - 2169 - 8

Sustituyendo este valor en la expresión que teníamos esperando, podemos escribir:

$$^{\text{tg Y}} \\ = DO/OG = 3$$

Aplicando las funciones inversas, podemos escribir el primer término de la igualdad que se pretende demostrar, de la siguiente forma:

3. $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

Escrito por Alfredo Pérez Jiménez
Sábado 01 de Enero de 2005 01:00

$$\arctg 1 + \arctg 2 + \arctg 3 = \overset{\alpha + \beta + \gamma}{}$$

Por otro lado, en todo triángulo, se verifica que la suma de sus tres ángulos es igual a un ángulo llano, es decir, de 180° ó π radianes. Ver las siguientes figuras para comprobarlo "papiroflécticamente":

Figura 8

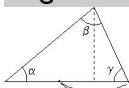


Figura 9

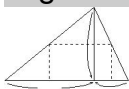
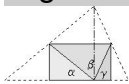


Figura 10



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

que es el segundo término de la igualdad

O sea que, finalmente, podemos escribir:

$$\arctg 1 + \arctg 2 + \arctg 3 = \pi$$

C.q.d

Vamos a continuación a resolver el problema prescindiendo de recursos a la Geometría, sustituyéndolos por un poco más de Papiroflexia.

3. $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

Escrito por Alfredo Pérez Jiménez
Sábado 01 de Enero de 2005 01:00

Tomamos un papel cuadrado y efectuamos ordenadamente los pliegues que se indican en las siguientes figuras:

Figura 11



Figura 12



Figura 13



Figura 14



Figura 15



Figura 16



Figura 17



Figura 18



Observemos ahora en esta última figura los 3 triángulos que se distinguen por distintas tonalidades de gris y centremos la atención en los ángulos α, β, γ , cada uno de ellos perteneciente a uno de los triángulos.

Figura 19



3. $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

Escrito por Alfredo Pérez Jiménez
Sábado 01 de Enero de 2005 01:00

Los 3 triángulos son rectángulos y, observando la cuadrícula, resultan evidentes los valores de las tangentes de los ángulos α, β

En el ángulo α , los catetos son iguales, por lo que la tangente valdrá 1 y; en el ángulo β , uno de los catetos es el doble del otro, por lo que la tangente valdrá 2.

En el otro triángulo, es decir el que tiene el ángulo γ , para evaluar las dimensiones de los catetos, basta con fijarse en que el cateto menor es igual a la diagonal del rectángulo formado por dos teselas de la cuadrícula, mientras que el cateto mayor mide 3 veces esa misma diagonal. Por lo que la tangente del ángulo γ valdrá 3.

Dado que los tres ángulos en conjunto forman un ángulo llano, parece ocioso insistir en que la proposición ha quedado suficientemente demostrada.