[Texto adaptado del libro de texto Logonautas 2. Matemática, capítulo 2. Ed. Puerto de Palos, Buenos Aires (2009)]

Todo el mundo conoce la forma de operar con los números racionales, que son aquellos que pueden escribirse como fracciones de enteros. Y también es conocido el hecho de que, para los antiguos griegos, dichos números eran prácticamente la base de todo. La idea de belleza, presente en el arte de sus estatuas y monumentos, se fundaba en las razones y proporciones, lo que hacía que el concepto de número racional tuviera una importancia especial.

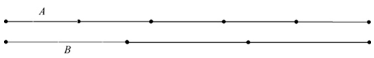
Ahora bien, dada una cantidad específica como 3/5, parece una verdadera tontería constatar que corresponde a una fracción de enteros: se trata de algo que “salta a la vista” a partir de la propia escritura del número. Sin embargo, para los griegos la verdadera matemática se encontraba en la geometría y allí un número no es otra cosa que una magnitud: por ejemplo, la medida de un segmento.

En este contexto, el problema cobra otra forma: dado un par de segmentos que miden respectivamente A y B, ¿cómo saber si la cantidad A/B corresponde a una fracción de enteros? Cabe aclarar que los números en cuestión pueden ser irracionales: por ejemplo,
A
y
B
podrían corresponder a la diagonal de dos cuadrados cuyos lados miden respectivamente 3 y 5; en tal caso
A
y
B
son irracionales aunque el cociente entre ambos es el muy racional 3/5.

Responder a la pregunta anterior puede parecer sencillo, pero debemos pensar que en realidad no conocemos los valores numéricos de A y B, sino que vienen dados a partir de algún planteo geométrico. Entonces conviene reformular la cuestión: ¿existirá alguna manera de ver que
A
/
B
es igual a 3/5, sin hacer la división? La respuesta se hace clara ni bien observamos que la igualdad

$A/B = 3/5$

equivale a decir: “5 veces el segmento *A* es igual a 3 veces el segmento *B*”.



Esto se puede hacer en general para $A/B = p/q$ con *p* y *q* cualesquiera: si “estiramos” *q* veces el segmento *A* y *p* veces el segmento *B*, los nuevos segmentos que resultan deben medir lo mismo.

Pero todavía hay otro modo de verlo: supongamos, como antes, que $p = 3$ y $q = 5$; entonces, un segmento que mida la tercera parte de *A* tiene que entrar exactamente cinco veces en *B*. Y también (obviamente) entra tres veces en *A*: en otras palabras, es posible encontrar un segmento capaz de entrar un número entero de veces tanto en *A* como en *B*.

Cuando esto ocurría, los griegos se ponían muy contentos y entonces decían que las cantidades *A* y *B* son *conmensurables.* La palabra proviene de *mesura,* que quiere decir “medida”; dos cantidades conmensurables vienen a ser algo así como “medibles con la misma vara".

Todo esto está muy bien, aunque no hemos resuelto nuestro principal problema: en efecto, sigue sin resultar evidente que pueda demostrarse la existencia de una "vara" común a las medidas de *A* y *B* sin calcularla. ¿Cómo hacemos para "recortar" una fracción del segmento *A* que entre un número exacto de veces en *B* ?

Los griegos entendieron esta dificultad e inventaron un sistema que permite saber si dos segmentos *A* y *B* son conmensurables sin necesidad de encontrar explícitamente cuál es la "vara". El procedimiento es el siguiente: primero restamos las dos cantidades, la mayor menos la menor, para obtener un nuevo número *C* . Luego, dejamos de lado el valor *A* y repetimos el procedimiento con *B* y *C* : restamos el más chico del más grande… y así sucesivamente. La idea recuerda un poco a aquella tremenda cama que, al que le resultaba demasiado corta, le cercenaban las piernas para emparejar. Pero en realidad, lo tremendo no era la cama sino su malvado dueño, Procusto: si la cama era, por el contrario, un poco larga, entonces al pobre durmiente lo estiraban por medio de cuerdas hasta hacerlo encajar con exactitud [1] . En el caso de los números, la cosa no es tan cruel, ya que sólo vamos recortando los segmentos para quedarnos con un "sobrante", que de a poco se va haciendo más pequeño.

Y ahora viene lo más importante: si el proceso termina en algún momento porque dicho "sobrante" es igual a 0, entonces los números son conmensurables. Por ejemplo, si *A* = 9/10 y *B* = 3/2 entonces el método genera la siguiente secuencia, que termina al cabo de unos pocos pasos:

9/10, 3/2, 3/5, 9/10, 3/10, 3/5, 3/10, 3/10, 0

Ante un ejemplo tan exitoso, parece muy “racional” preguntarse: ¿qué ocurre si el proceso *no termina*? Por raro que parezca, esto es algo que puede suceder: a veces es posible seguir y seguir restando indefinidamente, sin que las cantidades terminen de esfumarse [2]. En una situación así, *A* y *B* se dicen *inconmensurables*: no hay vara, por pequeña que sea, capaz de medir a los dos segmentos un número exacto de veces. Y, como es sabido, se trata de un fenómeno que a los griegos inspiró un poco de miedo, más aun que el mismísimo Procusto…, pero esa es otra historia, que contaremos en otro momento.

Notas:

[1] Justamente, Procusto significa algo así como “estirador”. Según algunas versiones, a las víctimas nunca les quedaba bien la cama, pues poseía un mecanismo secreto mediante el cual su dueño la podía regular a voluntad.

[2] Tal vez se pueda aplicar aquí la famosa idea del hotel de Hilbert, aunque las perspectivas comerciales de un complejo turístico equipado con infinitos lechos de Procusto no serían muy favorables.