1. ¿Es posible un curso de teoría matemática de la música para universitarios de ambos campos?

En el campo de la Teoría Matemática de la Música (TMM de ahora en adelante) se tiende a pensar que es minoritario porque solo lo pueden ejercer quienes tienen una sólida formación en música y en matemáticas. Esto es cierto, sobre todo si hablamos de la formación necesaria para investigar en esta fascinante disciplina. Sin embargo, no estoy de acuerdo en absoluto en que solo se puedan acercar a este campo quienes hayan estudiado a fondo ambas disciplinas, digamos con un doble grado o similar. No es necesario estudios oficiales para disfrutar de la TMM. Para una introducción a la TMM basta un programa inteligente e imaginativo, que sepa combinar los aspectos técnicos con los conceptuales con habilidad, un programa que rete al alumno en ambas facetas, la matemática y la musical.

Pero haciendo honor a la verdad, no se puede decir que haya un abundante material de calidad en la bibliografía. Por ejemplo, el libro de Jan Beran [Ber04] *Statistics in Musicology* está escrito para el experto y, hasta donde alcanza nuestro conocimiento, no hay ningún texto de cierta calidad que presente el material básico de estadística al futuro musicólogo sistemático a nivel de grado o de máster. En los cursos en que se suele enseñar estadística a músicos o bien son demasiado superficiales —haciendo del alumno una especie de *usuario final* experto en procedimientos pero no en conceptos— o son demasiado técnicos y no se adaptan al perfil del alumno de música —y esto le produce una frustración notable—.

Hay unas cuantas excepciones a esta tendencia. Entre ellas citamos las siguientes: *Music: A Mathematical Offering* [Ben06], de David Benson; *Foundations of Diatonic Theory* [Joh03], de Timothy Johnson; *A Generative Theory of Tonal Music* [LJ83], de Lerdahl y Jackendoff (aunque este es para cursos avanzados); *The Math Behind the Music* [

Har06], de Leon Harkleroad; y, por último, *Mathematics and Music* [Wri], de David Wright. Esta lista no es exhaustiva, pero sí tiene voluntad de ser representativa. Se puede obtener más información sobre libros de TMM en la columna de Divulgamat del mes de febrero de 2017 [Góm17] y en las referencias allí contenidas.

Para la columna de este mes de junio nos quedamos con el libro de David Wright *Mathematics and Music*, que consideramos que tiene muchas virtudes para impartir un curso de TMM a alumnos de los primeros años de universidad. Entre esas virtudes destacamos la concisión en la presentación del material así como el buen diseño de los problemas. En su libro se encuentra el número mínimo de conceptos para adquirir una comprensión sólida del material. Además, los ejercicios, problemas y proyectos propuestos están diseñados con una doble intención: son difíciles como suponer un reto al lector y son realmente interdisciplinares (hay aplicaciones constantes de la música a las matemáticas y viceversa).

En la introducción del libro, el propio Wright escribe unas bellas palabras sobre la relación entre las matemáticas y la música, que sirven como una declaración de intenciones. He aquí dichas palabras (nuestra traducción):

It has been observed that mathematics is the most abstract of the sciences, music the most abstract of t

(Se ha observado que las matemáticas es la más abstracta de las ciencias; se ha observado que la r

La columna de este mes consistirá en una breve reseña del libro de Wright y cómo es posible usarlo en un curso de introducción a la TMM. David Wright es profesor de matemáticas en la Universidad de Washington en San Luis. Se doctoró en la Universidad de Columbia, en Nueva York, en matemáticas. Es un notable investigador en el campo de la geometría afín algebraica, donde publica con regularidad y participa en congresos internaciones como estrella invitada.

Como músico, Wright es arreglista y compositor de música vocal. Su trabajo toca estilos tales como el jazz, blues, gospel, country, doo-wop, entre otros. Es el director asociado del prestigioso coro *St. Charles Ambassadors of Harmony*. Wright es también consultor musical, sobre todo de música vocal y es bastante conocido como historiador de la música. Aparece en numerosos programas de radio y TV como divulgador de las matemáticas y la música.

2. El temario

Para empezar, presentamos el temario del curso de Wright, que, como veremos, está muy bien concebido y es bastante autocontenido (algo importante en un curso de estas características). En la lista de abajo comentamos los principales conceptos que se presentan. Nótese cómo el temario está asociado fuertemente al concepto de número.

1. **Conceptos básicos**. En este capítulo expone los primeros conceptos básicos de las matemáticas y la música: conjuntos, relación de equivalencia, funciones, gráficas, números enteros, números racionales, números reales; altura del sonido o tono, claves, notas, intervalos musicales, escalas y armadura.
2. **Estructura horizontal**. El segundo capítulo se ocupa de la dimensión horizontal de la música: notas, compases y forma. En este capítulo no hay matemáticas (tampoco en el siguiente).
3. **Armonía y la numerología relacionada**. Este capítulo versa sobre la estructura vertical de la música: acordes, notación de la armonía, definición y clasificación de los acordes por su notación numérica (de ahí lo de numerología).
4. **Proporciones e intervalos musicales**. En este capítulo se explican los intervalos musicales como proporciones.
5. **Logaritmos e intervalos musicales**. En este capítulo se desarrolla la teoría aditiva de intervalos, lo cual lleva a los logaritmos y las funciones exponenciales.
6. **Escalas cromáticas**. Aquí se presentan los hechos básicos de la teoría de afinaciones y en particular el temperamento igual. Aquí hace falta algo de álgebra abstracta, pero se puede presentar según se vaya necesitando, como prueba sobradamente Wright en la exposición del material.
7. **La identificación de la octava**. Este tema tiene su base matemática en la aritmética modular, donde el autor cubre bastante material: el principio del buen orden, la división y sus algoritmos, clases de equivalencias modulares, definición de grupo, homomorfismos de grupos, ejemplos de grupos en la música, grupos cíclicos y generadores.
8. **Propiedades de los entero**s. En este capítulo se profundiza más en el álgebra abstracta y se ve cómo algunas propiedades son relevantes a ciertos fenómenos musicales.

9. **Los enteros como intervalos**. En este capítulo los enteros positivos se interpretan como intervalos musicales y se traslada dicha interpretación al teclado. Se discuten ideas previas al concepto de serie armónica.

10. **El timbre y las funciones periódicas**. El capítulo 10 es uno de los más densos. Contiene una excelente introducción a conceptos tales como el timbre, la influencia de los armónicos en este, funciones continuas, funciones periódicas y teoremas básicos del análisis armónico. No se dan demostraciones (no es el objetivo de este curso) y el material guarda un exquisito equilibrio entre profundidad y rigor.

11. **Los números racionales como intervalos**. En este capítulo se expone la teoría básica de la afinación: afinación pitagórica, afinación justa, comas, las quintas del lobo, entre otros. La exposición constituye un buen ejercicio sobre el concepto de número racional.

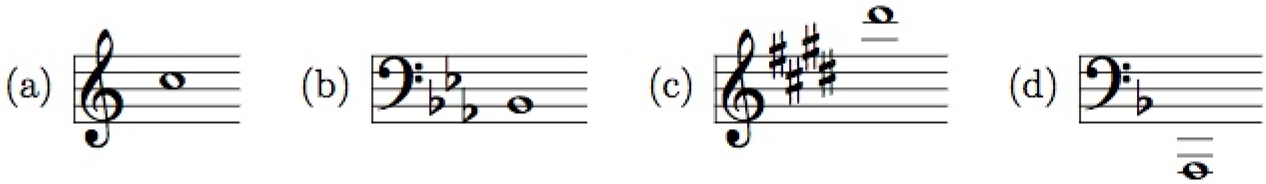
12. **La afinación racional**. Finalmente, el capítulo 12 describe varios sistemas de afinación basados en ciertos intervalos.

3. El material para el alumno

La manera en que está estructurado el texto de Wright está cerca a los métodos de aprendizaje activo, un poco al estilo del método Moore. El material en principio se limita a una serie de definiciones, bien conectadas entre sí y bastante concisas. A continuación se proponen una serie de ejercicios, que van desde los de mera comprobación de la aplicación de los conceptos hasta pequeñas pruebas matemáticas. Algunos problemas se pueden adaptar fácilmente a proyectos de corta duración para los alumnos. Es frecuente en los problemas del libro que se pida interpretar o que se formulen los problemas en forma de pregunta y no solo de cálculo o de procedimiento. El material musical y matemático se mezcla sin solución de continuidad, como podemos en un ejemplo del capítulo 1 en la figura 1.

4. For the set $\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, b \neq 0\}$ show that the relation $\sim$ defined by $(a,b) \sim (a',b')$ iff $ab' - a'b = 0$ is an equivalence relation and that the set of equivalence classes is in one-to-one correspondence with $\mathbb{Q}$.

5. Identify these notes by letter and subscript (e.g., D_3 or $A_1^\sharp$):



6. Identify these intervals:

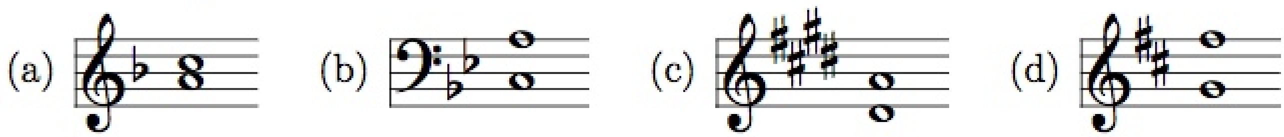
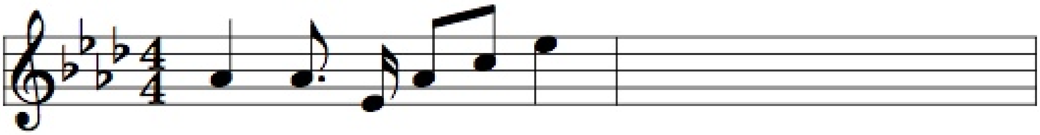


Figura 1: Ejemplo de problemas del libro de Wright (figura tomada de [Wri])

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Lunes 11 de Junio de 2018 13:00

7. Complete the following excerpt three ways with a measure having the same rhythm,



employing, respectively:

(a) diatonic transposition up one scale tone

(b) diatonic transposition up three scale tones

(c) chromatic transposition up a minor third

Which of of these, if any, represent both diatonic and chromatic transposition?

8. Which fractions of a whole note can be achieved using only $\frac{1}{2^n}$-notes, for various n, along with dots and ties? Justify your answer.

9. Give the form (e.g., ABAC or ABA) of the following songs (one chorus only):

(a) *Let Me Call You Sweetheart*

(b) *My Bonnie Lies Over The Ocean*

(c) *Let It Be*

(d) *The Rose*

Figura 2: Ejemplo de problemas del libro de Wright (figura tomada de [Wri])

con el capítulo 7, donde ya hay acumulado mucho material, los problemas se vuelven más

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Lunes 11 de Junio de 2018 13:00

3. Express the following compositions of modular 12-chromatic intervals as r semitones with $0 \leq r < 12$. Interpret all these compositions as operations in $\mathbb{Z}_{12}$.

   (a) 14 semitones and 23 semitones

   (b) two fifths and a major third

   (c) six fifths

   (d) up three minor thirds, down six steps

4. Prove using the Division Algorithm that if I is an interval in the n-chromatic scale, the iteration of I n times is equivalent modulo octave to the unison interval. Restate this as an assertion about elements of the group $\mathbb{Z}_n$.

5. Prove that $\mathbb{Z}_n$ has exactly n elements by showing that $[0], [1], \ldots, [n-1]$ are distinct, and that these are all of the elements of $\mathbb{Z}_n$.

6. For each of these choices of n, determine $\phi(n)$ by listing all the generating intervals in the n-chromatic scale. Indicate which pairs of generating intervals are inverse to each other, and for each pair draw the circle of intervals which is based on one element of the pair in the clockwise direction, the other element of the pair in the counterclockwise direction.

   (a) n=6 (b) n=5 (c) n=9 (d) n=10