En otras entradas de esta sección ya se ha hablado del interés de la papiroflexia como recurso en el aula de matemáticas. Por un lado, está el hecho de que es un material barato y cotidiano, y por tanto, fácil de conseguir. Por otro lado, el alumnado siente gran confianza al manipular personalmente el material, creando y demostrando propiedades con la mera fuerza de sus manos y su inteligencia. El trabajo con papel es además divertido y atractivo, muchas veces nos ha ocurrido que tras enseñar a los alumnos a construir cualquier figura geométrica, se han entusiasmado y han probado en su casa hasta conseguir reproducirlas con perfección e incluso investigando nuevas posibilidades.

En esta entrega vamos a ver un apartado de álgebra que siempre se trabaja en el primer ciclo de Secundaria: los productos o identidades notables.

Nosotros somos partidarios de utilizar en el aula materiales y recursos muy diversos. Aparte de la pizarra y los libros de texto, se pueden utilizar otros recursos como vídeos, comic, pasatiempos, geometría dinámica, etc. En concreto en este apartado de las identidades notables lo que se suele trabajar es únicamente la explicación en la pizarra o quizás algo con GeoGebra, pero pensamos que para algunos alumnos puede ser provechoso el trabajar mediante papiroflexia, pues hemos comprobado que recuerdan más fácilmente las igualdades después de haberlas visto físicamente presentadas.

1. Cuadrado de una suma y una resta.

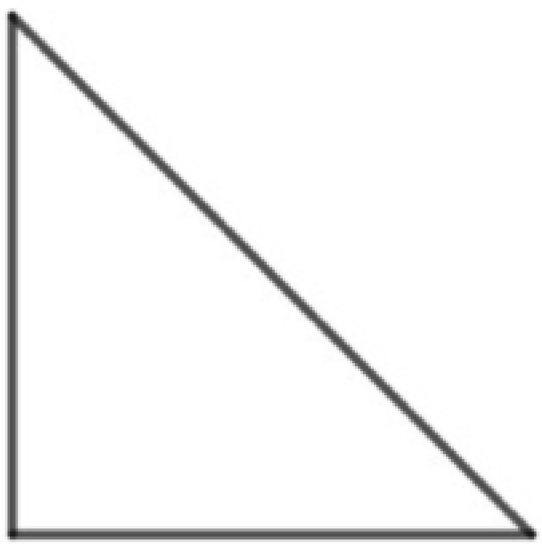
Las dos primeras identidades notables con las que se suele trabajar son las correspondientes al cuadrado de un binomio, siendo ese binomio bien una suma o una resta. En las siguientes expresiones tenemos las fórmulas correspondientes a esos cuadrados.

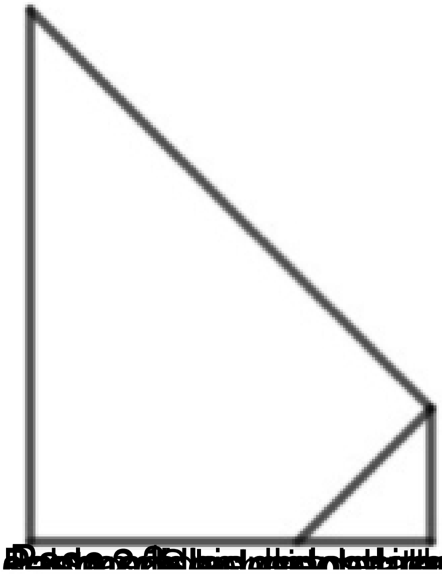
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Los dobleces que hay que realizar son los mismos en ambos casos, lo que varía es la interpretación del mapa obtenido, llegando a las igualdades requeridas.

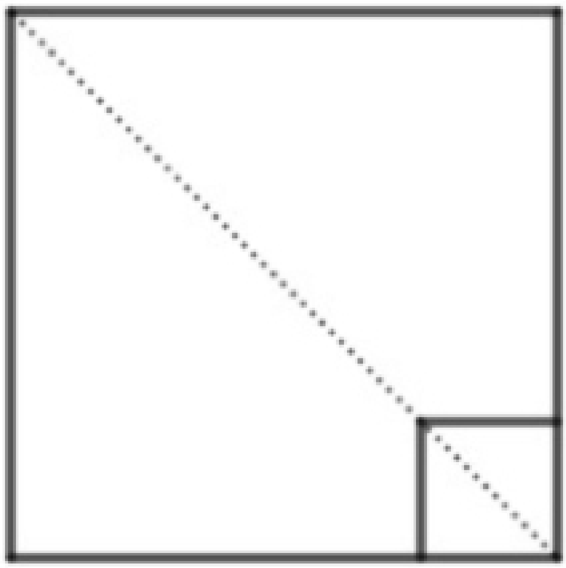
Para hacer el doblez, partimos de una hoja cuadrada en la que tenemos que doblar un cuadrado interior. Se puede hacer de distintas formas, pero la que nos ha parecido más simple, es la que se muestra en los siguientes pasos.

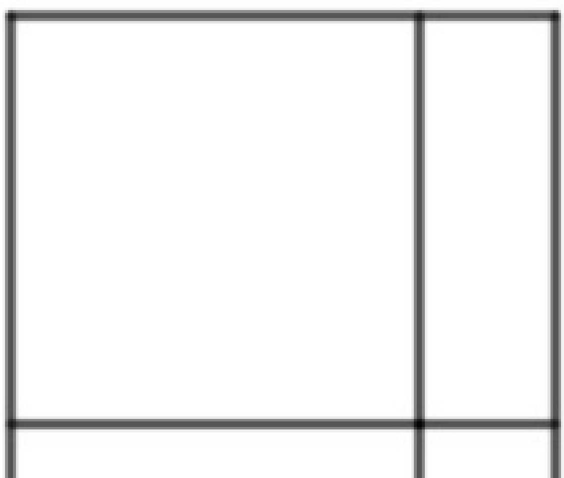
Paso 1: Doblamos el cuadrado por la diagonal, sin marcar ese doblez.





[illegible]





[illegible]

1.1. Cuadrado de la suma de dos términos.

Como se puede observar, todos los lados del cuadrado están divididos en dos partes, una grande y otra pequeña. Si llamamos ***a*** a la medida del lado mayor y
b
a la medida del lado menor de esos lados, podemos observar los cuatro rectángulos en que queda dividido el cuadrado original.

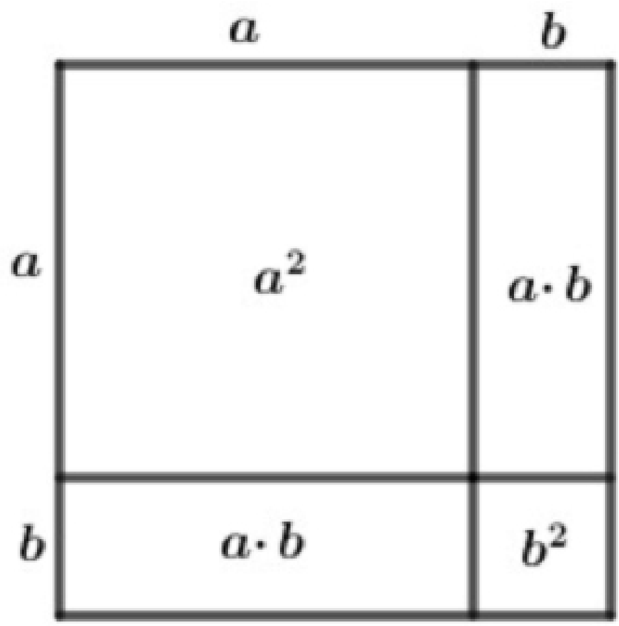


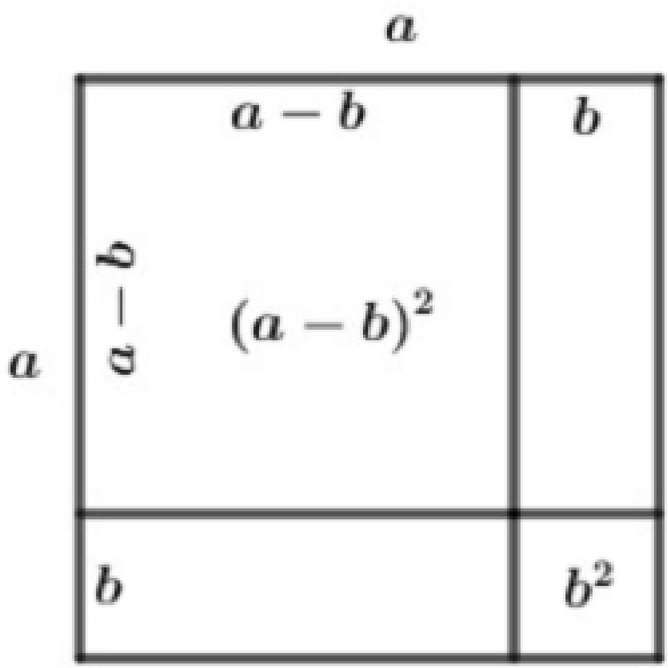
Imagen 1: Cuadrado de la suma

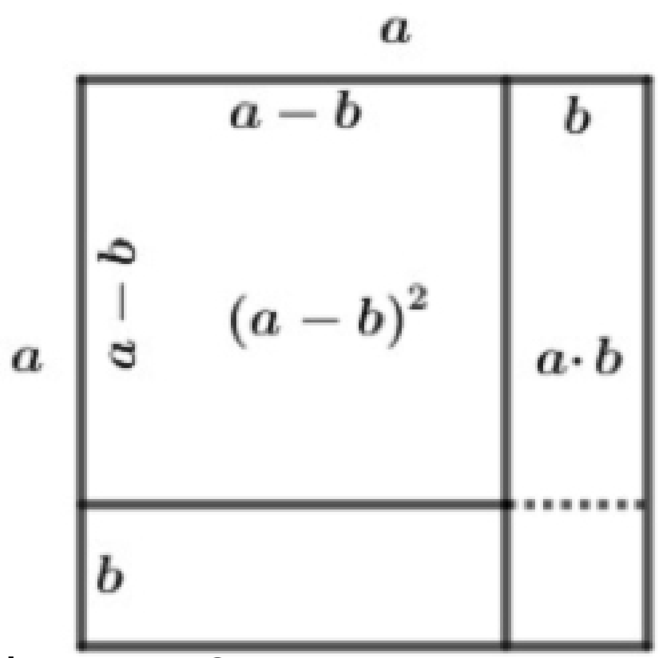
De forma trivial se ve que el área del cuadrado grande es la suma de los cuatro rectángulos.

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

1.2. Cuadrado de la diferencia de dos términos.

En este caso, lo que cambia es el razonamiento. Suponemos que **a** es la medida del cuadrado original y **b** la medida menor en que ha quedado dividido el lado del cuadrado.





$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. Suma por diferencia de un binomio.

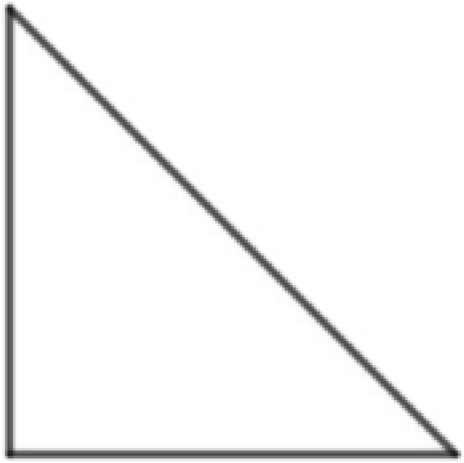
Para construir con papel la identidad notable de la suma por la diferencia de un binomio, tenemos dos métodos diferentes. El más conocido utiliza dos cuadrados de la misma medida y el segundo utiliza un solo papel, aunque es un poco más complicado el razonamiento que lleva a la obtención de la identidad.

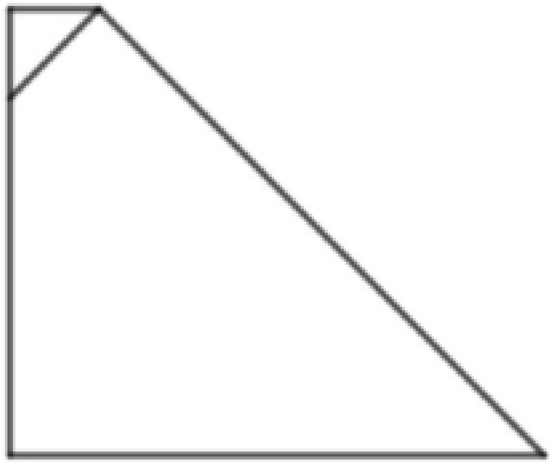
2.1. Método con dos cuadrados iguales.

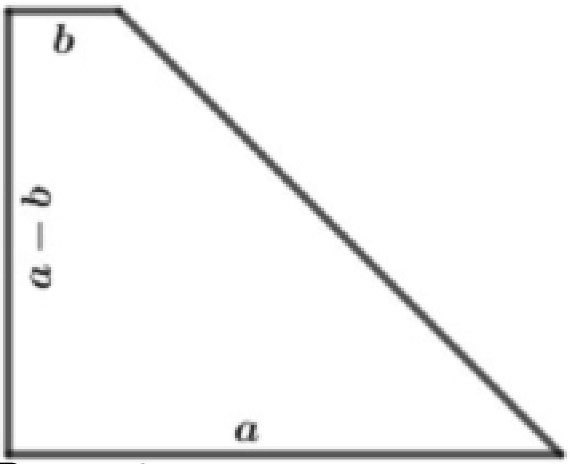
Tenemos que trabajar con dos hojas iguales y realizar el mismo doblez en las dos hojas. Los pasos son los siguientes:

Paso 1: Doblamos por la diagonal y se marca bien ese doblez.

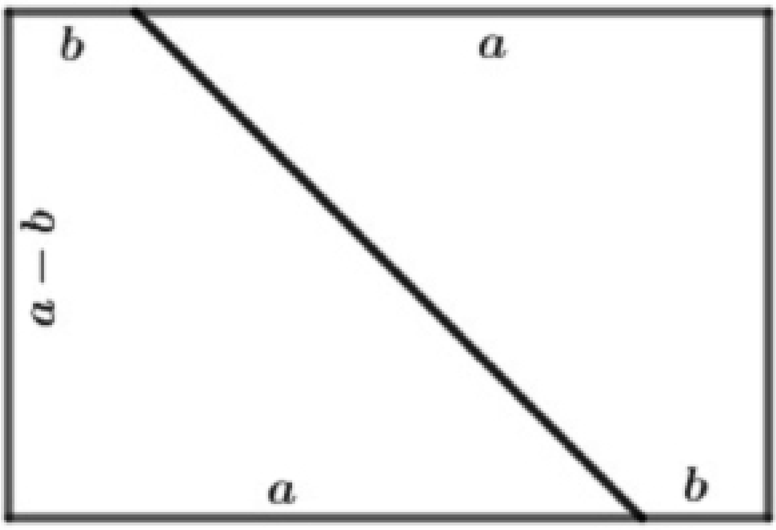
Paso 2: Igual que hemos visto en el apartado anterior, doblamos uno de los lados iguales del triángulo resultante, de forma que el doblez sea bien diferente y se aleje del punto medio. Lo importante es que esta medida hay que llevarla igual a las dos hojas, por lo que es conveniente hacer el doblez con las hojas conjuntamente.

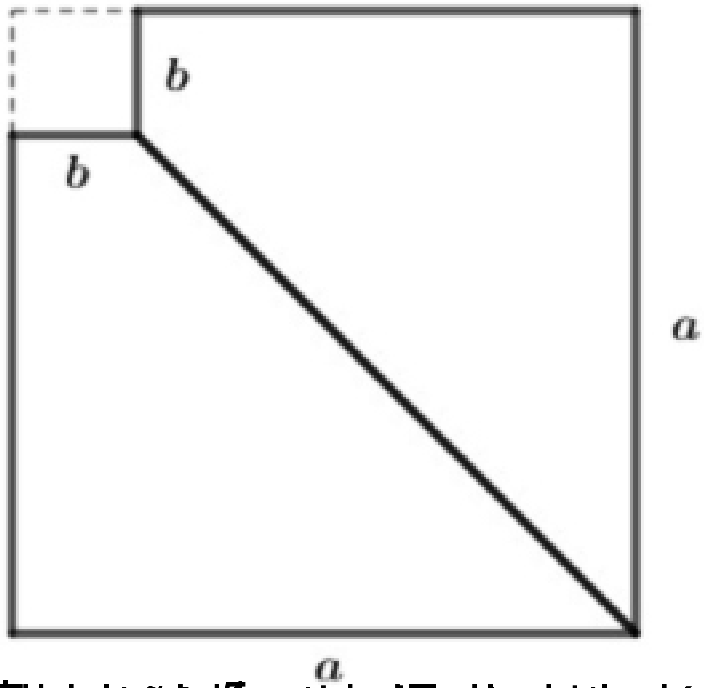





b
a − b
a

[illegible]





[illegible]

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

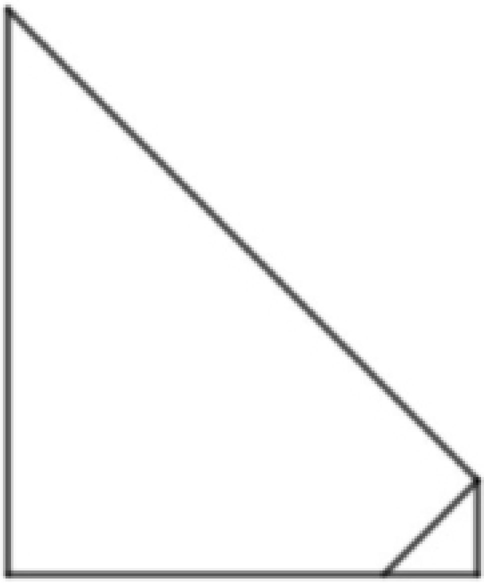
2.2. Método a partir de un solo cuadrado.

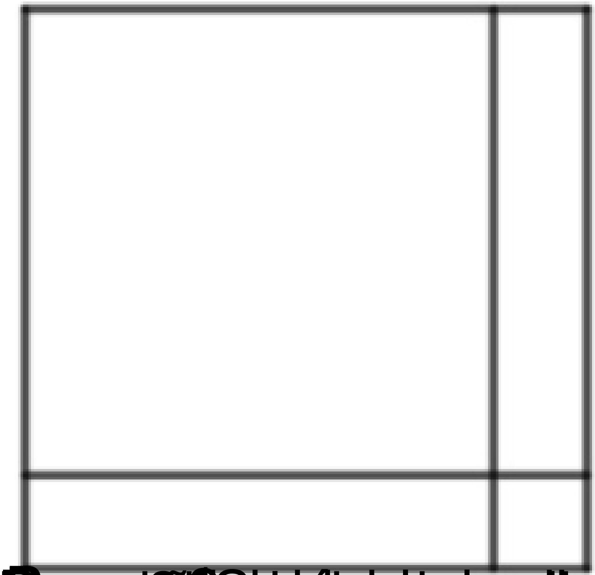
Esta identidad es posible conseguirla a través de los dobleces realizados en una sola hoja cuadrada, aunque es un poco más complicada la deducción de la propiedad.

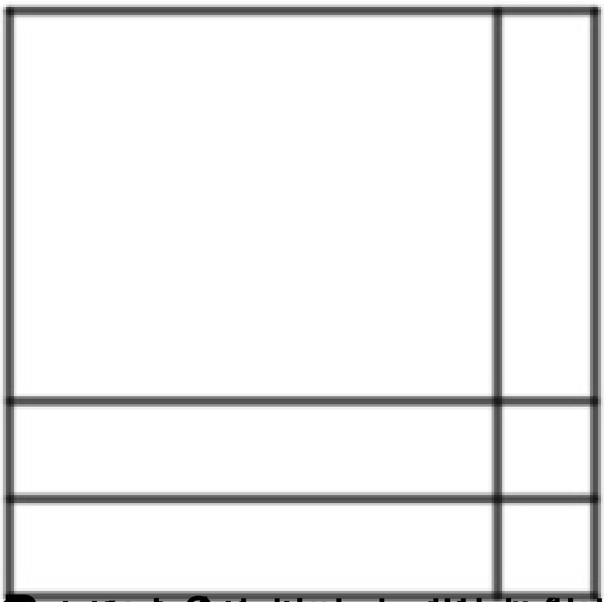
El primer paso es el mismo que en los casos anteriores.

Paso 1: Se parte de una hoja cuadrada. Se dobla por la diagonal, sin marcar ese doblez, y se divide uno de los catetos en dos partes, siendo una de ellas menor que la tercera parte del lado. Ese doblez se marca muy bien.

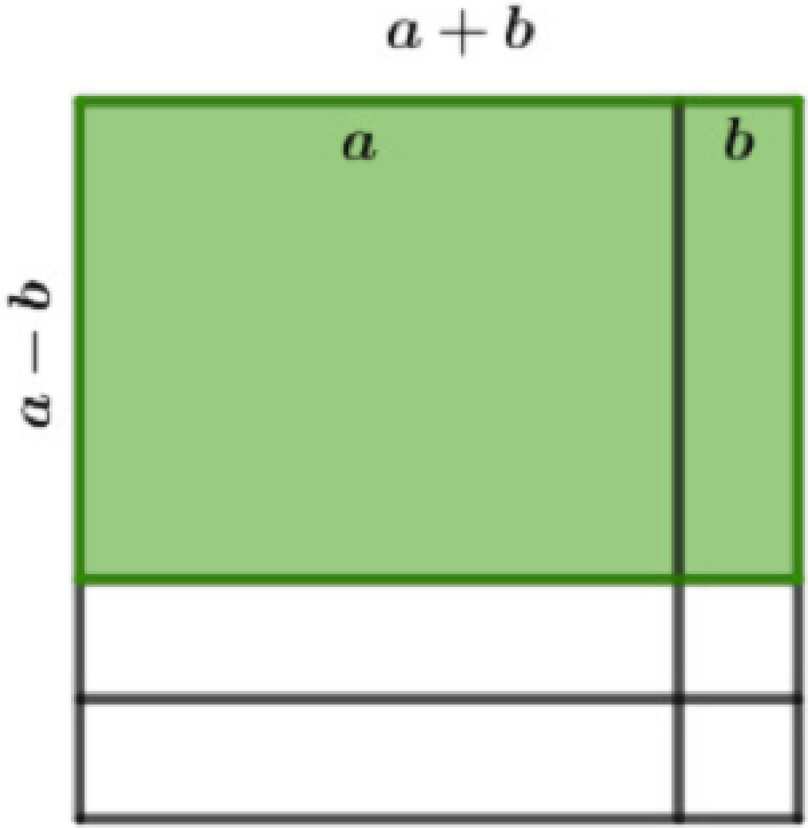
Paso 2: Se desdobla la hoja y las señales del doblez anterior se llevan hasta el lado opuesto.







[illegible]


$a + b$
a
b
$a - b$

[illegible]

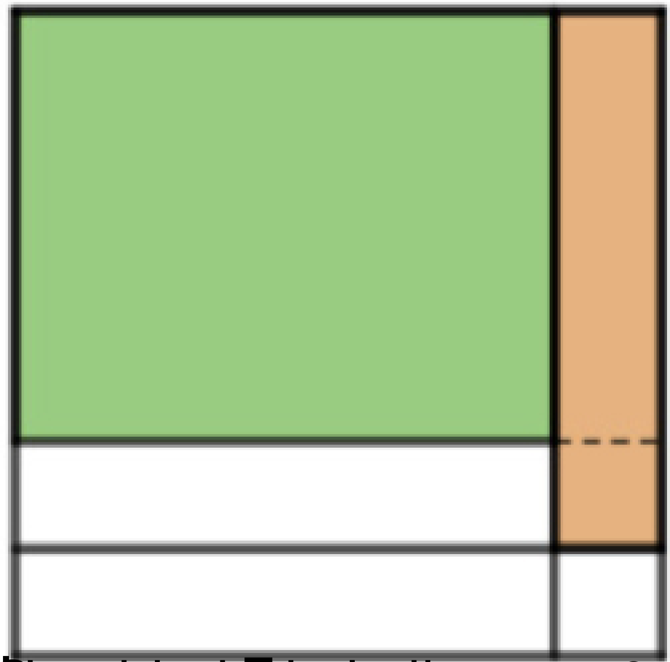


Imagen 8

Comparando la imagen 6 y 8 llegamos a la identidad buscada:

$$\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

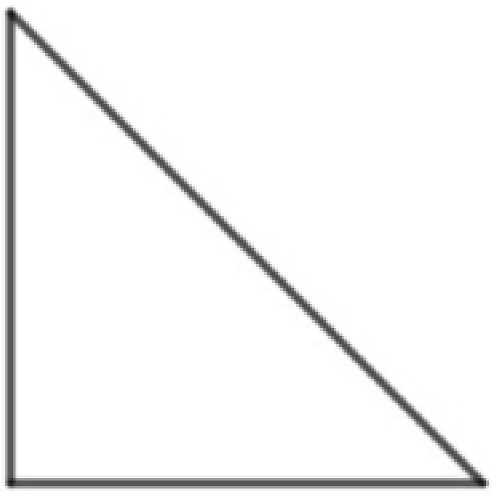
3. Cuadrado de un trinomio.

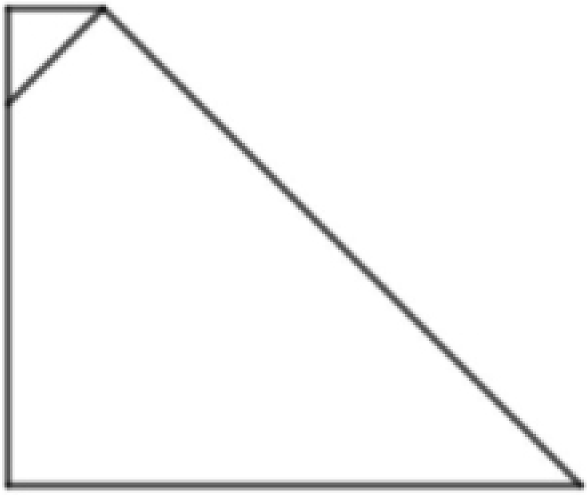
Es bastante intuitiva la generalización del método para hallar el cuadrado de un binomio, al caso en que tenemos una suma de tres términos. Basta repetir parte del proceso seguido. Veamos los pasos.

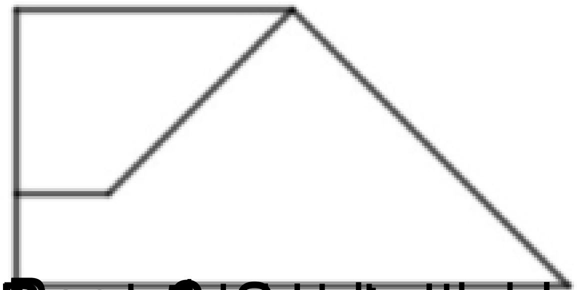
Paso 1: Partimos de una hoja cuadrada y se dobla por una de sus diagonales, sin llegar a marcar ese doblez.

Paso 2: Se dobla uno de los catetos del triángulo obtenido de forma que se doble una pequeña parte. Se marca bien el doblez.

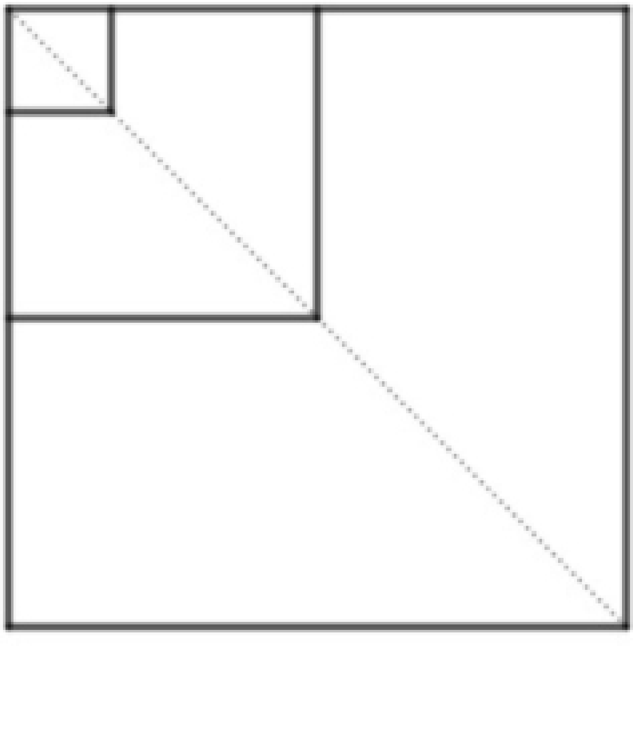
Paso 3: La parte grande que ha quedado de esa división, se vuelve a dividir en dos partes que tengan diferente medida, y además ninguna coincida con la división pequeña hecha en el paso anterior.

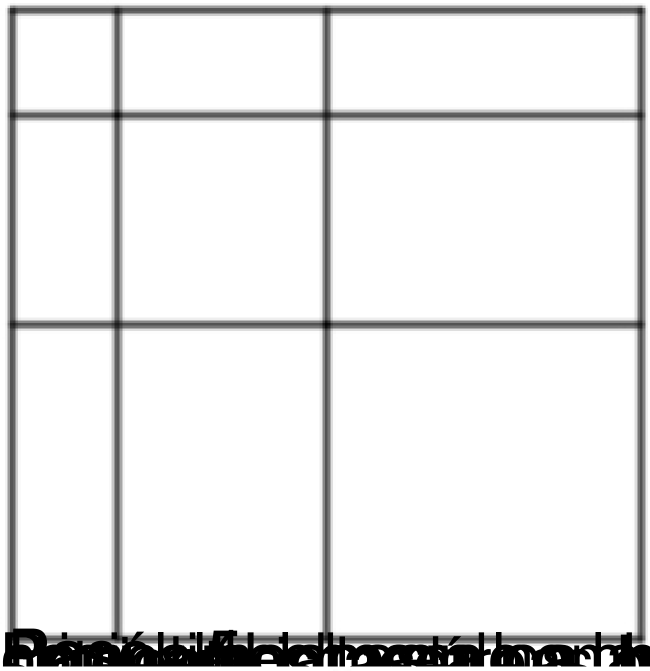


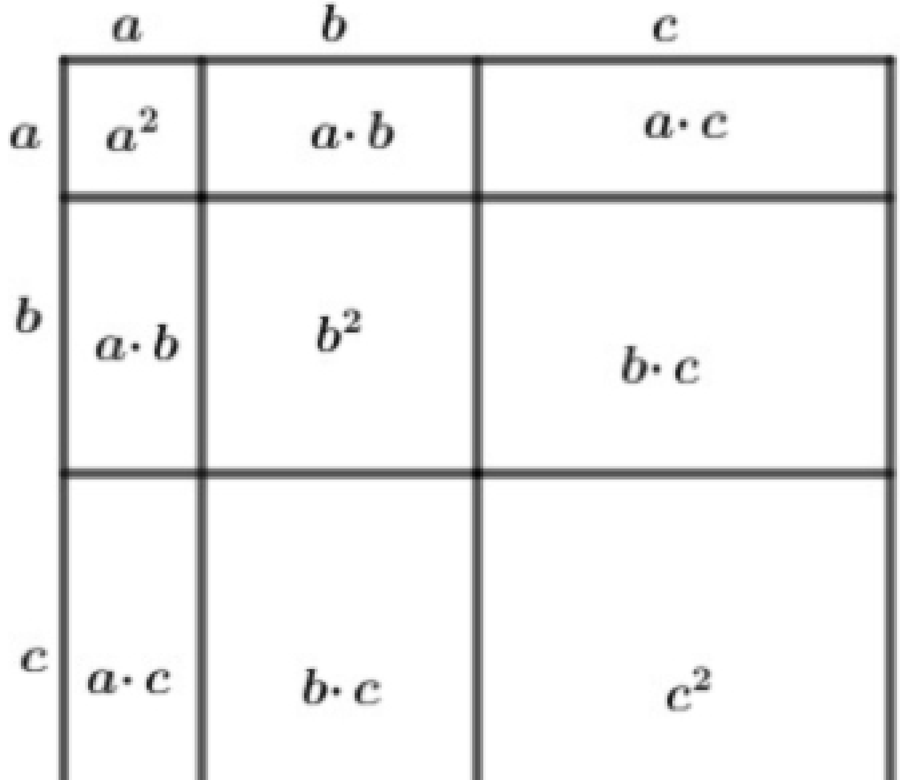




[illegible]







$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac +$$

2 **b**

c

4. El cubo de un binomio.

Para terminar con esta presentación, vamos a dar el salto a las tres dimensiones. Queremos visualizar la identidad notable correspondiente al cubo de una suma, que sería la siguiente expresión.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Al pasar a las tres dimensiones, ya no podemos trabajar con una hoja de papel en la que realicemos dobleces. Por tanto, vamos a comprobar la igualdad anterior, construyendo una serie de volúmenes que nos van a dar los términos que construyen el cubo.

Hay grandes especialistas como Belén Garrido[i] o Paolo Bascetta[ii] que han resuelto la construcción a partir de distintos diagramas. En el libro de Leonardo Pulido que aparece en referencias, se pueden encontrar las disecciones y diagramas que se necesitan para cada cubo, aunque son un poco complicadas de preparar.

Nosotros vamos a ser más humildes y presentamos una construcción más simple, por utilizar un módulo bastante conocido incluso por los que empiezan en el mundo de la papiroflexia modular. Por eso vamos a utilizar el módulo Sonobe para construir las piezas. Tiene el inconveniente de que las piezas tienen una medida doble que la otra, pero para los alumnos, es perfectamente aplicable para conseguir ver la disección del cubo general en partes.

En las siguientes imágenes podemos ver, en la 10, las piezas que necesitamos construir para el puzle.

Imagen 10: Piezas para el cubo de un bino

En la imagen 11 podemos ver el cubo de lado a + b ya montado.

Imagen 11: Cubo del binomio formado

5. Referencia:

Pulido, L.: Factorigami. Origami aplicado a los casos de factorización.

Consultado el 16/06/2019 en la

dirección: https://es.scribd.com/doc/142184503/factorigami-pdf

Notas:

[i] Aunque no aparecen los diagramas, hace referencia a una posibilidad de construcción en http://www.geocities.ws/micadesa/educacion/edubinomios.html

[ii] Aparecen los cubos y los diagramas para conseguirlos en la siguiente presentación: https://issuu.com/sofiamartel/docs/binomio-al