I.B. Sant Josep de Calassanç

Departament de Matemàtiques

INAUGURACIÓ DEL CURS ACADÈMIC 1999/00

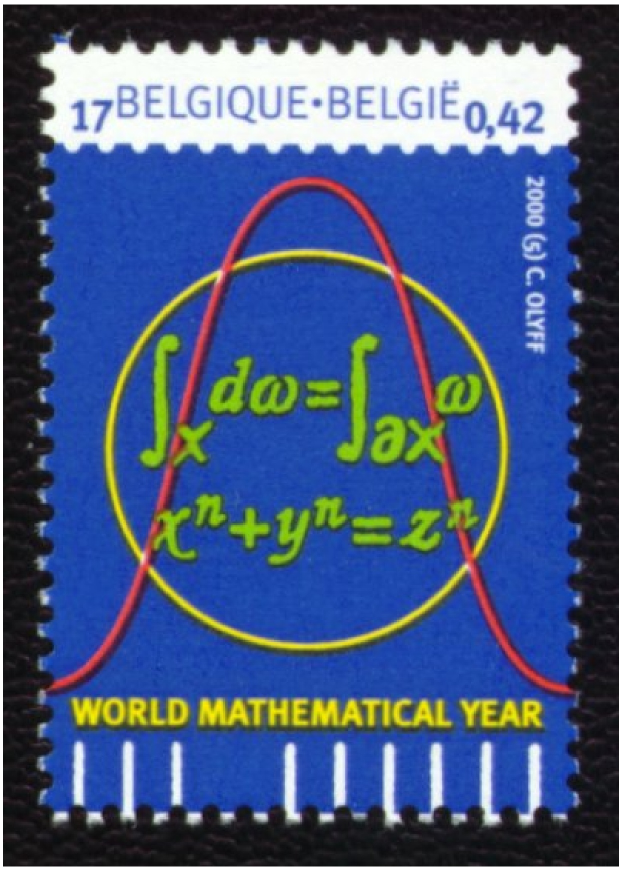
Lliçó inaugural que versarà sobre:

INTUÏCIÓ, MATEMÀTIQUES I REALITAT

a càrrec de

Josep Maria Lamarca París

Catedràtic de Matemàtiques



Intuïció, matemàtiques i realitat

NOTES PER A LA LLIÇÓ INAUGURAL DEL CURS 1999 - 2000

Crec que una de les tasques més importants de la humanitat és entendre, conèixer i interpretar la realitat; no només la realitat física, el món, l'univers, la vida, sinó, també, la realitat potser menys tangible de les emocions, de la intel.ligència, en fi, del comportament humà tant en el present com al llarg de la nostra història, en totes les seves manifestacions.

Cada un de nosaltres només pot arribar a abastar una ínfima part d'aquesta realitat tan complexa, i no sembla molt probable que la nostra aportació particular al seu coneixement global pugui esdevenir significativa. Certament, quan pensem en Plató, Euclides, Newton, Darwin, Einstein,... no ens afegim pas nosaltres mateixos a aquesta llista. Creiem que tots ells destaquen com muntanyes en una plana. De fet, però, no és pas ben bé així*; "si he arribat a veure-hi tan lluny*" – deia Newton – "*és perquè estava enfilat sobre espatlles de gegants*". És el treball conjunt i, molt sovint, un cúmul de fracassos, allò que permet d'avançar.

No nego pas, naturalment, que aquests grans genis van tenir, en el seu moment, unes idees especialment fructíferes i innovadores, unes *intuïcions* claus, que els van permetre endinsar-se en el coneixement de la realitat de què parlàvem fins a una profunditat excepcional. Però hi ha molt més al darrera d'aquestes intuïcions brillants del que acostumem a pensar.

En matemàtiques, en particular, la intuïció juga un paper que podríem qualificar d'ambigu. En efecte, de vegades, una qüestió no necessàriament molt complexa, es respon de manera *intuïtiva* d'una determinada manera, que, després d'una profunda reflexió es demostra que és falsa. O a l'inrevés, una afirmació que, *intuïtivament*, es donaria per falsa, al cap d'un temps es demostra que és certa. Una *intuïció*, doncs, per brillant que sigui, no és suficient; pot caldre molt de treball per poder arribar a una demostració que la legitimitzi o, contràriament, una demostració que la invalidi.

Anem a reflexionar-hi breument a partir d'alguns exemples.

Exemple 1: *Escollida a l'atzar una alumna que tingui només un germà o una germana (és a dir, que siguin dos germans en total), quina és la probabilitat que aquest altre germà sigui un noi?*

La *intuïció* ens empeny a contestar que la probabilitat demanada és del 50%; en *realitat*, però com que al davant tenim una noia, la situació "Noi-Noi" no es dóna i, per tant, només es poden donar les situacions: "**Noi**-Noia", "Noia-**Noi**", i "Noia-Noia".

La probabilitat que es tracti d'un Noi és, doncs, de 2/3.

En probabilitat es donen moltes falses intuïcions, ja que, a les imprecisions de llenguatge (confusió entre el llenguatge habitual i el matemàtic que, sovint, fa servir les mateixes paraules amb un sentit més restrictiu, però més precís) cal afegir les suposicions implícites que no sempre són prou clares (les anomenades **hipòtesis estadístiques**), així com les conclusions impròpies que es treuen d'una experiència concreta sense tenir en compte que les lleis de la probabilitat es refereixen sempre a prediccions globals i no pas a experiències particulars.

Per exemple, la realització a l'atzar d'experiments físics concrets, que és aparentment molt simple, no és pas del tot trivial. A principis de segle un matemàtic es va enriquir en un casino després d'observar que no pas tots els nombres d'una ruleta sortien amb la proporció esperada. Analitzada posteriorment la situació, es va poder comprovar que la taula estava lleugerament inclinada i que aquesta inclinació afavoria més la sortida d'uns nombres que no pas la d'altres. La *hipòtesi estadística* que la taula de la ruleta estava equilibrada era falsa; no eren pas les lleis de la probabilitat les que fallaven.

De vegades, senzillament, les lleis de la probabilitat queden emmascarades i la intuïció no és capaç de reconèixer-les. Vegem-ho.

Exemple 2: *Quanta gent cal reunir per tenir la probabilitat de més del 99% que hi hagi dues persones que celebrin l'aniversari de naixement el mateix dia (no pas necessàriament el mateix any)?*

Intuïtivament, com que l'any té 366 dies com a màxim, sembla que calen prop de 300 persones. La *realitat* és ben diferent; n'hi ha prou amb 57!! (No estem en condicions de fer-ne els càlculs ara). En línies generals, el raonament és que mentre que la probabilitat que es produeixi una determinada coincidència pot ser molt baixa, la probabilitat que es produeixi *almenys una* coincidència pot ser molt alta; així, si preguntéssim quina és la probabilitat que hi hagi dues persones nascudes un dia determinat, per exemple el 21 de setembre, llavors caldrien unes 253 persones per poder afirmar-ho amb una probabilitat del 50%.

Vegem un darrer exemple sobre probabilitat.

Exemple 3: *En una capsa hi ha tres papers iguals, indistingibles els uns dels altres, però un d'ells porta escrita la paraula "PREMI". Si es fa un sorteig entre tres persones, voldries ser el primer, el segon o el tercer de treure un paper de la capsa?*

I si la paraula no fos PREMI sinó que fos "MORT" i t'haguessin d'executar, en cas de treure'l, canviaries l'ordre escollit abans?

El càlcul de probabilitats demostra categòricament que l'ordre d'elecció del paper no influeix. Tots tres tenen 1/3 de probabilitat d'escollir el paper.

Anem a veure ara alguns exemples trets d'altres branques de les matemàtiques.

Exemple 4: *Un àrab havia deixat una herència de 35 camells entre els seus tres fills amb l'exigència que se'ls repartissin de la manera següent: la meitat al fill gran, la tercera part al mitjà i la novena part al petit. Com que 35 no és divisible ni per 2, ni per 3 ni per 9, els fills no es posaven d'acord i no sabien com fer-s'ho. Un savi matemàtic que passava per allà de viatge, va dir-los el següent: "jo us cediré el meu propi camell i, així, podreu fer el repartiment".*

Efectivament, 36 és divisible per 2, per 3 i per 9, de manera que al primer fill li van tocar 18 camells, al segon fill 12 camells i al petit, 4 camells.

Un cop fet el repartiment, però, els tres germans es van quedar parats de veure que sobraven dos camells (18 + 12 + 4 = 34); llavors, agraïts, li van regalar un camell al savi, en recompensa per haver-los ajudat, el qual va marxar molt content, muntat al seu camell i amb un altre camell de regal. (*L'home que calculava* de Malba Tahan).

En aquest cas, la intuïció sembla estar en contradicció amb la realitat. Quina és la clau per entendre què ha passat? Es tracta d'una senzilla qüestió aritmètica: la manera de repartir el total no és possible, ja que $1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18$ que no és pas igual a 1. En afegir un camell més, el nombre 36 que és múltiple de 2, de 3 i de 9 permet donar un nombre enter de camells a cada germà, però com que $(1/2 + 1/3 + 1/9)\cdot 36 = (17/18)\cdot 36 = 34$, sobren dos camells.

Si el repartiment s'hagués fet de la següent manera: la quarta part al primer, la quarta part al segon i la quarta part al tercer, es veuria clarament que d'aquesta manera no queda repartida la totalitat.

Exemple 5: *La seqüència següent està formada per nombres primers (s. XVII):*

31, 331, 3.331, 33.331, 333.331, 3.333.331, 33.333.331

És primer el nombre 333.333.331?

No! És múltiple de 17.

Aquest exemple mostra el perill d'extrapolar, en base a una intuïció fortament apuntalada per molts casos concrets.

El següent exemple és encara més sorprenent.

Exemple 6: *L'equació* $\boldsymbol{x^4 + y^4 + z^4 = w^4}$ *té solucions enteres no trivials?* (Conjectura d'**Euler**).

Euler (s. XVIII) conjecturava que no. Durant més de dos-cents anys no se'n va trobar cap solució; amb l'ús d'ordinadors es va poder demostrar que no hi havia cap solució per a valors de **x** inferiors a un milió i. posteriorment fins a valors inferiors a dos milions. Cap a l'any 1987, ja s'havia arribat als valors inferiors als dos milions i mig.

Finalment, l'any 1988 , Naom Elkies va arribar a veure que la conjectura era falsa!:

$$\mathbf{2.682.440^4 + 15.365.639^4 + 187.960^4 = 20.615.673^4}$$

Certament, qui podria haver pensat que Euler anava errat, l'any 1987?

Arribem ara a l'últim i més famós exemple que il.lustra l'extraordinària complexitat que lliga la intuïció amb la resolució de problemes matemàtics.

Es tracta del Gran Teorema de **Fermat**. Cal, abans de tot, fer un petit resum de la seva història.

Exemple 7: *El Gran Teorema de* ***Fermat****:*

L'equació $\boldsymbol{x^n + y^n = z^n}$ *quan n>2, no té solucions enteres (no trivials).*

Fites en la història del Gran Teorema de Fermat (GTF):

1635 Mentre estudia el *Llibre II de l'Arithmetica* de Diofant d'Alexandria (cap al 250 d.C), es sorprèn que hi hagi infinites ternes pitagòriques, però, aparentment, cap terna solució de l'equació $\boldsymbol{x^3 + y^3 = z^3}$. Ràpidament generalitza el problema: *Té solucions (enteres, no trivials), l'equació* $\boldsymbol{x^n + y^n = z^n}$ *quan n > 2?*

Escriu una nota al marge en la qual afirma:"*N'he trobat una solució veritablement remarcable, però el marge d'aquest llibre és massa estret per contenir-la".*

1670 El fill de Fermat publica totes les observacions (48) del seu pare al *Llibre II.* Aquestes observacions, de fet, són teoremes extraordinaris i els matemàtics van trobant-ne les demostracions (demostracions que Fermat només esbossava o que ni tan sols en deia res).

1753 Euler, inspirant-se en el mètode de demostració del cas n = 4 que Fermat havia deixat lleugerament indicat, demostra el cas n = 3 i refà la demostració del cas n = 4. Automàticament, els casos n = 3k i n = 4k estan demostrats.

1795 Sophie Germain dóna una idea nova de demostració per als casos en què n és primer i 2n + 1 també, però no duu a terme l'estudi en detall.

Fent servir el mètode esbossat per S. Germain es demostren els casos n = 5 i n = 7 a principis del XIX.

1847 Lamé i Cauchy, independentment, anuncien que han demostrat el teorema.

Just abans de publicar-ho oficialment, Ernst Kummer descobreix un error en un punt clau de la demostració i en publica els arguments i els càlculs. Lamé i Cauchy es veuen obligats a rectificar.

1908 Paul Wolfskehl, poc abans de suïcidar-se, descobreix un error en els càlculs de Kummer, però aconsegueix de corregir-lo: la línia argumental general de Kummer continua sent correcta i , per tant, l'argumentació de Cauchy és falsa. Com a conseqüència, P.W. no se suïcida, i en el seu testament, estableix un premi de 100.000 marcs per aquell qui demostri el Gran Teorema de Fermat. La data límit és el 2007.

1954 Taniyama i Shimura estableixen una conjectura sobre unes equacions denominades el.líptiques, de gran transcendència en la matemàtica, però confessen no tenir ni el més petit indici de demostració.

1984-86 Els treballs de Frey, Ribet i Mazur demostren que la conjectura de T-S implica el GTF: el teorema de Fermat torna a ser pres en consideració.

1986 Andrew Wiles, que de jove havia quedat fascinat pel GTF, i que en la seva tesi doctoral havia treballat sobre les equacions el.líptiques, comença a investigar per tal d'obtenir una demostració de la conjectura T-S, sol i aïlladament, en secret:" *Per arribar a una idea nova cal un llarg període de concentració intensa en el problema, sense distraccions ni interferències. Després, durant una certa relaxació, sorgeixen les intuïcions"*.

1989-91 Wiles, fent servir noves tècniques modificades i adaptades convenientment, avança espectacularment en la demostració de la conjectura T-S, però queda encallat en un pas crucial de la demostració. Decideix comptar amb la col.laboració de Nick Kantz, especialista en una de les tècniques utilitzades.

1993 Wiles, amb la col.laboració de Nick Kantz, programa tres conferències a Cambridge; en l'última conferència, el 23 de juny, i davant un auditori d'uns 200 matemàtics acaba la demostració de la conjectura de T-S i, per tant, del GTF.

En el procés de revisió del manuscrit, per tal de ser publicat, Kantz descobreix un escull en la demostració que Wiles no pot superar: la demostració del GTF no està completa i Wiles no publica el manuscrit, malgrat que gairebé tots els seus capítols són treballs de primeríssima fila i, en un desesperat intent de salvar la demostració, es torna a tancar a treballar.

1994 A la tardor, i després d'un treball intens, Wiles aconsegueix una modificació essencial de les tècniques utilitzades anteriorment i conclou amb èxit la demostració.

1995 Wiles torna a presentar l'article (130 pàgines) a revisió i no hi ha cap dubte: la demostració és correcta i l'article és finalment, publicat. El GTF està demostrat, uns 360 anys després de la seva primera formulació (325 anys després de la seva publicació) i 12 anys abans que es compleixi el termini estipulat en el testament de P. Wolfskehl.

1997 Wiles rep el premi instituït per P.W., el 27 de juny; la xifra és de 50.000 dòlars.

En teoria de nombres queden encara molts enigmes per resoldre. A títol d'exemple n'enunciaré un de molt senzill en la seva formulació i que és un dels més antics.

Exemple 9: *Tot nombre parell és suma de dos nombres primers.* (Conjectura de **Goldbach**, 1732).

No se n'ha demostrat la validesa ni la falsedat.

Per acabar, cal dir que, com es pot deduir fàcilment de la solució del problema de **Fermat**, darrera una *intuïció* (més d'una, en el cas d'A. Wiles) genial, no només hi ha el suport més o menys implícit dels resultats i dels treballs de tota la matemàtica anterior, sinó, el que és realment més important, hores, dies, i en ocasions anys, de treball intens i de dedicació al problema per resoldre.

Si la simple menció de la paraula "treball" ens provoca vibracions negatives, no ens hem de preocupar excessivament, ja que, pràcticament, no queden dies per anar a escola, com ho "demostra" el raonament *matemàtic* (?) *intuïtiu* (?) i *real* (?) següent:

La tercera part del dia la passareu dormint (com a mínim!): això equival a uns 122 dies.
Tres hores al dia es passen menjant (la vuitena part del dia): això equival a uns 45 dies.
Entre les vacances d'estiu, Nadal i Setmana Santa, podem afegir-hi uns 90 dies.
Com que hi ha 52 caps de setmana a l'any, hem de considerar també uns 104 dies.
Si ho sumem tot, obtindrem 361 dies: pràcticament no queden dies per anar a escola!

Josep Maria Lamarca París

Barcelona, 13 de setembre de 1999