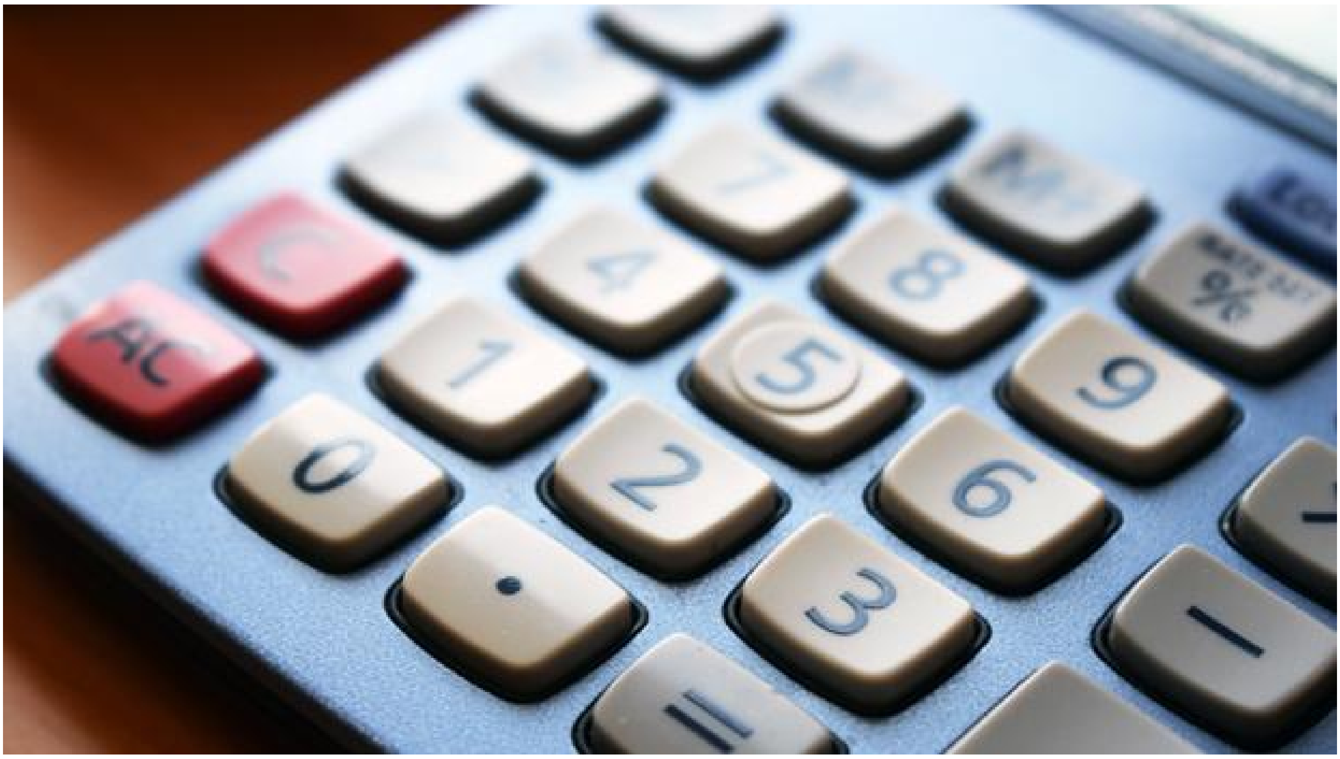
ABC, 4 de Marzo de 2019
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

Esta operación puede parecer sencilla, pero guarda algunos secretos ocultos



Adobe Stock

Entre las cosas de **matemáticas** que aprendimos en la escuela que es probable que aún no hayamos olvidado, se encuentran las operaciones que los mayores denominan “las cuatro reglas”, esto es, **sumar, restar, multiplicar y dividir**. No las hemos olvidado por la cuenta que nos tiene, en una sociedad capitalista, consumista y mercantilista (no pongo ningún pero, que nadie se confunda, es así, y hay que asumirlo), en las que una de las máximas de casi todos es tratar de epatar económicamente al prójimo con el máximo beneficio personal posible. Es obvio, es la base del sistema. A estas operaciones deberíamos añadir otras como las también popularmente conocidas reglas de tres, el cálculo de porcentajes, etc. Pero, ¿de verdad las manejamos bien? Sobre la suma, que parece tan elemental, vamos a tratar de reflexionar un poco en esta ocasión.

Después de aprender a sumar, los maestros, los libros de texto, nos hablan de propiedades que para muchos no significan nada (porque tampoco se han planteado ni han entendido su verdadero alcance), pero que son bastante útiles en determinadas situaciones. Quizá el darles denominaciones algo “extrañas” sea la causa de esa desidia, no sé, ese análisis es tarea de otros, yo me dedico a explicarlas: conmutativa, asociativa, elemento neutro, elemento opuesto. Nos quedamos hoy con la más evidente, en apariencia, **la propiedad conmutativa.** Cualquiera que haya sumado alguna vez varias cantidades sabe, por simple experiencia, que da igual el orden en que tome los sumandos, que el resultado va a ser siempre el mismo (salvo error al operar, obviamente). Pero, ¿es siempre esto así?

A ver, por ejemplo, ¿cuál es el resultado de la siguiente operación?

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots\ldots..$

A riesgo de equivocarme, un alto porcentaje de los lectores habrá respondido que 0 (cero), porque es obvio que por parejas se van cancelando todos esos sumandos. Muy bien, pero qué ocurre cuando agrupamos esa suma de un modo diferente, por ejemplo, así:

$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots\ldots\ldots..$

Con el mismo argumento anterior, el resultado de todos esos paréntesis es 0 (cero), pero es que delante hay un sumando tocando las narices, un 1 (uno), de modo que en realidad esa suma es 1 (uno). Pero si es la misma suma del principio, no puede tomar dos valores diferentes, porque, aunque no tengamos mucha idea de matemáticas, se las llama ciencias exactas, así que, esa suma tiene que tomar un único valor, ¿o no?

Pero es que a lo mejor no suma ni 0 ni 1. Llamemos S al valor de esa suma

$S = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + \ldots\ldots\ldots.$

Estarán de acuerdo conmigo en que podemos escribir que

$S = 1 – (1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + \ldots\ldots\ldots.)$

Y obviamente lo que hay dentro del paréntesis vuelve a ser S, de modo que se puede escribir que

$S = 1 – S$

Si tomamos esa igualdad como una ecuación (que lo es), haciendo operaciones tenemos que $2S = 1$

Y despejando obtenemos que en realidad la suma es $S = ½$.

Tenemos entonces tres candidatos a ser la suma de esa expresión. ¿Quieren alguna más?

El problema que tenemos aquí, espero que alguien se haya percatado, es que esa suma no es como las que habitualmente consideramos en nuestra vida diaria. La diferencia es que aquí pretendemos **sumar infinitos sumandos** (¡ay, los puntos suspensivos!). Y las reglas y propiedades que rigen la suma de una cantidad finita de números, no son las mismas cuando pasamos a una cantidad infinita, como acabamos de comprobar. De hecho, los matemáticos damos a esas sumas otro nombre: **series infinitas**.

Si lo que sumamos son números, estamos ante **series numéricas**; si son funciones, **series funcionales**
o de funciones, y entre éstas, si lo que se suman son potencias de polinomios, tenemos **series de potencias**
, si son expresiones con funciones trigonométricas se llaman **series de Fourier**
(o trigonométricas), etc. Y para cada una hay estudios concretos, teoremas diferentes, aunque el análisis general sea similar para todas ellas. Tranquilos, sólo vamos a echar una mirada muy por encima de algunas de las numéricas. Pero una mirada que espero nos haga no despreciar la suma como algo trivial, elemental, sin interés.

Empecemos por la notación. Lo de los puntos suspensivos se entiende muy bien, pero es un poco para andar por casa, poco serio. Existe un símbolo, el sumatorio, que les presento a continuación. Es una letra sigma griega (por aquello de que estamos sumando), en la que describimos en la parte inferior una letra, que llamamos índice, que se iguala al primer sumando de la suma. En la parte superior de la letra sigma, colocamos el último sumando (12, 3000, el que sea; si hay infinitos sumandos, se pone el símbolo del infinito, un ocho tumbado, como todo el mundo sabe). De modo que para escribir la suma

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + ...

pondríamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

¿A qué queda más elegante? Esa es la suma de todos los números naturales del 1 al infinito. Si les pregunto por el resultado de esa suma, lo lógico es que ustedes me digan que infinito. Y no les faltará razón, porque si hay infinitos números y los vamos sumando todos (en caso de que pudiéramos; ya sabemos que físicamente es imposible, porque nuestros días están contados, y los números no acaban nunca, pero para eso los matemáticos hemos definido una nueva operación matemática que, tras muchos quebraderos de cabeza para hacerlo correctamente, funciona medianamente bien, el paso al límite). A ver si descubren entonces dónde está el error en el siguiente razonamiento: Llamemos

$T = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots\ldots\ldots$

$N = 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + \ldots\ldots\ldots$

$T – N = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots\ldots\ldots) – (1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + \ldots\ldots\ldots)$

Observen que los términos impares se compensan entre sí (y desaparecen) y que los términos pares se duplican, por lo que tenemos

$T – N = 2 \times (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots..) = 4 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots.)$

En el paréntesis de esta última expresión descubrimos T de nuevo, por lo que podemos poner que

$T – N = 4T$

O lo que es lo mismo, $N = –3T$. Ahora bien, N podemos calcularlo:

$N = 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + \ldots = 1 – (2 – 3 + 4 – 5 + 6 + \ldots) =$

$1 – (1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + \ldots) – (1 – 1 + 1 – 1 + \ldots.)$

Reemplazando los paréntesis por sus correspondientes sumas (usando las letras utilizadas), tenemos que N = 1 – N – S. Recordemos que S nos salió ½. Entonces N = ¼. Y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

Por supuesto que esto es absurdo, porque encima la suma de términos positivos nos da un valor negativo, pero se trata de que encuentren dónde les he metido el pufo.

Supongo que a estas alturas ya se habrán percatado de que las reglas que tenemos para sumar una cantidad finita de sumandos, que hasta ahora no nos habían creado ningún problema, no pueden utilizarse tan alegremente para infinitos sumandos. No es mi intención ponerme a explicar aquí ahora el tema de las series numéricas (ya hay para eso muy buenos textos, profesores, youtubers, y demás), pero a modo de idea general sí les diré, que las sumas de infinitos sumandos positivos no tienen demasiada diferencia con las sumas a las que estamos acostumbrados, sobre todo si su suma es un valor finito (a esto se le llama en matemáticas serie convergente; si la suma es infinita se le denomina serie divergente). Pero las series con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos, sí pueden, y de hecho dan, más de un disgusto.

Existen **series convergentes** de este estilo (o sea cuya suma es un valor concreto), que al cambiarse de orden los sumandos (lo llamamos hacer una reordenación) pueden sumar cualquier otro valor. Es más, puede encontrarse una ordenación de los sumandos que nos sume el valor que nos dé la gana. Incluso que sume infinito. Estas series se llaman **condicionalmente convergentes**
, y les había preparado un ejemplo con una concreta, con varias reordenaciones diferentes, probando que cada una da un valor diferente. Y no hay error (en la demostración de antes sí lo hay, reitero, y tienen ustedes que encontrarla, si quieren), lo que sucede es que este tipo de sumas infinitas no verifican la propiedad conmutativa. Pero lo dejamos para otro día, antes de que me digan que esto no es un artículo técnico (que para nada, esto es de lo más elemental, incluso para alumnos de los grados de ciencias).

Como dije, por ahora quédense en que, a lo mejor, **sumar no es tan trivial como creíamos**, y quizá guarda algún que otro secreto oculto que a la mínima puede manifestarse. Pero no tengan miedo. Las matemáticas son para disfrutarlas.

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)