

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordo I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

1. Introducción

Dejadme que os hable del teorema del hexacordo, que no es incordio. Hexacordo significa seis notas, una tras otra. Lo inventó Guido d'Arezzo, para solfear, con salero y aderezo. Mucho más tarde, cuando el tonalismo arde, Schoenberg estudia los hexacordos. Como sabéis, Schoenberg es furioso practicante del dodecafonismo, sistema que basa la composición musical en la elección de una serie serie de 12 notas distintas, alrededor de la cual gira toda la elaboración formal del material musical. Por ejemplo, la serie, digo serie, de abajo aparece al comienzo de su ópera *La escalera de Jacob*, tocada en ostinato por los violonchelos.



Figura 1: Serie dodecáfónica perteneciente a *La escalera de Jacob*.

Schoenberg dividía la serie en dos hexacordos y se afanaba por encontrar en ellos alguna brillante propiedad, con talante y gravedad. Una que le llamaba la atención, le regañaba, era el contenido interválico. Schoenberg contaba, algunas veces incluso cantaba, todos los intervalos entre las notas de un hexacordo. Estaba calculando su contenido interválico. Se asombraba al comprobar que los contenidos interválicos de los dos hexacordos de una serie coincidían. Estaba, en esencia, en presencia del teorema del hexacordo. Lo usó de manera intuitiva, sin duda frutiva y quizás algo plausible (Babbitt [[Bab87](#)] *dixit*).

Schoenberg se planteaba un erotema (no teman; de eros, nada): "¿Habría teorema del hexacordo? Acorde a mí, sí (de mi a si, sin acento: una quinta)" -se decía el compositor. Pero no sabía cómo establecerlo.

Veamos qué es el teorema del hexacordo con ayuda de la geometría. Una nota de una serie dodecáfónica puede representar una nota de cualquier octava; en la figura [1](#) las notas de la serie se escribieron en el ámbito de una octava. Las notas de la serie son en realidad clases

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordo I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

de alturas. Las

1

2

notas representaremos como puntos en un círculo; las sentaremos equiespaciadas, donde la distancia entre dos puntos es un semitono. La figura

2

muestra el hexacordo de más arriba.

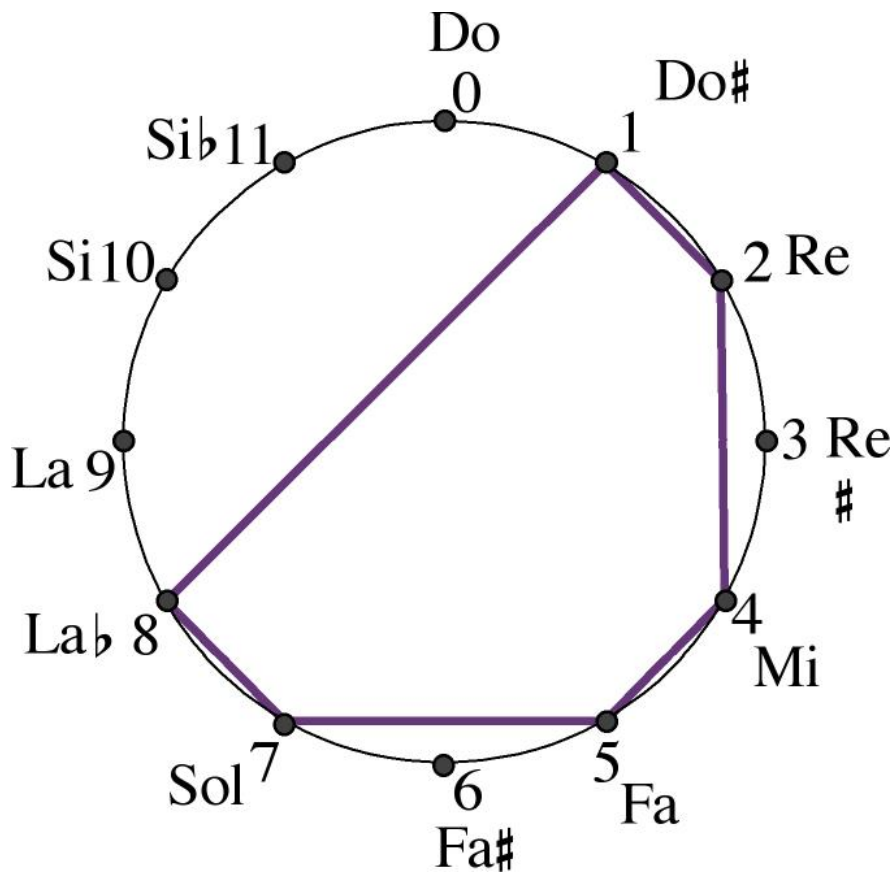


Figura 2: Representación geométrica de un conjunto de notas.

El contenido interválico, como decimos, lo forman todos los intervalos entre los puntos del hexacordo. El intervalo entre dos notas está dado por el camino más corto en el círculo (distancia geodésica). En la figura vemos la filatura de segmentos urdidos de nota a nota. Denota, anota (perdón por el tuteo): el primer hexacordo, a la izquierda; el segundo, en el centro; a la derecha, el histograma común.

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordo I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)

Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

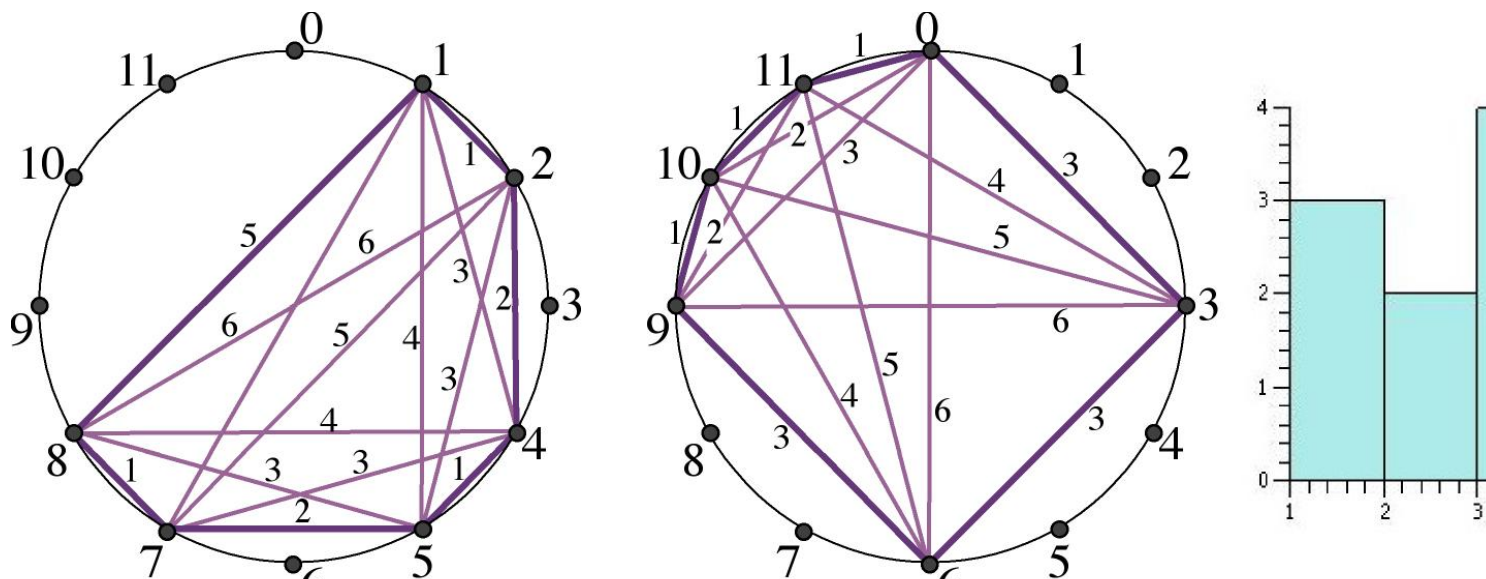


Figura 2: Dos hexacordos: el hexacordo en re mayor (conteniendo los intervallos de segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta) y el hexacordo en re menor (conteniendo los intervallos de segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta).

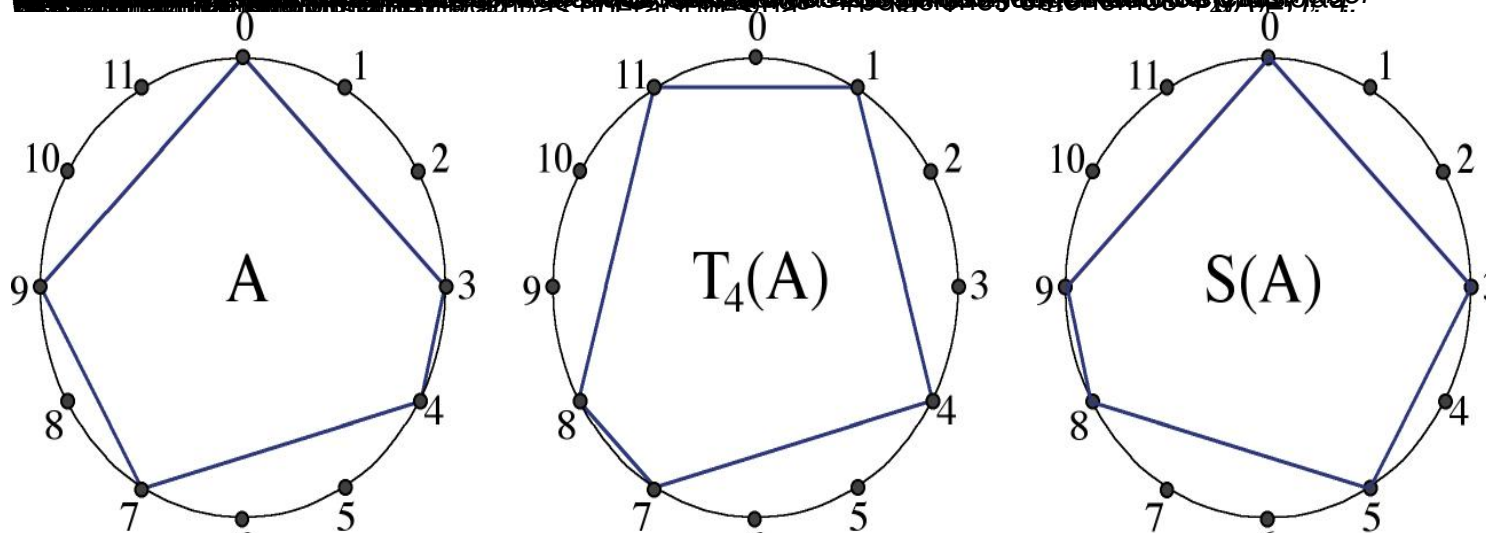


Figura 3: Los hexacordos en re mayor (conteniendo los intervallos de segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta) y el hexacordo en re menor (conteniendo los intervallos de segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta).

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordio I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

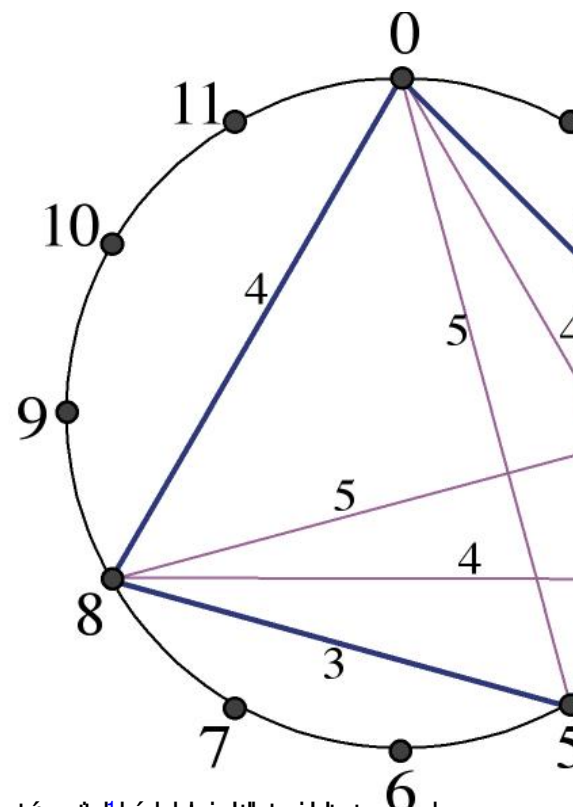
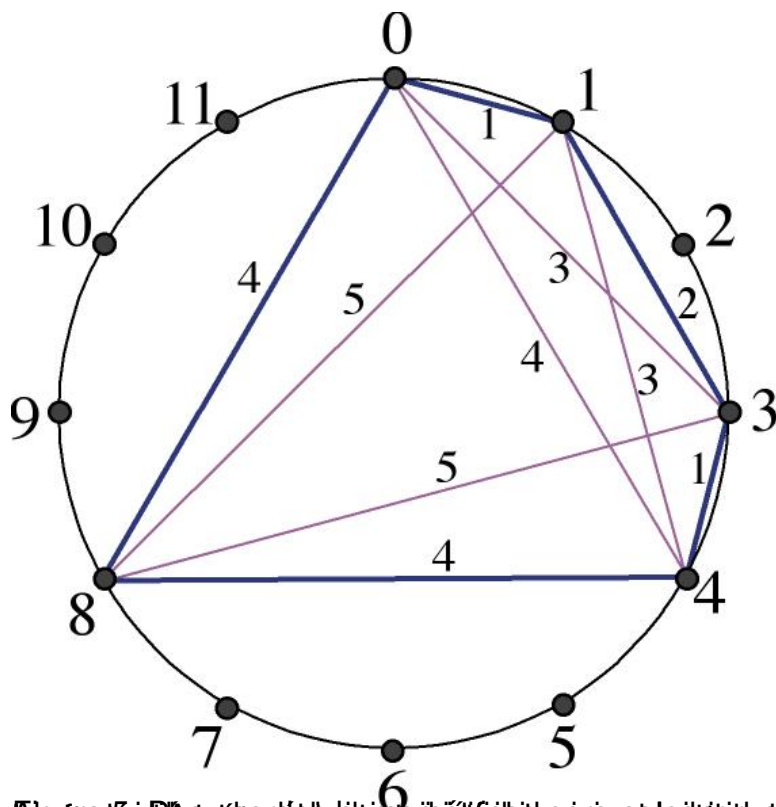


Figura 6. El triángulo de los hexacordos en el círculo cromático. El triángulo de los hexacordos en el círculo cromático.

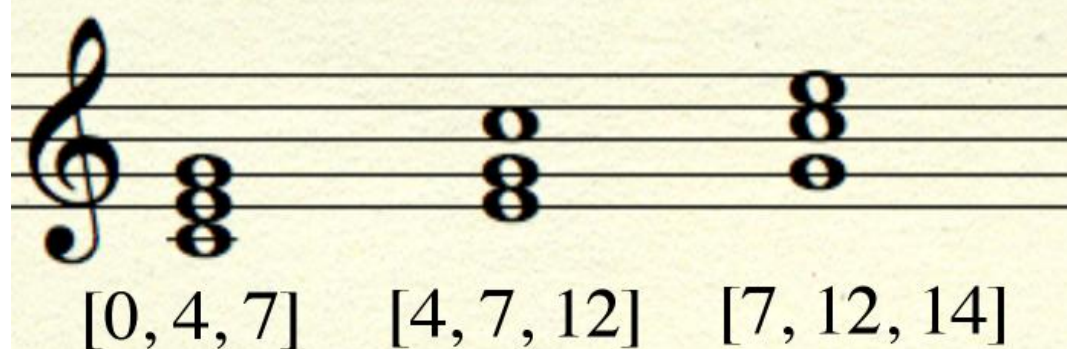


Figura 6. Triángulo de los hexacordos en el círculo cromático. Los triángulos de los hexacordos corresponden con un cambio de fundamental en el



Figura 7. Cambio de fundamental en el círculo cromático. El triángulo de los hexacordos en el círculo cromático. Permiten, por

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordo I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

Do M Fa m Do m

[0, 4, 9] [0, -4, -7] [0, 3, 7]

S T₇

Do⁷ V₉ de Mi^b V₉ de Re^b

[0, 4, 7, 9] [0, -4, -7, -9] [0, 3, 6, 10]

S T₉

Figura 86. Cambio del modo de un acorde a otro de la misma familia a un acorde séptima de sensible:

Figura 87. Cambio del modo de un acorde a otro de la misma familia a un acorde séptima de sensible:

$$\begin{cases} n = a_{nn} + \frac{1}{2}a_{nb} \\ b = a_{bb} + \frac{1}{2}a_{nb} \end{cases} \quad (1)$$

Figura 88. Cambio del modo de un acorde a otro de la misma familia a un acorde séptima de sensible:

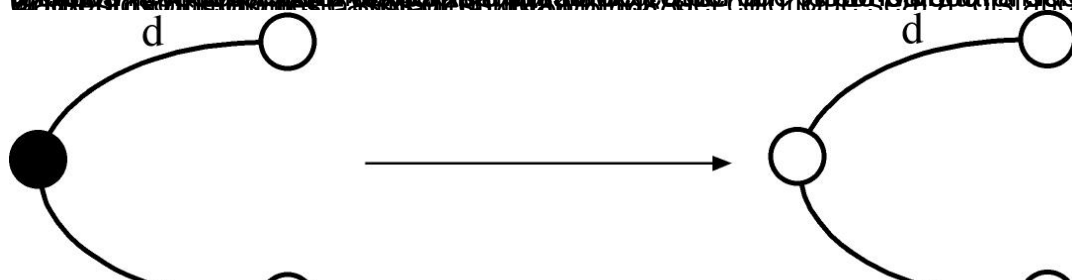


Figura 89. Cambio del modo de un acorde a otro de la misma familia a un acorde séptima de sensible:

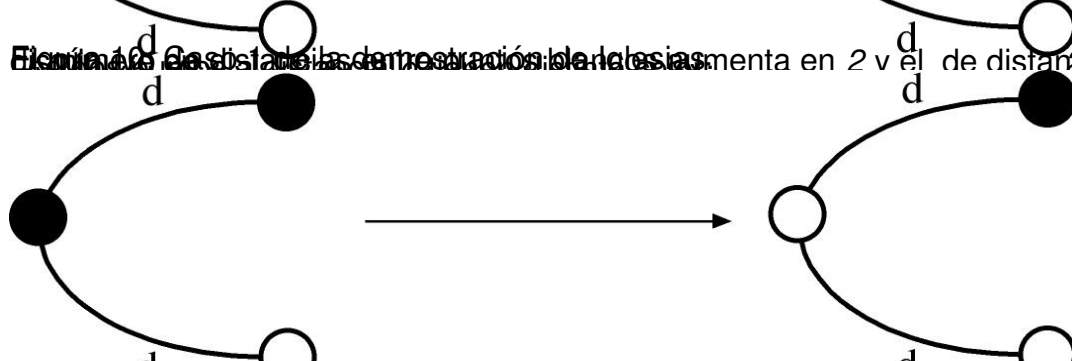


Figura 90. Cambio del modo de un acorde a otro de la misma familia a un acorde séptima de sensible:

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordo I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

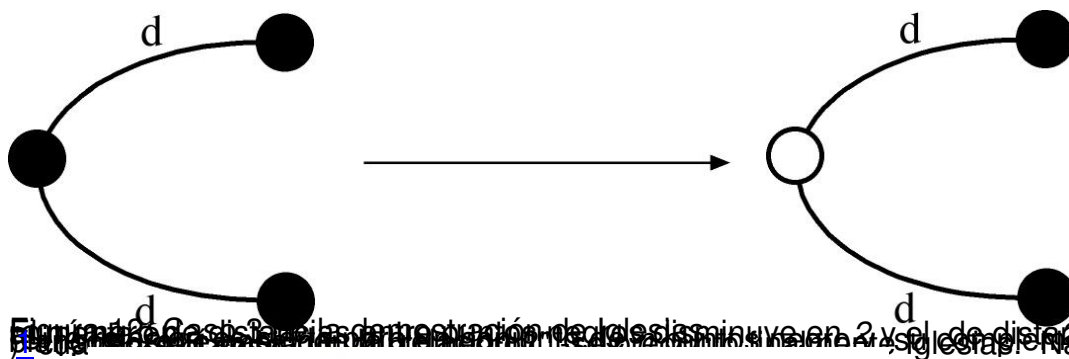


Figura 14. Reducción de un hexacordo de tres blancos y tres negros a un hexacordo de dos blancos y cuatro negros. El diagrama de la izquierda muestra un hexacordo de tres blancos y tres negros. El diagrama de la derecha muestra un hexacordo de dos blancos y cuatro negros. La reducción se realiza cambiando un nodo negro por blanco.

$$\begin{cases} a_{nn} + \frac{1}{2}(a_{nb} - 2) = n - 1 \\ a_{bb} + 2 + \frac{1}{2}(a_{nb} - 2) = b + 1 \end{cases}$$

2. Para el caso (2):

$$\begin{cases} a_{nn} - 1 + \frac{1}{2}a_{nb} = n - 1 \\ a_{bb} + 1 + \frac{1}{2}a_{nb} = b + 1 \end{cases}$$

3. Para el caso (3):

$$\begin{cases} a_{nn} - 2 + \frac{1}{2}(a_{nb} + 2) = n - 1 \\ a_{bb} + \frac{1}{2}(a_{nb} + 2) = b + 1 \end{cases}$$

Observamos que en los tres casos, las ecuaciones se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} n &= a_{nn} + \frac{1}{2}a_{nb} \\ b &= a_{bb} + \frac{1}{2}a_{nb} \end{aligned} \right\} \implies 0 = n - b = a_{nn} - a_{bb}$$

Por lo tanto, en los tres casos, se cumple que $n = b$. Esto significa que el número de nodos blancos es igual al número de nodos negros en el hexacordo original.

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordio I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)

Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

The musical score is written in 3/2 time. The treble staff (top) contains sustained octaves (8va) for notes [0], [3], [6], [9], [10], and [11], which are marked with green *sf* (sforzando) dynamics. The bass staff (bottom) contains a sequence of notes corresponding to the hexachord: [1], [2], [5], [4], [8], [7], [9], [10], [11], [6], [3], [0]. These notes are also marked with green *sf* dynamics. Red curved lines connect the notes in the bass staff, indicating a specific melodic or harmonic progression. The score is divided into two systems, with a measure rest (4) at the beginning of the second system.

El teorema del hexacordio I es un teorema de la teoría de los grupos finitos. Se trata de un teorema que establece que, para cualquier grupo finito G , el número de subgrupos de G es igual al número de elementos de G . Este teorema es un resultado fundamental de la teoría de los grupos finitos, y su demostración se basa en el uso de la teoría de los grupos finitos.