

1. Introducción.

Suele ser una máxima, con la que mucha gente está de acuerdo, que para dominar de una forma aceptable un procedimiento en matemáticas, es necesario practicarlo a conciencia hasta poder repetirlo sin equivocaciones, salvo un despiste que puede ocurrirle a cualquiera, por mucha experiencia que se tenga.

Esta insistencia en el procedimiento a veces se hace aburrido y tedioso sobre todo si son cálculos repetitivos que se realizan fuera de un contexto determinado. A veces, para poder resolver un problema, necesitamos aplicar un procedimiento que debemos haber asimilado previamente trabajándolo fuera de una situación concreta. Y eso se hace pesado. Especialmente eso suele ocurrir cuando nos encontramos en algunas parcelas de las matemáticas como el álgebra.

Por ello, no es extraño que muchas personas hayan investigado como hacer ese trabajo rutinario más atractivo utilizando juegos. Desde grupos de profesores como el Grupo Cero de Valencia o el Azarquiel de Madrid, hasta profesores de forma individual, muchas personas han inventado o adaptado todo tipo de juegos para realizar esa labor repetitiva de una forma más lúdica y mucho más atractiva para un gran grupo del alumnado.

En esta ocasión queremos plantear una actividad realizada en el aula y mostrar como con un mismo juego podemos cambiar las reglas para poder volver a jugar y practicar el mismo procedimiento de una forma algo distinta y, por tanto, no repetir el proceso anterior.

La actividad tiene por objetivo trabajar las raíces de un polinomio, trabajando con su valor numérico. Como además vamos a trabajar con un tablero donde sólo aparecen ecuaciones de segundo grado, se puede complementar con la resolución de ecuaciones de segundo grado y además trabajar con la relación entre las raíces del polinomio y los coeficientes de ese polinomio.

2. Cuatro en raya.

El juego inicial está previsto para dos jugadores. Como material necesitamos una moneda y un

Noviembre 2021: Raíces de un polinomio

Escrito por Jesús Fernández Domínguez y José Muñoz Santonja
Lunes 01 de Noviembre de 2021 00:00

dado y 18 fichas para cada jugador, de colores distintos para diferenciar las fichas de cada jugador. Además necesitaremos un tablero como el siguiente.

$x^2 - 3x - 10$	$x^2 + 5x - 6$	$x^2 - 2x - 24$	$x^2 - 9$	$x^2 + 4x - 12$	$x^2 - 3x - 4$
$x^2 - x - 2$	$x^2 - x - 12$	$x^2 - 4x - 5$	$x^2 - 5x - 6$	$x^2 + x - 2$	$x^2 + x - 12$
$x^2 - 2x - 3$	$x^2 - 36$	$x^2 + x - 6$	$x^2 + x - 20$	$x^2 - 25$	$x^2 + 2x - 3$
$x^2 - 16$	$x^2 - x - 20$	$x^2 - 1$	$x^2 + 3x - 10$	$x^2 + 3x - 18$	$x^2 - 3x - 18$
$x^2 + 4x - 5$	$x^2 - x - 6$	$x^2 - 2x - 8$	$x^2 - 2x - 15$	$x^2 - x - 20$	$x^2 - 4$
$x^2 - 4x - 12$	$x^2 + 2x - 8$	$x^2 + 2x - 15$	$x^2 + 3x - 4$	$x^2 + 2x - 24$	$x^2 + x - 30$

Imagen 1: Tablero base de polinomios.

2.1. Reglas del juego.

- Cada jugador lanza el dado y comienza el que obtenga mayor puntuación.
- El jugador, en su turno, lanza la moneda y el dado y construye una raíz correspondiente al valor obtenido en el dado con el signo más o menos según que la moneda haya salido cara o cruz. A continuación, coloca una de sus fichas en una casilla donde haya un polinomio que tenga ese valor como raíz.
- Se fija un tiempo máximo, por ejemplo 30 segundos, para encontrar el polinomio y colocar la ficha. Si se agota el tiempo el jugador pierde su turno.
- Una vez colocada o acabado el margen de tiempo pasa el turno al otro jugador.
- No se pueden colocar una ficha donde ya existiese otra, tanto propia como del contrario.
- Si todos los polinomios que tienen raíz el número obtenido estuviesen ya ocupados, se da la opción de que el jugador en activo vuelva a realizar otro lanzamiento.

g) Si un jugador se equivoca al colocar la ficha y su contrincante se da cuenta, se retira la ficha del tablero y su error se penaliza permitiendo al contrario realizar dos tiradas consecutivas.

h) Gana el jugador que consigue colocar en primer lugar cuatro fichas consecutivas en horizontal, vertical o diagonal.

i) Si tras ocupar todos los polinomios ninguno de los jugadores ha conseguido colocar cuatro de sus fichas en línea, el juego termina en tablas.

2.2. Complementos.

Es interesante que el alumnado escriba en su cuaderno una tabla con el número que ha sustituido, la ecuación que ha elegido y los cálculos que ha realizado para confirmar que es cierto que es una raíz del polinomio. Esta tabla puede servir además para repasar y para utilizarla en sucesivos juegos, bien si se repite el proceso o se utilizan los restantes métodos que vamos a comentar.

Hay variaciones que se pueden plantear en la metodología. Por ejemplo, si no hay moneda el mismo dado puede utilizarse para el signo. Se lanza primero el dado para obtener, por ejemplo, el número y después se vuelve a lanzar el dado de forma que si sale impar se le añade un signo menos al número o un signo más si sale par.

Las primeras veces que se juega se pueden simplificar alguna de la reglas del juego, se puede dejar más tiempo para buscar la solución, no es conveniente más de un minuto pues se hace desesperante la espera. Se puede permitir colocar nuestra ficha donde ya hubiese una del contrario, aunque está opción permite que un jugador copie la jugada del contrario. Otra posibilidad es no hacer tan restrictiva la opción g y si se comete un error sólo se retira la ficha y se pierde el turno, no dos tiradas seguidas del contrario.

Otra posibilidad es trabajar con ruletas. Si disponemos de copias de ruletas como la de la imagen, basta utilizar un bolígrafo, colocado en el centro, que sostenga a un clip semiabierto para, al girar el clip, poder obtener directamente el valor que necesitamos sustituir en el polinomio que elijamos.

Noviembre 2021: Raíces de un polinomio

Escrito por Jesús Fernández Domínguez y José Muñoz Santonja
Lunes 01 de Noviembre de 2021 00:00

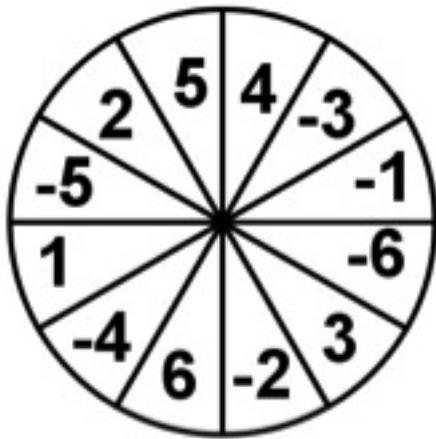


Imagen 2: Ruleta como alternativa al dado y moneda.

Si estudiamos todos los polinomios que aparecen en el tablero podemos comprobar que todos ellos tienen dos soluciones comprendidas entre 1 y 6, una de ellas positiva y la otra negativa. Según el grupo de alumnos que tengamos podemos modificar los polinomios ampliándolos o reduciéndolos, reduciendo también las posibles soluciones que aparezcan.

3. La misma raíz.

Podemos utilizar otra metodología en el juego trabajando con el mismo tablero y con la misma dinámica para colocar las fichas, únicamente cambiando el objetivo del juego.

En esta segunda modalidad los jugadores van colocando sus fichas en los polinomios que han ido eligiendo por tener como raíz el valor que les ha salido con el dado y la moneda.

La única diferencia es que el objetivo del juego es conseguir cuatro polinomios que tengan una raíz en común.

Por ejemplo, un jugador obtiene los siguientes valores y selecciona los siguientes polinomios:

Noviembre 2021: Raíces de un polinomio

Escrito por Jesús Fernández Domínguez y José Muñoz Santonja
Lunes 01 de Noviembre de 2021 00:00

Valor a sustituir	Ecuación elegida
5	$x^2 - 4x - 5$
3	$x^2 - 2x - 3$
-1	$x^2 - 1$
2	$x^2 - x - 2$

El jugador gana pues sus cuatro polinomios tienen como solución -1 , aunque no sea el valor que ha sustituido para seleccionar la casilla correspondiente.

Con este enfoque el alumnado tiene que ir controlando, no solamente el valor que sustituye sino, cuál es la otra raíz del polinomio.

4. De lado a lado.

La siguiente propuesta es una versión de un juego que hemos utilizado en otras ocasiones y que llamamos "Atraviesa el panal", aunque cambiando el sistema de obtener los valores.

En este caso, no necesitamos moneda ni dado sino únicamente el tablero ampliado con una regleta de valores. Cada jugador tendrá una serie de fichas de distinto color.

El tablero será de la forma:

Noviembre 2021: Raíces de un polinomio

Escrito por Jesús Fernández Domínguez y José Muñoz Santonja
Lunes 01 de Noviembre de 2021 00:00

$x^2 - 3x - 10$	$x^2 + 5x - 6$	$x^2 - 2x - 24$	$x^2 - 9$	$x^2 + 4x - 12$	$x^2 - 3x - 4$
$x^2 - x - 2$	$x^2 - x - 12$	$x^2 - 4x - 5$	$x^2 - 5x - 6$	$x^2 + x - 2$	$x^2 + x - 12$
$x^2 - 2x - 3$	$x^2 - 36$	$x^2 + x - 6$	$x^2 + x - 20$	$x^2 - 25$	$x^2 + 2x - 3$
$x^2 - 16$	$x^2 - x - 20$	$x^2 - 1$	$x^2 + 3x - 10$	$x^2 + 3x - 18$	$x^2 - 3x - 18$
$x^2 + 4x - 5$	$x^2 - x - 6$	$x^2 - 2x - 8$	$x^2 - 2x - 15$	$x^2 - x - 30$	$x^2 - 4$
$x^2 - 4x - 12$	$x^2 + 2x - 8$	$x^2 + 2x - 15$	$x^2 + 3x - 4$	$x^2 + 2x - 24$	$x^2 + x - 30$

-6	-5	-4	-3	-2	-1
1	2	3	4	5	6

El objetivo del juego es completar los valores con una de las fichas propias en las casillas de

4.1. Reglas del juego.

- Se sortea quien será el que comience a jugar.
- El primer jugador elige los valores positivos o los negativos y coloca una de sus fichas en uno de esos valores. El contrincante colocará una de las suyas en uno de los valores con distinto signo que el primer jugador.
- El primer jugador elegirá también si quiere conectar las líneas superior o inferior o bien la izquierda con la derecha, quedando la opción no elegida para el segundo jugador.
- El que comienza el juego, busca el polinomio que tenga como raíces las dos elegidas, tanto por él como por el contrario, y si su casilla está libre, coloca una de sus fichas en la casilla correspondiente.
- El segundo jugador, y a partir de él cada jugador en su turno, puede cambiar de sitio en la regleta la ficha propia, nunca la del contrario, y de nuevo busca el polinomio que tenga esos dos valores como raíces y coloca una ficha, si puede.

Noviembre 2021: Raíces de un polinomio

Escrito por Jesús Fernández Domínguez y José Muñoz Santonja
Lunes 01 de Noviembre de 2021 00:00

f) Gana el primer jugador que consigue unir los dos extremos que le corresponden mediante una línea continua.

4.2. Complementos.

Si nos fijamos en la imagen, el jugador con las fichas verdes gana la partida porque consigue unir sus dos extremos, en este caso los laterales, mediante una línea continua de fichas.

$x^2 - 3x - 10$	$x^2 + 5x - 6$	x^2 24	$x^2 - 9$	$x^2 + 4x - 12$	$x^2 - 3x - 4$
$x^2 - x - 2$	$x^2 - x - 12$	x^2 -5	$x^2 - 5x - 6$	$x^2 + x - 2$	$x^2 + x - 12$
x^2 -3	$x^2 - 36$	x^2 6	x^2 20	$x^2 - 25$	$x^2 + 2x - 3$
$x^2 - 16$	x^2 20	x^2 1	x^2 10	x^2 18	x^2 18
$x^2 + 4x - 5$	$x^2 - x - 6$	x^2 -8	x^2 15	x^2 30	x^2 4
$x^2 - 4x - 12$	$x^2 + 2x - 8$	$x^2 + 2x - 15$	$x^2 + 3x - 4$	$x^2 + 2x - 24$	$x^2 + x - 30$

-6	-5	-4	x^2 4	-2	-1
1	2	3	4	5	x^2 18

Imagen 4: Gana el jugador de fichas verdes.

5. Para terminar.

Los juegos que hemos visto suelen ser atractivos pues son rápidos de realizar y permiten

Noviembre 2021: Raíces de un polinomio

Escrito por Jesús Fernández Domínguez y José Muñoz Santonja
Lunes 01 de Noviembre de 2021 00:00

trabajar varias partidas en una clase.

Antes de los dos últimos puede ser interesante estudiar las distintas soluciones de los polinomios, cuya pareja de raíces no se repite nunca, pues lógicamente no hay ningún polinomio repetido.

También suele ayudarles en el juego el estudiar qué relación hay entre los coeficientes del polinomio y las dos raíces que tienen, por ejemplo, saber que el producto de las dos raíces es el término independiente, pues eso les ayuda a buscar más rápidamente cuál es el polinomio que les interesa.

Volviendo a retomar el hilo inicial, con estas actividades sólo hemos pretendido que los alumnos practiquen el valor numérico de un polinomio y sepan encontrar sus raíces de una forma más atractiva, pues el plantearlo en forma de juego hace, con el objetivo de ganar al contrario, realicen más operaciones que planteadas de otra forma.