Leticia, colaboradora de la bitácora ConCIENCIA musical , escribió una breve entrada titulada Música, poesía, danza... ¿matemáticas? , que reza así:

"Haberlas... las habrá, no digo yo que no, pero después de ver este vídeo no me habléis de matemáticas, por favor".

El vídeo al que se refiere es este:

Al leer la entrada de Leticia me di cuenta de que tenía que tratar -casi diría con cierta urgencia- el asunto de la belleza en la música y en las matemáticas. Debajo del comentario breve, casual, de Leticia subyace una concepción muy común de qué es la belleza, su tipología y en qué campos se encuentra.

En estas por fuerza breves notas quiero ahondar en el concepto de belleza y cómo esta se percibe desde las dos ricas áreas que nos ocupan aquí: la música y las matemáticas. Leticia, si no te importa, te trataré de tú.

Podemos discutir el tipo de belleza que hay en la música o en las matemáticas, pero no podemos discutir la necesidad de la belleza. ¿Y por qué necesitamos la belleza? Para mí, desde luego, para comprender; no concibo la comprensión no ya artística, sino científica sin la mediación de la belleza. La experiencia estética interior descubre caminos a la comprensión que de otra manera pasarían completamente inadvertidos o a los cuales arribaría dando un largo y penoso rodeo. La experiencia estética es como un fogonazo súbito que nos alumbra senderos ocultos conducentes a tierras ignotas. En realidad, no sabemos que hay al final del camino, pero hace tiempo que comprendimos que es el tránsito por el camino lo importante.

-Bien -me dirás, Leticia-, pero ¿qué es la belleza?

La belleza se encuentra en multitud de campos del saber y en multitud de estados. Hay belleza en toda construcción que muestre unidad orgánica, coherencia formal, afán de indagación, visión profunda y original y, sobre todo, autenticidad. Y esto lo puedes encontrar en la novena sinfonía de Beethoven o en teoremas de la teoría de números.

-Hum... -hace un gesto de incredulidad Leticia.

-Veo que no te convenzo.

-Hum..., no mucho -Leticia se sincera.

Déjame que te hable más a fondo de la belleza en las matemáticas y en la música y, después de ello, examinemos sus puntos comunes (si crees que los tienen, claro).

Leticia, escucha, el hombre es poca cosa, muy poquita cosa. Pero mientras vivimos nos es dado ser inmortales. Sí, porque comprender lo que te trasciende te hace, siquiera momentáneamente, inmortal. Aprehender el infinito, lo infinito, es un buen ejemplo de ello. Cuando un niño aprende a contar asocia cada número a un dedo, tú lo sabes mejor que yo. Cuando más tarde alcanza a contar números grandes, se da cuenta de que ni siquiera en el lenguaje existen palabras para cada número. De hecho, más tarde en su formación descubrirá algo perturbado que en realidad no se nombran todos los números porque algunos se usen poco, no, ¡es porque hay infinitos! No podemos tener infinitas palabras. Sí, el infinito: el niño descubre que hay infinitos números porque dado cualquier número, al sumarle 1, nos da un nuevo número, tan legítimo y elegante como el anterior. Y así podemos repetir esto hasta el infinito, que es como decir hasta la eternidad. Comprendemos entonces lo aparentemente inasible. Y aquí hay belleza.

¿He dicho comprendemos? Comprender es otro placer, coincidirás conmigo Leticia, ¿no? Las leyes del pensamiento, el ejercicio del razonamiento, la ordenación lógica en un sistema autocontenido, la confrontación de ese sistema lógico con el mundo real, en todo esto hay también belleza. A través del razonamiento percibimos belleza. Vuelvo a los números, esta vez a los números primos; sí, aquellos que solo son divisibles por sí mismos y la unidad. ¿Cuántos hay? ¿Pocos, muchos o infinitos? Si hay infinitos, ¿cómo contarlos! Los griegos, mediante una bella (← fíjate en este adjetivo) técnica de demostración llamada reducción al absurdo, probaron que los primos eran infinitos en número. El argumento funciona como sigue (atenta, Leticia). Si hubiese solo un número finito de números primos, podría probar el siguiente truco: los multiplico todos y al resultado le añado 1. Este nuevo número, ¿es primo o no es primo? Supongamos que el nuevo número no es primo. Alguno de los números primos originales tendría que dividirlo. Por su construcción, eso es imposible. Por tanto, ha de ser primo. Esto quiere decir que hay infinitos primos, pues este proceso lo puedo repetir siempre ad infinitum. Leticia, escucha, este razonamiento es bello.

A veces los matemáticos nos emocionamos ante fórmulas porque encierran tanta verdad, tanta inteligencia, tanto afán de comprensión, tanta abstracción (de algún modo tanta humanidad), porque son capaces de unir mundos de tan dispares universos. Una de mis fórmulas favoritas es la fórmula de Euler:

e	πi	+ 1 = 0

Te juro que encierra belleza; no, mal dicho, irradia belleza. Esta fórmula, una vez que la has comprendido, te embriaga.

Volviendo a las leyes del pensamiento, las pruebas o demostraciones nos llenan de gozo con frecuencia. Las hay de muchas clases: pruebas directas, por casos, por reducción al absurdo, por contraposición, por construcción, por inducción, etc. A mí me gustan mucho las pruebas por inducción. Se aplican a propiedades que dependen de números naturales. Por ejemplo, la fórmula

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

es cierta, donde n = 1,2,... (Leticia, una fórmula enunciada para infinitos números: ¡de nuevo, el infinito!). Constan de dos pasos: en el primero buscan un número n_0 para el cual la propiedad sea cierta; en el segundo pruebas que si la propiedad es cierta para un número natural n, entonces es cierta también para n + 1. Una vez hecho esto, habrás probado la propiedad para cualquier número mayor o igual que n

0

. ¿No hay algo de inmortalidad en todo esto y, por tanto, de belleza? Vamos a hacer la prueba por inducción de esta última fórmula. ¿Es cierta la fórmula para n = 1? Sí, porque

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Supongamos que es cierta para n y probemos que es cierta para n + 1 y probemos entonces que es cierta para n + 1:

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+n+1 &= (1+2+\cdots+n)+n+1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

La expresión que ha salido en último lugar, $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

, es la correspondiente fórmula de $\frac{n(n+1)}{2}$

sustituyendo n por n + 1. Y esto completa la prueba. Leticia, esto es bello.

Hay otro tipo de belleza que está íntimamente ligada a la actividad matemática. Me refiero a la belleza que se encuentra al resolver problemas de matemáticas, sobre todo si es un problema abierto. En primer lugar, no sabes muy por qué te prendaste del problema. ¿No es un poco loco todo esto, Leticia? Quizás fue que presentías que la solución de ese problema completaría tu conocimiento del asunto; sí, a veces nos enamoramos de los problemas por afán de completitud. Acaso fuese porque querías probar tus fuerzas intelectuales; eso también ocurre, las ganas de sentirnos vivos por el ejercicio del pensamiento. Sea cual sea la razón el problema está delante de ti, quietecito, modoso, esperando algo indolentemente no sabemos muy bien qué.

Al principio, le haces poco caso; le dedicas algún pensamiento suelto aquí y acá. Lo miras con ojos benévolos e indulgentes. Sin embargo, un día te levantas con un extraño nivel de conciencia, a veces acompañado de un aguzamiento de los sentidos, y entonces abordas el problema. En los primeros acercamientos, todo es vano y ridículo. Todas tus hipótesis iniciales son falsas o se aplican a casos muy particulares exentos de interés. Sabes que esto no es comprender todavía. Pero sigues. En esto consiste la mentalidad del matemático: tesón. Miras al problema desde otro punto de vista, imaginas que fuera parte de un objeto mayor, de una estructura superior, y si así fuese, ¿cómo lo entenderías entonces? Avanzas en el mejor de los casos, pero el avance es minúsculo. En el peor caso, das vueltas sobre ti mismo. Y ahora viene lo que llamo la travesía del desierto. Si no te pierdes, la solución está al final del desierto. Pero, Leticia, ¡cuidado!, el desierto está lleno de espejismos. Recuerda que el Sol de tu orgullo te calentará hasta la extenuación. Ahora la convivencia con el problema es constante. Sueñas con él, te acompaña en el pensamiento por doquier, la realidad la ves teñida del color del problema, todo se interpreta en función de él. En ocasiones, desesperas. A veces desearías que ya estuviese resuelto y acabar con esto. Quizás construyas una bonita teoría solo para descubrir al cabo de unos días que era incorrecta. O aún peor, quizás hayas dado con la solución correcta del problema, pero no sabes cómo probarlo. ¿Recuerdas, Leticia, que en matemáticas todo ha de ser probado según las leyes de la lógica y con demostraciones? A lo peor es la prueba lo que se escapa entre los resquicios de la inteligencia. Sí, porque las matemáticas, si se practican con honestidad, te dan la medida de ti mismo. Y eso es una profunda y constante lección de humildad. En cuanto estás una temporada resolviendo problemas sabes inmediatamente cuáles son tus límites. Lo extraordinario de las matemáticas es que te muestran cómo romperlos. Poco a poco vas progresando. Descompones el problema en otro más pequeños, y con tesón y creatividad los vas resolviendo. Empero, notas que falta una idea que unifique todo lo que has descubierto hasta ahora. Un día, probablemente de una manera casual, te llegará la idea. Pero escucha, Leticia, solo te llegará si tu espíritu está abierto. Probablemente, la idea pasó antes delante de ti, pero no la viste, es decir, no la comprendiste, no estabas preparado. La travesía del desierto te prepara para esa comprensión. En efecto, habrás pasado la fase de obsesión por el problema y estarás en la de comprensión lúcida. Y viste la idea feliz. En los primeros momentos te mostrarás incluso incrédula, tanto has fracasado en el pasado. Luego, sonreirás, y también te maldecirás por lo ciega que estuviste. Finalmente, llorarás de alegría.

Los matemáticos apreciamos la belleza en las matemáticas según varios criterios. Antes que nada, en los resultados. Resultados bellos en matemáticas hay muchos. Recuerda la fórmula de Euler $e^{\pi i} + 1 = 0$, o también el teorema de Pitágoras, o el teorema de Abel-Ruffini, o el teorema fundamental del cálculo, o el algoritmo de Euclides, o el teorema de Fermat... Leticia, podría seguir así a riesgo de emborracharme. En las pruebas se encuentra otra fuente de belleza. Nos gustan las pruebas que usen el menor número de hipótesis; es una especie de austeridad intelectual. Asimismo, nos gustan que sean cortas y concisas, que estén libres de notación farragosa (que es una forma de pedantería); es una preferencia de estilo, digamos. En el vídeo que hay abajo un matemático contemporáneo muy famoso, Michael Atiyah, habla de la belleza de las matemáticas como de la densidad de significado, lo cual es una hermosa forma de resumir lo que acabo de decir.

Figura 1: Vídeo de Atiyah hablando sobre la belleza de las matemáticas.

Quizás las pruebas que más nos gustan son las inesperadas. Recuerdo una prueba de un resultado geométrico que un colega probó con una ingeniosa demostración probabilística. Al leerla, los ojos se me quedaron en blanco, empecé a tartamudear y finalmente rompí a reír a carcajada limpia. Las pruebas inesperadas lo son por la conexión que establecen entre áreas aparentemente alejadas o por la profunda comprensión del problema. También se aprecian mucho las pruebas que demuestran el resultado en situaciones muy generales (¡ah!, el famoso afán de generalidad de los matemáticos).

Y hasta aquí, querida Leticia, la belleza en las matemáticas. Vamos a ver qué pasa en esa actividad misteriosa y vivífica que es la música.

La música puede cumplir muchas funciones, entre ellas, entretenimiento, validación social, refuerzo de la sensación de pertenencia al grupo, comunicación, venta de productos, etc. Sin embargo, yo te voy a hablar primero de la música como instrumento de comprensión. Sí, Leticia, otra vez la comprensión asociada a la belleza. Ahora es una comprensión algo distinta a la dada por las matemáticas.

Creo que me explicaré mejor si te pongo ejemplos. Te voy a hablar de una obra que a mí me hizo comprender algo tan importante como la necesidad de consuelo del ser humano. Yo era un joven atolondrado e ignorante del mundo, que rondaba los veintipocos años. Un viernes por la noche quedé con unos amigos. Muy probablemente, acabaríamos emborrachándonos en algún garito de la zona de copas donde habíamos acordado encontrarnos; nada fuera de lo normal en la sociedad alienante en que vivimos. Un amigo me pidió que lo acompañase a su piso a coger algo que se le había olvidado. Al entrar, su compañero de piso estaba escuchando El cuarteto para el final de los tiempos, de Olivier Messian. Me quedé petrificado. Era música de una expresividad desbordante, de una verdad musical absoluta. Pero esa música no hablaba de lo placentero, no era música que solo halagase los sentidos. En absoluto. Hablaba del horror de la condición humana, sin ninguna justificación ni ambigüedad, con absoluta desnudez; y al mismo tiempo esa música hablaba aún más elocuentemente de esperanza. Estaba llena de esperanza y consuelo para el ser humano. Despedí a mi compañero de juerga de modo un poco cortante y rogué a su compañero de piso que pusiese el cuarteto desde el principio. Lo escuché con fruición, con vehemencia, absorbiendo cada detalle del argumento musical y emocional. ¿De dónde había salido esa música? Busqué información sobre la obra y me enteré de que había sido compuesta en unas circunstancias terribles, en un campo de concentración durante la Segunda Guerra Mundial. Ese cuarteto me había cambiado la vida al hacerme comprender que existe el horror de lo humano -más de lo que yo habría podido suponer-, que necesitamos consuelo ante ese horror, y que hay esperanza para nuestra condición. Musicalmente, aprendí muchas otras cosas: la teoría rítmica de Messian, su lenguaje armónico, su sistema de modos de transposición limitada, sus procedimientos formales, el tratamiento de la dinámica (llegué a estudiarme al piano algunos movimientos del cuarteto). Sin embargo, lo más importante radicaba en la parte emocional y estética. La música de Messian me había explicado emociones que antes solo comprendía de modo artificial, como resultado de un frío análisis intelectual o como mucho de una lectura histórica. Con este cuarteto había vivido el horror, había vivido la posibilidad del consuelo y había vivido en mi propia piel la esperanza. Fíjate en el último movimiento del cuarteto; lo puedes escuchar en el siguiente vídeo.

Figura 2: Último movimiento del Cuarteto para el final de los tiempos, de Messian.

Es un movimiento lento, de un gran estatismo, escrito solo para piano y violín. El piano toca la misma figuración rítmica, dos notas, una muy corta y otra larga, y durante gran parte del movimiento se queda en el registro medio. El violín sigue una línea melódica que en esencia está compuesta por una subida hasta un si agudo, seguida de una bajada, todo ello repetidos dos veces, para en último lugar emprender la poderosa subida a un mi sobreagudo tocado con armónicos artificiales. Tomo prestado de la excelente página web [LU] del Conservatorio de Lawrence University un gráfico (figura 3) que muestra la evolución de la línea melódica.

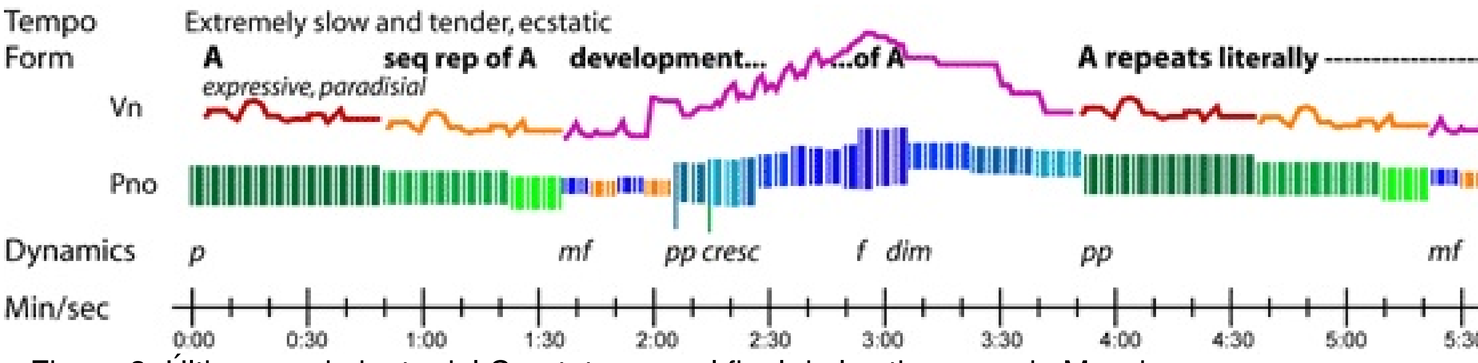

Figura 3: Último movimiento del Cuarteto para el final de los tiempos, de Messian.

La subida final del violín es acompañada por el piano en el registro sobreagudo, con acordes de séptima en tercera inversión. Tanto el violín como el piano tocan notas muy agudas, con apenas armónicos. Oímos, pues, tonos de gran pureza, limpios, que nos transmiten esa sensación de esperanza, de recogimiento, de ascetismo. Eso es todo lo que vemos en este movimiento. Sobriedad extrema de medios para conseguir máxima expresividad.

Sin vivirlo en persona, me pregunto de qué otra forma podría haber comprendido con esa profundidad el horror de la condición humana y la posibilidad de esperanza.

Otro aspecto muy importante para mí es el análisis de la obra, análisis que presta atención a aspectos como la perfección formal, la originalidad, la técnica compositiva, el contexto musical e histórico y otros factores. De nuevo, otro ejemplo, Leticia. Seguro que conoces la Rapsodia sobre un tema de Paganini, de Rachmaninov, una obra para piano y orquesta. Hace un tiempo escribí un análisis sobre esa obra. Formalmente, es un tema con variaciones. Para que me comprendas mejor, te transcribo el análisis del tema y las dos primeras variaciones.

(...) Como dijimos antes, la Rapsodia consiste en un tema y 24 variaciones. Muy juguetonamente, Rachmaninov no expone el tema en primer lugar, sino que presenta la primera variación antes que el tema. Esta variación la llama precedente. He aquí una descripción de las variaciones.

Introducción: Allegro vivace. La introducción tiene como misión crear una gran expectación en el oyente, expectación que se resolverá más adelante cuando aparezca el tema principal. La introducción presenta el tema de Paganini, la-do-si-la-mi, escrito en semicorcheas; lo llamaremos motivo X. Dicho motivo no es más que el acorde de la menor (la-do-mi) en una forma arpegiada.

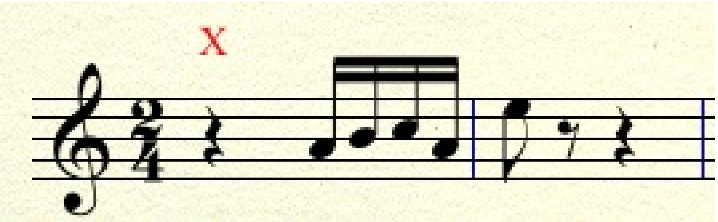

Figura 4: Motivo de la introducción.

Aparecen también acordes de séptima sin resolver así como quintas paralelas; todo esto contribuye a la tensión musical. ¿Qué es esto de los acordes sin resolver? Los acordes de séptima tienen intervalos que se consideran disonantes, al menos en el periodo de la práctica común, y es norma que esas disonancias se resuelvan. Rachmaninov hace lo siguiente en su introducción (pínchese en la figura para oír una versión midi):

Figura 5: Introducción de la Rapsodia.

Es claro que la introducción acumula mucha tensión a causa de esos acordes. Compárese con la siguiente versión en que no aparecen esas séptimas (pínchese en la figura para oír una versión midi).

Figura 6: Versión de la introducción sin séptimas.

Es, sin duda, una versión mucho más débil, que no crea tanta expectación; no es desde luego la llamada a las armas que produce la versión de Rachamaninov.

En cuanto a las quintas paralelas, son voces que están a una distancia de quinta (5 notas) una de otra. Tienen una sonoridad muy peculiar, que era considerada como desagradable desde el Barroco al Romanticismo. Aquí Rachmaninov la usa sin preocupaciones.

La introducción termina en el compás 9 con el acorde de séptima de dominante de la, de nuevo con disonancias sin resolver, que nos deja expectantes.

Variación I (Precedente): Allegro vivace. Rachmaninov continúa con su duende juguetón y una vez más rompe las expectativas que nos había creado. Tras la tensión, esperábamos la exposición del tema, pero no es así. La variación I no es más que una presentación del esqueleto armónico del tema de Paganini, con entradas más o menos inesperadas de los instrumentos y con muy poco material melódico. Armónicamente, es una alternancia entre la tónica y la dominante, hasta el compás 8, seguida de una caída de quintas que se repite dos veces. Aquí están los acordes de esta variación (pínchese en la figura para oír una versión midi).

Figura 7: Acordes del tema de Paganini.

De nuevo hay que descubrirse ante el sentido de la tensión musical de Rachmaninov. En la variación 1 no aparecen los acordes anteriores tocados con todas las notas. He mostrado la armonía completa en la figura 7 más bien para referencias futuras, pero Rachmaninov hace tocar a la orquesta solo las notas fundamentales de cada acorde, esto es, la primera, la más grave, de cada acorde. Así, los acordes quedan indefinidos al faltar el resto de las notas. Aparece la nota la, por ejemplo, pero ¿es la del acorde de la mayor, de la menor, de la séptima u otro?

Esta variación fue añadida en el último momento a tenor de lo que se deduce del cuaderno de bocetos de Rachmaninov. El compositor la añadió, se cree, para crear una atmósfera más sugerente antes de la introducción del tema.

Tema: L'istesso tempo (sin variar el tempo), en la menor. La orquesta toca el tema original de Paganini y el piano la acompaña con un patrón similar al de la variación anterior. El tema consiste en un antecedente de 8 compases, seguido de un consecuente de 16 compases. ¿Qué significan estas dos palabrejas? En música, una frase es una unidad que posee sentido musical completo. En nuestro caso, el tema de Paganini está formado por dos frases, la primera que actúa de antecedente, o de pregunta si queréis, y la segunda, el consecuente, que tiene carácter concluyente; también se le conoce como la respuesta. En la figura 8 tenéis la división en antecedente y consecuente del tema de Paganini.

Figura 8: Antecedente y consecuente en el tema de Paganini.

El antecedente está armonizado con una alternancia de tónica-dominante (grado I y grado V de la escala). El consecuente sigue la armonización de arriba, compases 9 a 24 de la figura 4, aunque cambia algunos acordes en la cadencia final. ¿Más palabrejas? Tranquilidad, son solo términos técnicos, palabras como otras cualquiera. Una cadencia en una serie de acordes que marcan el final de una frase; sirven para reforzar el sentido conclusivo de la frase.

Muy sutilmente el piano enuncia un motivo que, sometido a diversas transformaciones melódicas y rítmicas, aparecerá con mucha frecuencia. Es uno de los motivos melódicos principales de la Rapsodia. Lo llamaremos Y; está formado por una cuarta descendente.

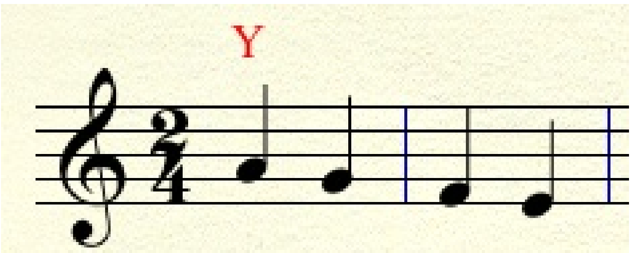

Figura 9: Antecedente y consecuente en el tema de Paganini.

(...)

Leticia, conocer todo estos detalles aumenta el nivel de consciencia de la obra y, en consecuencia, se percibe la belleza derivada de la perfección formal de la obra. Aclaro que la complejidad compositiva no equivale a perfección formal. Eso es rematadamente falso. Recordemos el motivo de la quinta sinfonía de Beethoven: sol-mi□-mi□-mi□; más simple, imposible.

Llegados a este punto nos preguntamos, Leticia, que si ambas son bellas, ¿qué diferencia a la música y a las matemáticas? Para mí, tienen mucho en común, pero una gran diferencia es el tratamiento del tiempo. La potencia emocional de la música está fuertemente asociada a una periodo fijo de tiempo. En el corto tiempo que dura la escucha musical, todo se transforma. Nuestros sentidos se ponen a prueba, se crean conexiones emocionales antes desconocidas, la sensibilidad se aventura por tierras ignotas y de resultas la comprensión vital se ensancha.

Hay una gran densidad de significado comprimido en un corto espacio de tiempo. En cuanto a la densidad, matemáticas y música son muy parejas. Los objetos matemáticos son también densos en significados, pero no tienen las ataduras temporales de la música. Un problema de matemáticas nos puede acompañar a todas partes durante las veinticuatro horas del día: La música tiene su clímax durante la escucha; fuera de ella, su intensidad mengua, pues falta la estimulación sensorial.

Leticia, ha sido un placer charlar contigo sobre la belleza, sea matemática o musical. Gracias.

PARA SABER MÁS

- Para informarse sobre aspectos cognitivos de la música de una manera divulgativa recomiendo el libro Musicofilia, de Oliver Sack [Sac09]. Para aquellos que quieran profundizar de verdad está el libro Psychological Foundations of Musical Behaviors [RB03].

- Para ahondar en los aspectos sociales y antropológicos de la música, recomiendo el libro clásico de Merriam [Me64].
- En la sección Mis conciertos de mi página web se encuentran análisis de obras clásicas.

- La demostración de un resultado siempre viene después de su concepción siquiera sea intuitiva. A veces hay demostraciones visuales que muestran, a veces de modo inesperado, resultados que normalmente se prueban con árida manipulación algebraica. En la página Proofs without words [Wik-a] hay unas cuantas. Este tipo de pruebas se encuentran también en el campo de la matemagia.
- El famoso libro de Imre Lakatos Proofs and refutations [Lak76] es una buena referencia para entender qué es el arte de las prueba matemática.

- Para estudiar la estética de la música el libro de Scruton [Scr-97] es muy riguroso y completo.
- Una divertidísima historia de la crítica musical es el Lexicon of musical invective, de Slonimsky [Slo-00]. En ese libro relata las críticas feroces y se aprecia lo subjetivo que es el concepto de belleza, tan sujeto a modas, a tirrias personales, a prejuicios.

Bibliografía

[Gom11] Página web de Paco Gómez. Rapsodia sobre un tema de Paganini,, de Rachmaninov . Sección Mis conciertos. Mayo de 2010.

[Lak76] Lakatos, I. Proofs and refutations. Cambridge University Press. 1976.

[LU] Lawrence University, Conservatory of Music. Quatour por la find de temps, de Olivier Messian . Consultado en enero de 2012.

[Me64] Merriam, A.P. The anthropology of music. Northwestern University Press. 1964.

[Sac09] Sack, O. Musicofilia. Anagrama. 2009.

[RB03] R. E. Radocy and D. J. Boyle. Psychological Foundations of Musical Behaviors. Charles C. Thomas. 2003.

[Scr-97] Scruton, R. The Aesthetics of Music. Oxford University Press. 1997.

[Slo-00] Slonimsky, N. Lexicon of musical invective. Norton and Company. 2000.

[Wik-a] Wikipedia. Proof without words . Consultado en enero de 2012.