O ANO MUNDIAL DAS MATEMÁTICAS 2000
Pasado, presente e futuro das Ciencias Matemáticas

Luis A. Cordero Rego

DISCURSO INAUGURAL
lido na solemne apertura do
curso académico 2000 - 2001

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Luis A. Cordero Rego
Catedrático de Xeometría e Topoloxía
Facultade de Matemáticas
Universidade de Santiago de Compostela

O ANO MUNDIAL DAS MATEMÁTICAS 2000
Pasado, presente e futuro das Ciencias Matemáticas

DISCURSO INAUGURAL
lido na solemne apertura do
curso académico 2000 - 2001

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

CORDERO REGO, Luis A.

O ano mundial das matemáticas 2000 : Pasado, presente e futuro das Ciencias Matemáticas : Discurso Inaugural lido na solemne apertura do curso académico 2000-2001 / Luis. A. Cordero Rego. — Santiago de Compostela : Universidade, Servicio de Publicacións e Intercambio Científico, [2000]. — 62 p. ; 24 cm. — D.L. C. 1761/2000. — ISBN 84-8121-841-3

1. Matemáticas-Discursos, ensaios, conferencias. I. Universidade de Santiago de Compostela. Servicio de Publicacións e Intercambio Científico, ed.

51 (042)

EDITA
Servicio de Publicacións e
Intercambio Científico
Campus universitario sur

IMPRIME
Imprenta Universitaria
Campus universitario sur

ISBN: 84-8121-841-3

Dep. Leg.: C-1761/2000

Discurso

Magfco. e Excmo. Sr. Rector,
Excmas. e Ilmas. Autoridades,
Ilmos. Srs. Membros do Claustro da Universidade,
Miñas Donas e meus Señores,

Dentro do turno rotatorio establecido entre as diferentes Facultades e Escolas da nosa Universidade, correspóndelle á Facultade de Matemáticas o honor de que un dos seus membros pronuncie a Lección Inaugural que marca o inicio deste novo Curso Académico 2000-2001, curso de tan especial significado xa que é o de comezo dun novo século.

Cando o Magfco. e Excmo. Sr. Rector me comunicou a miña designación para ocupar esta tribuna, comecei a sentir, inmediatamente, o peso da responsabilidade de ter que representar, dalgún xeito, a tódolos meus colegas da Facultade de Matemáticas nesta ocasión tan especial, e viñeron á miña memoria imaxes das dúas últimas veces nas que un matemático tivo a honra de protagonizar un acto semellante na nosa Universidade: o Profesor D. Enrique Vidal Abascal, o meu querido mestre, falándonos da influencia dalgúns matemáticos e universitarios no renacemento cultural de Galicia[1], no acto de apertura do curso académico 1973-1974, e o Profesor D. Eduardo García–Rodeja Fernández, mestre de alxebristas, reflexionando sobre a matemática antiga e a matemática actual[2], no acto de apertura do curso académico 1983-1984. Moito temo que eu, co meu modesto discurso, non serei quen de acada-la altura científica dos discursos que pronunciaron os meus mestres, polo que dende agora lles prego a vostedes sexan benevolentes comigo no seu xuízo ó remate da miña intervención.

Aceptado con pracer o encargo de pronunciar esta Lección Inaugural, comezaron de seguido as miñas dúbidas respecto da elección do tema. Porque, ¿sobre que cuestión matemática podería eu falar para unha audiencia que sen dúbida estará formada maioritariamente por non matemáticos?

Estou seguro de que os meus colegas matemáticos presentes neste acto comprenden a dificultade que entraña unha tal decisión.

Afortunadamente para min, nesta ocasión a decisión foi bastante doada, xa que o ano 2000 está a ser o Ano Mundial das Matemáticas, e que mellor elección que seguir as recomendacións da Unión Matemática Internacional, expresadas na súa Declaración de Río de Janeiro, e aproveita-la ocasión para tentar mostrarlles a vostedes, aínda que sexa dun xeito moi limitado e parcial, como son e que significan as Matemáticas nos nosos días, falándolles un pouquiño do seu pasado inmediato,

[1] E. Vidal Abascal, *Influencia de algunos matemáticos y universitarios en el renacimiento cultural de Galicia*, Separata do Boletín da Universidade Compostelana **80** (1973).

[2] E. García–Rodeja Fernández, *Matemática antigua y actual*, Secretariado de Publ., Universidade de Santiago de Compostela, 1983.

do seu presente e do seu futuro, tal e como reza no título do discurso.

A DECLARACIÓN DE RÍO DE JANEIRO

No mes de maio de 1992 o Comité Executivo da Unión Matemática Internacional (UMI) celebrou unha das súas reunións ordinarias en Río de Janeiro, como un máis dos actos conmemorativos do corenta aniversario da fundación do IMPA, o Instituto de Matemáticas Puras e Aplicadas de Río de Janeiro, un dos centros de investigación matemática máis importantes e coñecidos do mundo. Por certo, dase a curiosa circunstancia de que, naquel entón, o Presidente da UMI era o Profesor Jacques-Louis Lions, Doutor *Honoris Causa* pola nosa Universidade. Durante esa reunión, máis precisamente o día 6 de maio de 1992, a UMI acordou declarar o ano 2000 como Ano Mundial das Matemáticas.

Esta declaración, coñecida na comunidade matemática como a Declaración de Río de Janeiro, establece tres obxectivos a acadar coa celebración deste Ano Mundial:

1º.– definir cales son os grandes desafíos que deben afrontar as Matemáticas no século XXI,

2º.– impulsar o recoñecemento das Matemáticas como unha das pezas claves para o desenvolvemento económico e cultural das nacións, e

3º.– promove-la imaxe pública das Matemáticas, impulsando a súa presencia na "sociedade da información".

Esta iniciativa da Unión Matemática Internacional foi posteriormente secundada e apoiada pola UNESCO que, na súa Asamblea Xeral do 11 de novembro de 1997, adoptou unha Resolución de apoio redactada nos seguintes termos:

- Considerando a importancia central das Matemáticas e das súas aplicacións no mundo actual, con respecto das ciencias, das tecnoloxías, das comunicacións e da economía, entre outros moitos campos.

- Consciente de que as Matemáticas están fondamente enraizadas en moitas culturas, e de que os máis destacados pensadores contribuíron significativamente, ó longo de milleiros de anos, ó seu desenvolvemento.

- Consciente de que a linguaxe e os valores das Matemáticas son universais, e polo tanto favorecen e a fan moi apropiada para a cooperación internacional.

- Salientando o papel fundamental da educación matemática, particularmente na escolarización primaria e secundaria, para a comprensión dos conceptos matemáticos básicos e para o desenvolvemento do pensamento racional.

  Acorda,

- Da-la benvida á iniciativa da Unión Matemática Internacional para declarar o 2000 como Ano Mundial das Matemáticas e acorda levar a cabo, dentro do seu sistema, actividades para promove-las Matemáticas en todo o mundo.

- Decide apoiar a iniciativa do ano 2000 como Ano Mundial das Matemáticas.

  E

- Insta ó Director Xeral para que colabore coa comunidade matemática internacional na planificación do Ano Mundial das Matemáticas 2000 e acorda contribuír, durante 1998-1999, con 20.000 dólares do Programa e Presuposto Ordinario, en apoio das actividades preparatorias.

O día 9 de febreiro de 1999, a Comisión Mixta de Investigación Científica e Desenvolvemento Tecnolóxico do Congreso dos Diputados aprobou, por unanimidade, unha Proposición non de Lei[3] pola que se insta ó Goberno central a que, con motivo da celebración do Ano Mundial das Matemáticas 2000, apoie a investigación neste eido e contribúa ó coñecemento e ó recoñecemento desta materia, xa que, e cito textualmente:

> *As Matemáticas son unha das máximas expresións da intelixencia humana e constitúen un eixo central na historia da cultura e das ideas. Gracias á súa universalidade aplícanse nas outras ciencias, nas ciencias da natureza, nas ciencias sociais, nas enxeñerías, nas novas tecnoloxías, e nas distintas ramas do saber e nos diferentes tipos de actividade humana, de tal xeito que resultan ser fundamentais no desenvolvemento e no progreso dos pobos.*

Un acordo semellante, senón nos mesmos termos exactamente si dende logo co mesmo espíritu, foi aprobado o día 30 de novembro de 1999 na Comisión de Educación e Cultura do Parlamento de Galicia.

Naturalmente, a Xunta de Goberno da nosa Universidade acordou tamén apoiar esta celebración[4].

E aquí nos atopamos, discurrindo polo último tercio do ano 2000, non pretendendo ésta lección ser outra cousa máis que a modesta contribución dun humilde matemático ó logro dos obxectivos marcados na Declaración de Río de Janeiro.

---

[3] A Proposición non de Lei foi presentada polos Diputados do Grupo Socialista do Congreso Antonio Martinón Cejas, María Teresa Riera Madurell, María del Carmen Heras Pablo e Bernardo Bayona Aznar.

[4] Acordo da Xunta de Goberno celebrada o 17 de febreiro de 2000, a proposta do Sr. Decano da Facultade de Matemáticas.

AS CIENCIAS MATEMÁTICAS: A NOSA CULTURA INVISIBLE

Ninguén cun nivel cultural medio pode nega-la existencia do pensamento matemático como algo inherente ó poder racional do home, formando parte da súa natureza e da súa historia.

A influencia das Matemáticas na nosa forma actual de vida, e o seu impacto directo en moitas das nosas actividades diarias é indiscutible, e débese ó seu espectacular crecemento e ó aumento das súas aplicacións, principalmente ó longo do último tercio do século XX, no que todo se "matematiza". Moitas das cousas, moi grandes ou moi pequenas, que forman parte da nosa vida cotiá, que a conforman e mesmo a condicionan, e das que xa non poderíamos prescindir facilmente, como son a radio, o teléfono, a televisión, as calculadoras, os ordenadores, os códigos de barras, os discos compactos, o escaner ou os satélites artificiais, por exemplo, non serían posibles sen a aplicación de numerosos e sofisticados resultados matemáticos.

Pese a iso, e aínda que a súa historia se mide por milenios, os matemáticos non temos máis remedio que admitir que as Matemáticas son, sen dúbida, as máis impopulares e as menos coñecidas de entre tódalas ciencias.

A Matemática ten sido chamada, en moitas ocasións, a "Raíña das Ciencias". Para algúns, a Matemática é algo superior, e a súa existencia xustifícase por se mesma; nesta apreciación hai, sen dúbida, un sentimento de autosuficiencia e presunción, que se reafirma coa consideración tan extendida entre moitos matemáticos de que tan só necesitan deles mesmos. Existe tamén nesta actitude unha especie de sentimento cuasi divino ou celestial, segundo o que a superioridade da mente sobre a materia atopa a súa mellor expresión nas Matemáticas, xa que as Matemáticas son a máis noble e a máis pura forma do pensamento. Unha das máis apaixonadas confesións, neste senso, débese ó matemático inglés Godfrey Harold Hardy (1877-1947), paradigma da pureza matemática, quen afirmou que a mellor forma de xustifica-la práctica das Matemáticas é a de consideralas como unha forma da arte.

Para moitos, non obstante, as Matemáticas son simplemente a linguaxe do cuantitativo.

O *Diccionario de la Lengua de la Real Academia Española*, edición de 1992, defíneas así:

> **Matemática**: Ciencia que trata de la cantidad. **Matemáticas aplicadas** o **mixtas**: Estudio de la cantidad considerada en relación con ciertos fenómenos físicos. **Matemáticas puras**: Estudio de la cantidad considerada en abstracto.

Pola súa banda, o *Diccionario da Real Academia Galega*, edición de 1997, define:

> **Matemática**: Ciencia que se ocupa das propiedades dos números, das figuras xeométricas, etc., das súas relacións e da súa aplicación a outras ciencias e no que se engloban a aritmética, a xeometría, a álxebra, a trigonometría, etc. OBS. É máis frecuente utiliza-lo termo en plural ca en singular.

Coido que sobran os comentarios, e basta con felicitar ós nosos académicos.

Outros moitos ven as Matemáticas como algo xa morto, e a un matemático profesional nunca lle sorprende escoita-la seguinte pregunta: ¿pero que traballo hai que facer en algo no que xa todo é coñecido?

Diante dunha tal pregunta un non pode deixar de lembrar as verbas de Paul R. Halmos, prestixioso matemático moi coñecido polos seus escritos de divulgación, que dicía: "Entristéceme que a xente culta nin tan sequera saiba que o meu tema existe". Eu, persoalmente, comparto este sentimento, e fago miñas tamén as verbas de David Mumford[5], Presidente da UMI entre 1995 e 1999, quen dixo: "Estou afeito, como matemático profesional, a vivir nunha sorte de baleiro, rodeado de xente que se declara, con orgullo, analfabeta en Matemáticas".

Sen embargo, como sinala Sir Michael Atiyah[6], un dos matemáticos vivos máis prestixiosos dos nosos tempos, "o século XX transformou totalmente as Matemáticas, que pasaron de ser unha industria caseira xestionada por uns poucos semiprofesionais a ser unha industria de ámbito mundial xestionada por un exército de profesionais".

Parece claro certamente que, como se pide no terceiro punto da Declaración de Río de Janeiro, os matemáticos debemos de facer un esforzo para mellorar a imaxe das Matemáticas a nivel popular. Pero, como di o tamén matemático Gian-Carlo Rota: "Face-las Matematicas intelixibles para o home medio culto, mantendo uns estándares científicos altos, ten sido considerado dende sempre como unha navegación perigosa entre a Escila do desprezo profesional e a Caribdis da incompresión pública".

¡E nesta sorte de perigosa navegación atópome eu agora mesmo!

[5] David Mumford (1937-...) recibiu a Medalla Fields no Congreso Internacional de Matemáticas de Vancouver en 1974.

A "Medalla Fields" é o equivalente en Matemáticas ó Premio Nobel. Instituídas por iniciativa do matemático canadíense J.C. Fields (1863-1932) as Medallas Fields son outorgadas cada catro anos, con ocasión dos Congresos Internacionais de Matemáticas, e sempre a matemáticos menores de corenta anos. A proposta de creación dos premios foi aceptada no Congreso Internacional de Matemáticas de Zurich en 1932, e as primeiras medallas (dúas) foron concedidas no Congreso Internacional de Matemáticas de Oslo en 1936, sendo L. Ahlfors (1907-1996) e J. Douglas (1897-1965) os galardoados.

[6] Sir Michael Atiyah (1929-...) recibiu a Medalla Fields no Congreso Internacional de Matemáticas de Moscova no ano 1966.

AS MATEMÁTICAS NO SÉCULO XX: UNHA BREVE ESCOLMA HISTÓRICA

O desenvolvemento experimentado polas Matemáticas ó longo do século XX é, se non maior, si polo menos comparable ó de calquera das outras ciencias.

Cualitativamente, o sucedido nestes cen anos pódese resumir dun xeito moi simple dicindo que a primeira metade do século estivo marcada pola idea de que "canta máis abstracción, mellor"; esta idea foi cambiando co paso do tempo, e semella que na segunda metade do século a idea predominante pasou a ser que "existen niveis óptimos de abstracción".

Cuantitativamente, nestes finais do século XX, a producción anual de artigos de investigación en Matemáticas ten acadado a cota dos 60.000, cando nos anos cincuenta tan só se publicaban uns 5.000; hoxe en día estímase que o número de matemáticos que traballan activamente en investigación ronda os 10.000, e o número de participantes no Congreso Internacional de Matemáticas de Berlín 1998, o último congreso mundial celebrado[7], foi de máis de 4.000, mentres que tan só 250 matemáticos participaron no Congreso Internacional de París do ano 1900, congreso do que logo lles falarei cun pouco máis de detalle.

Pero sería imposible falar dos logros acadados polas Matemáticas no século XX sen facer unha referencia, aínda que moi breve, á revolución experimentada polo pensamento matemático ó longo do século XIX. Non só a súa linguaxe, senón mesmo

[7]Os Congresos Mundiales de Matemáticas celébranse cada catro anos. Ata o presente lévanse celebrados vintetrés: Zurich 1897, París 1900, Heidelberg 1904, Roma 1908, Cambridge (U.K.) 1912, Strasbourg 1920, Toronto 1924, Bolonia 1928, Zurich 1932, Oslo 1936, Cambridge (U.S.A.) 1950, Amsterdam 1954, Edimburgo 1958, Estocolmo 1962, Moscova 1966, Niza 1970, Vancouver 1974, Helsinki 1978, Varsovia 1982 (1983), Berkeley 1986, Kyoto 1990, Zurich 1994 e Berlín 1998. O próximo terá lugar no ano 2002 en Beijing (China).

os fundamentos lóxicos das Matemáticas actuais, dependen dun xeito esencial do acontecido ó longo do século XIX, para moitos o verdadeiro século da Matemática Pura.

As Matemáticas no final do século XIX

Os rápidos progresos experimentados polas Matemáticas durante os séculos XVII e XVIII, nos que os continuadores das obras de Newton e Leibniz culminan as colosais creacións do Cálculo Infinitesimal e do Cálculo Integral, fixeron que as Matemáticas entraran, ó longo do século XIX, nun período de axitado crecemento, caracterizado por dous feitos: (1) a crítica dos fundamentos, primeiro os da Análise, logo os da Xeometría, e por último tamén os da Lóxica; e (2) por unha tendencia á xeneralización, tentando liberar ás Matemáticas das presuncións intuitivas e lograr que fosen un obxecto de estudio en si mesmas, independentes da filosofía natural.

As melloras nos sistemas de cálculo, coa elaboración dun sistema rigoroso de Análise, conducen, nun último termo, á Mecánica Cuántica e á Teoría da Relatividade, e, como consecuencia, a un coñecemento e comprensión máis fondos da natureza da materia e do espacio. Doutra banda, ó cuestionar a lóxica do Cálculo e da Xeometría, descóbrense uns novos mundos para as Matemáticas, coas Teorías dos Conxuntos Infinitos, da man de Georg Cantor (1845-1918), e das Xeometrías Non-Euclídeas, da man de G.F.B. Riemann (1826-1866), o que de feito conducirá, ó longo do primeiro tercio do século XX, a unha mellor comprensión dos seus propios fundamentos.

É interesante constatar que, nos anos finais do século XIX, as Matemáticas enfrontaban problemas moi semellantes ós que atopamos agora, nos finais do século XX, ou polo menos iso parece cando se len as intervencións dalgúns dos matemáticos máis significados daqueles tempos. Permítanme que, a modo de exemplo, cite tres de tales intervencións.

Como unha máis das actividades da Exposición Mundial de Chicago do ano 1893, exposición coa que se conmemoraba o catrocentos aniversario do descubrimento de América, celebrouse nesa cidade americana unha especie de pequeno "congreso mundial" de matemáticos e astrónomos[8]. O matemático alemán Felix Klein[9] (1849–1925), abriu o congreso cunha breve intervención titulada *"O Estado Actual das Matemáticas"*. Pola súa actualidade, non me podo resistir á tentación de reproducir algún dos párrafos desa intervención. Dicía Klein:

> ... *Cando contemplamo-lo desenvolvemento das Matemáticas neste século XIX, atopámonos con algo semellante ó acontecido en outras ciencias. Os investigadores famosos do período precedente ... foron grandes dabondo para abarcar tódalas ramas das Matemáticas e as súas aplicacións. En particular, Astronomía e Matemáticas foron consideradas no seu tempo como inseparables.*
>
> *Sen embargo, coa xeneración seguinte manifestouse unha tendencia á especialización ... Pero, ó mesmo tempo, a ciencia en desenvolvemento desviábase cada vez máis do seu campo e propósitos orixinais e dividíase en diferentes ramas. E na mesma proporción desmedraba a atención que lle prestaba o público científico en xeral. Considera-la especulación matemática moderna como algo sen interese ou importancia chegou a ser case un hábito ... Esto é un retrato do pasado. Nesta ocasión eu desexo facer constar moi enfáticamente que nas últimas dúas décadas ven de*

[8]O congreso celebrouse en dúas seccións, unha de Matemáticas e outra de Astronomía. Na sección de Matemáticas houbo 45 participantes, sendo tan só 4 deles, incluíndo Klein, non americanos.

[9]Felix Klein é principalmente coñecido polo chamado "Programa de Erlangen" (1872). Véxase F. Klein, *Le Programme d'Erlangen*, Gauthier–Villars, París, 1974.

> *impoñerse unha clara mellora interna na nosa ciencia, cun éxito en constante crecemento.*
>
> *A nosa materia resulta ser máis simple do que nun principio se pensaba. De feito, parece que as distintas ramas das Matemáticas estánse desenvolvendo non en direccións opostas senón en paralelo, o que fai posible combina-los seus resultados no contexto de conceptos máis xerais ...*

Antes de continuar coa historia semella pertinente facer algún pequeno comentario sobre estas verbas de Klein, comparando a situación das Matemáticas que nos describe coa situación actual. Como verán vostedes, cuantitativamente a situación é claramente distinta, pero cualitativamente semella que o cambio non ten sido demasiado grande.

No ano 1868, o "Anuario sobre o Progreso das Matemáticas"[10] distinguía doce "categorías" ou áreas, e trinta e oito subcategorías nas Matemáticas. As doce categorías eran: Historia e Filosofía, Álxebra, Teoría de Números, Probabilidade, Series, Cálculo Diferencial e Integral, Teoría de Funcións, Xeometría Analítica, Xeometría Sintética, Mecánica, Física Matemática, e Xeodesia e Astronomía. Actualmente, na máis recente "Clasificación dos Temas Matemáticos"[11], publicada neste ano 2000, contémplanse 63 áreas, 557 subáreas e 5.031 sub-subáreas.

Esta última clasificación mostra que, independentemente das causas que teñan motivado esta situación, e que eu non vou analizar aquí, o feito certo é que, principalmente a partir da Segunda Guerra Mundial, as Matemáticas veñen caracterizándose por unha clara e imparable tendencia á especialización en subcampos cada vez máis pequenos. Unha primeira consecuencia

[10] *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, 1868.

[11] *Mathematics Subject Classification 2000*, publicado e utilizado por "Mathematical Reviews" e "Zentralblatt für Mathematik", as dúas bases de datos máis importantes en Matemáticas.

derivada é que algúns destes subcampos están sendo explorados cunha gran profundidade. Unha segunda consecuencia é que os matemáticos temos un enorme problema de comunicación entre nós mesmos.

É innegable que esta fragmentación en pequenos subcampos persiste, e sen dúbida seguirá en aumento nos anos vindeiros, pero os seus efectos potencialmente negativos quedan paliados, afortunadamente, polo feito de que moitos problemas especialmente interesantes poden estudiarse agora dende unha perspectiva moito máis xeral.

Continuando co repaso histórico da fin do século XIX, catro anos máis tarde, no mes de agosto de 1897, celébrase en Zurich o que se recoñece como o Primeiro Congreso Internacional de Matemáticas[12]. Neste Congreso interveñen, entre outros, Henri Poincaré (1854–1912) e, de novo, Felix Klein.

O primeiro deles, Poincaré, pronuncia a conferencia inaugural do Congreso, titulada *"Sobre as Relacións entre a Análise Pura e a Física Matemática"*, e di:

> *... As combinacións que se poden formar con números e símbolos son infinitas. Entre tanta espesura ¿como escolleremos aquelas merecentes da nosa atención? ¿deixarémonos levar polos nosos caprichos ou manías? ... esto levaríanos sen dúbida a uns moi lonxe dos outros, e rápidamente deixaríamos de entendernos entre nós. Pero este é o lado menor do problema. A Física non só evitará que poidamos perdernos, senón que mesmo nos protexerá dun perigo ainda máis espantoso ... que permanezamos dando voltas en círculos para sempre. A historia demostra que a*

[12]Entre os 250 participantes deste Primeiro Congreso tan só figuran tres españois: Zoël de Galdeano e J. Rius y Casas, de Zaragoza, e L. Torres, enxeñeiro de camiños, de Madrid (supoño que se trataba do enxeñeiro Leonardo Torres Quevedo).

> *Física non só nos forza a elexir [entre a multitude de problemas que xorden], senón que nos ten imposto direccións nas que non houberamos nin tan sequera soñado doutro xeito. ¡Qué nos podería ser de maior utilidade!*

Felix Klein, pola súa banda, pronuncia a conferencia de clausura do Congreso, titulada *"Sobre a Cuestión da Educación en Alta Matemática"*, e di:

> ... *Non deixarei sen mencionar a cuestión xeral da estreita relación que existe entre as Matemáticas e as súas aplicacións, cuestión que foi o tema central da brillante exposición de Monsieur Poincaré. Ninguén está máis convencido ca min da importancia desta estreita relación; sen embargo, diante da asamblea deste congreso matemático, paréceme máis apropiado suliñar outro aspecto e dicir que existe algo chamado Matemática Pura, que é, de feito, o corazón da nosa ciencia, e a súa prosperidade é un prerrequisito para que tódalas outras actividades matemáticas non decaigan a un nivel máis baixo. Polo tanto, permítanme falar da aprendizaxe daqueles poucos que están destinados a leva-las Matemáticas Puras hacia o futuro, os verdadeiros escolares matemáticos.*

Parece obvio, á vista destas verbas de Poincaré e Klein pronunciadas, recórdollelo, en 1897, que a contraposición entre Matemática Pura e Matemática Aplicada, da que tanto se fala nos nosos tempos, non é algo novo, pois xa existía por aquel entón.

As Matemáticas no século XX

Cando as Matemáticas chegan ó século XX, no medio dun maremagnum de novos conceptos e teorías e dunha nova linguaxe que nacía coa Teoría dos Conxuntos Infinitos de Cantor, prodúcese un feito que marca decisivamente o seu desenvolvemento posterior ó longo de todo o século.

En agosto do ano 1900 celébrase en París o 2º Congreso Internacional de Matemáticas. Presidido por Henri Poincaré, e con G. Cantor, G. Mittag-Leffler (1846–1927), V. Volterra (1860–1940), e o propio Poincaré como conferenciantes principais, sen embargo este Congreso houbera pasado pola historia das Matemáticas sen pena nen gloria de non producirse nel a intervención de David Hilbert (1862-1943).

Por aquel entón Hilbert era, con 38 anos, un dos líderes das Matemáticas en Alemania, xa famoso pola súa solución do problema máis importante da teoría de invariantes e polo seu "Informe sobre a Teoría de Números", publicado en 1896. Ademáis, a petición de Felix Klein, Hilbert viña de publicar en 1899 o seu libro titulado *"Fundamentos da Xeometría"*[13], como parte das conmemoracións celebradas en Götingen en memoria de Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e Wilhelm Eduard Weber (1804–1891). O matemático Adolf Hurwitz (1859–1919), bon amigo de Hilbert, veu craramente as implicacións daquel libriño máis aló do seu campo, a Xeometría, e dicíalle a Hilbert nunha carta: "Vés de abrir un campo inconmensurable para a investigación matemática, que podería chamarse a *Matemática dos Axiomas*, e que vai moito máis aló do dominio da Xeometría".

Invitado polos organizadores a presentar un artigo no Congreso Internacional de París, a Hilbert gustaríalle aproveitar ben unha ocasión tan significada. Vacilante na elección do tema da súa conferencia, consulta co seu amigo Hermann Minkowski (1864-1909) nunha carta de felicitación polo Nadal. Na súa carta Hilbert menciónalle as dúas conferencias do Primeiro Congreso Internacional (Zurich 1897) que máis lle impresiona-

[13] *D. Hilbert, "Grundlangen der Geometrie"*, 1ª ed. 1899.

ron: a brillante pero moi téćnica conferencia de Hurwitz sobre a historia da teoría moderna de funcións, e o discurso máis divulgativo de Poincaré sobre a relación recíproca entre a Análise e a Física. Hilbert confésalle a Minkowski que sempre desexou replicar a Poincaré facendo unha defensa da Matemática por si mesma, pero que tamén ten outra idea, xa que con frecuencia ten reflexionado sobre a importancia dos problemas individuais no desenvolvemento das Matemáticas. Quizais podería falar da dirección das Matemáticas no século que vai comenzar en termos de certos problemas importantes nos que os matemáticos deberían concentra-los seus esforzos. ¿Cal é a túa opinión?, pregúntalle Hilbert a Minkowski.

Con data do 5 de xaneiro de 1900 Minkowski resposta a Hilbert e dille: "Veño de reler a conferencia de Poincaré ... e penso que tódalas súas afirmacións están feitas dun xeito tan lixeiro que ninguén pode desaprobalas ... Posto que ti vas falar diante de especialistas, coido que unha conferencia como a de Hurwitz sería mellor que unha simple charla como a de Poincaré ... Sería máis tentador intentar botar unha ollada ó futuro, ou noutras verbas, caracteriza-los problemas ós que se deberían dedica-los matemáticos no futuro. Se o fas, podes esperar que probablemente a xente falará da túa intervención durante as próximas décadas".

Hilbert non lle resposta a Minkowski, pero o 29 de marzo escríbelle a Hurwitz: "Estou dubidando sobre o tema ... Ó mellor podería ser unha ollada ó futuro. ¿Qué opinas sobre a dirección na que se van desenvolver as Matemáticas no próximo século? Sería moi interesante e instructivo escoita-la túa opinión."

Finalmente, Hilbert realiza a súa intervención no Congreso o mércores 8 de agosto de 1900, na Sección de Bibliografía e Historia, Ensino e Métodos, nunha sesión presidida precisamente por Cantor. A conferencia leva por título *"Sobre os Problemas Futuros das Matemáticas"*[14]. Na súa conferencia Hilbert tan só tivo tempo para tratar dez problemas, pero na versión escrita presentou unha lista de vintetrés problemas non resoltos que, na súa opinión, eran os máis importantes cos que se enfrontaban as Matemáticas neses intres, e que deberían centra-lo traballo investigador dos matemáticos nos anos vindeiros.

A predicción de Minkowski resultou acertada, e os problemas propostos por Hilbert marcaron o devir das Matemáticas a partir do mesmo momento da súa formulación e ata os nosos días, nos que, por certo, algún deles aínda segue sen ser resolto. Tal foi a importancia da lista de problemas de Hilbert que, como Hermann Weyl (1885-1955) vaticinou uns anos máis tarde, os matemáticos que lograron resolver algún deles obtiveron inmediatamente un recoñecemento unánime por parte de toda a comunidade matemática.

Non vou abusar da súa paciencia e lerlles a lista completa dos problemas plantexados por Hilbert. Tan só lles direi que poden ser agrupados como segue.

Nun primeiro grupo de seis problemas, que poden ser calificados como "de fundamentos", atópanse entre outros a análise dos números reais utilizando a Teoría de Conxuntos de Cantor (Problema 1, ou da Hipótese do Continuo), a compatibilidade dos axiomas da Aritmética (Problema 2), ou o reto do tratamento matemático da axiomatización da Física (Problema 6). Nun segundo grupo, doutros seis problemas, atopamos cuestións relacionadas cos estudios do propio Hilbert sobre a Teoría (alxebraica) de Números, destacando o Problema 8 relativo

[14]O título orixinal da conferencia de Hilbert foi *"Mathematische Probleme"*, pero nos *Comptes Rendus* do Congreso foi traducida ó francés, co título *"Sur les Problèmes Futurs des Mathématiques"*, e aparece situada entre as conferencias plenarias "en raison de sa grande importance", aínda que como xa queda reseñado a conferencia de Hilbert non foi unha das plenarias do Congreso.

á distribución dos números primos e á Hipótese de Riemann. Nun terceiro grupo, doutros seis problemas, atopámonos cunha mixtura de problemas sobre distintos tópicos alxebraicos e xeométricos. O derradeiro grupo, de cinco problemas, está centrado en cuestions da Análise, na dirección dos seus propios traballos e intereses.

Estes vintetrés problemas foron a inspiración e guía das mentes dos matemáticos ó longo de todo o século XX. Oito deles non eran propiamente "problemas" nun senso estricto, senón verdadeiros programas de investigación pura. Dos quince restantes, doce xa están resoltos, e entre os outros tres destaca especialmente o Problema 8, referente á distribución dos números primos e á Hipótese de Riemann, considerado hoxe en día, como lles explicarei un pouco máis adiante, como un dos máis importantes problemas abertos cos que se enfronta a Matemática Pura de cara ó século XXI.

Pero independentemente da lista de problemas propiamente dita, o máis importante da intervención de Hilbert foi a súa proclamación de fe persoal na posible resolución de todo problema matemático, proclamación feita na primeira parte da súa conferencia e que se resume nas súas propias verbas como segue: "(Os matemáticos) oímos sempre resoar esta chamada: aquí te-lo problema, búscalle solución. Ti podes atopala polo razoamento puro. Xamais o matemático será levado a dicir: *ignorabimus*".

Hilbert declaraba así o seu convencemento de que a natureza das Matemáticas consiste en propoñer e resolver problemas, polo que os instrumentos do pensamento puro na mente dos matemáticos creadores deben de ser sempre dabondo para resolver calquera problema matemático que se propoña. Segundo él, as esixencias e condicións xerais ás que debe corresponde-la solución dun problema matemático son dúas: 1ª, a exactitude da solución, que debe ser obtida por medio dun número finito de conclusións; e 2ª, esa solución debe fundamentarse sobre un número finito de hipóteses proporcionadas polo propio problema e formuladas, en cada caso, con precisión.

Hilbert propugnaba, con esta declaración, a primacía do método axiomático nas Matemáticas, por diante de calquera outro método posible. Isto non era certamente algo novo, xa que o método axiomático foi o método utilizado por Euclides por exemplo, pero a Hilbert se debe que comenzara a ser coñecido e utilizado, na súa forma moderna, nos finais do século XIX.

Como auténtico mestre da axiomática, o espíritu de Hilbert exerceu unha profunda influencia no universo matemático de principios do século XX, e por iso debe ser considerado como un deses grandes homes que dominan e caracterizan toda unha época. O rigor da súa linguaxe e a maravillosa perfección dos seus razoamentos fixeron que o traballo de Hilbert fose un modelo para tódolos matemáticos posteriores. O seu libro *"Fundamentos da Xeometría"*, ó que xa me referín anteriormente, marca o inicio da axiomatización das Matemáticas, ou por ser máis precisos, da utilización dos sistemas de axiomas formais como base de cada unha das disciplinas matemáticas e, eventualmente, de tódalas Matemáticas.

Non obstante, a implantación desta concepción hilbertiana, esencialmente formalista, non foi doada; el mesmo coñecía mellor que ninguén a gran influencia exercida polas outras dúas escolas de pensamento sobre a fundamentación das Matemáticas que xurdiron nos comenzos do século XX.

Dunha parte estaba a *escola loxicista*, da que os meirandes impulsores foron os ingleses Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947). Os membros desta escola sostiñan que a Matemática é unha rama da Lóxica e, consecuentemente, avogaban pola definición dos conceptos matemáticos en termos de nocións lóxicas e a proba das súas proposicións como teoremas de lóxica. Este planteamento non era novo, pois o principio de que as Matemáticas son derivables da Lóxica remóntase a Leibniz, quen distinguía entre verdades da razón, ou necesarias, e verdades de feito, ou continxentes. En 1903, na súa obra *"Os Principios das Matemáticas"*[15], Russell escribía: "O feito de que tódalas Matemáticas son lóxica simbólica é un dos achados máis grandes da nosa época ..."

Doutra parte estaba a chamada *escola intuicionista*, fundada por Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), ó que máis tarde se lle une Hermann Weyl. Brouwer concebía o pensamento matemático como un proceso de construccións mentais que crean o seu propio universo, independente da experiencia e restrinxido tan só na medida en que debe de estar baseado na intuición matemática fundamental. Brouwer escribía: "O único fundamento posible para as Matemáticas ten que ser buscado neste proceso constructivo, limitado pola obriga de captar con reflexión, cultura e refinamento de espíritu as teses que son aceptables á intuición e evidentes á mente e as que non o son".

Os intuicionistas, posto que non recoñecían ningún principio da Lóxica *a priori*, tampouco recoñecían a tarefa matemática de deducir conclusións a partir de axiomas; para eles, as paradoxas eran un defecto da Lóxica e non da verdade matemática, polo que negaban a lexitimidade absoluta das regras aristotélicas da Lóxica, chegando a citar a Lei do Tercio Excluso para conxuntos infinitos como exemplo de principio lóxico que se estaba a aplicar con excesiva liberdade.

Hilbert, reaccionando contra esta corrente, chegaría a declarar, alporizado, no ano 1924: "Privar ó matemático da Lei do Tercio Excluso equivale a nega-lo telescopio ó astrónomo,

[15]B. Russel, *The Principles of Mathematics*, Cambridge: At the University Press, 1903.

ou o uso dos seus puños ó boxeador".

Co fin de salva-la Matemática Clásica da demoledora crítica intuicionista, así como tamén á Teoria Conxuntista de Cantor, que se estaba crebando polo mal das paradoxas, Hilbert propuxo que a Matemática fose formulada como unha teoría axiomática formal, impulsando deste xeito unha terceira escola, a *escola formalista.*

Esta escola fundamentábase na filosofía de que todo o contido das Matemáticas pode ser transformardo nun sistema de fórmulas simbólicas; e xunto a este sistema formal existe un eido chamado Metamatemática, dominio separado que serve de xustificación para o sistema de fórmulas, xa que o seu obxecto de investigación son as propias demostracións das Matemáticas ordinarias. Esta concepción formalista ou hilbertiana distingue os enunciados "reais" dos enunciados "ideais", segundo que o seu uso implique ou non a posesión dun significado intuitivo. Ademais, o engadido de "elementos ideais" a un sistema para completa-la súa estructura, e simplificar así o desenvolvemento da correspondente teoría, resultou ser un procedemento moi proveitoso.

Hilbert e os seus seguidores crían que, co procedemento de edificar e formalizar a demostración matemática por medio dun sistema de postulados non contradictorios, podería introducirse nas Matemáticas o mesmo tipo de certeza que as Leis de Newton introduciran na Mecánica dous séculos antes. Sen embargo, do mesmo xeito que a Mecánica Cuántica botou por terra o determinismo newtoniano, así a publicación do Teorema de Incompletitude por Kurt Gödel (1906-1978), no ano 1931, deitou por terra a certeza hilbertiana.

No seu teorema, sen dúbida un dos resultados máis profundos da historia do pensamento, Gödel establece a sorprendente conclusión de que as Matemáticas non poden ser encadeadas coa Lóxica, deixandó sentado que a Aritmética e, *a fortiori*, a Ciencia Matemática, é unha teoría incompleta. Esto viña a signica-lo seguinte: dado un conxunto calquera de axiomas que inclúa os da Aritmética, non existe ningún proceso de demostración con forza dabondo para probar que tal conxunto é, ó mesmo tempo, consistente e completo, xa que se fose completo tería que ser contradictorio, e se non contén contradiccións entón sempre existen enunciados matemáticos verdadeiros que non poden derivarse do conxunto dos axiomas de partida. Utilizando as verbas de Hilbert, Gödel probou que nas Matemáticas sempre existe un *ignorabimus*.

Gödel facía ver así que as Matemáticas non son unha ciencia todopoderosa, e que estaban moi lonxe de probalo todo como algúns pretendían, xa que nin tan sequera eran capaces de constata-la súa propia consistencia.

Poñíase asemade en evidencia que se a Teoría de Conxuntos non é contradictoria cando se basea nun sistema de axiomas no que non figure o Axioma da Elección (que estipula que "para toda clase infinita de conxuntos disxuntos dous a dous, existe unha clase que contén exactamente un membro de cada un deses conxuntos"), entón tampouco o é a teoría obtida engadíndolle ó sistema o Axioma da Elección e a Hipótese do Continuo (que di que "todo conxunto non numerable de números reais ten a potencia do continuo", entendendo por "continuo" o conxunto de tódolos números reais). Polo tanto, non se puido probar nin a veracidade nin a falsidade do Axioma da Elección e da Hipótese do Continuo (que era o Problema 1 na lista de Hilbert), disxuntiva que dividía ós matemáticos e que foi resolta no ano 1963 polo americano Paul Joseph Cohen[16], quen probou no seu Teorema de Indecibilidade que se trata de dous axiomas

[16]Paul Joseph Cohen (1934-...) recibiu a Medalla Fields no Congreso Internacional de Matemáticas de Moscova no ano 1966.

que son independentes do resto, e que a supresión de un deles ou de ámbolos dous, e mesmo a negación de calquera deles, daría orixe a Matemáticas diferentes.

En resumo, todas estas convulsións experimentadas pola axiomática primitiva ó longo da década dos anos trinta provocaron modificacións substanciais na forma de pensamento matemático e conduciron, en definitiva, á inclusión dun formalismo-clase no sistema e á fusión dos axiomas da Teoría de Conxuntos cos do Cálculo Lóxico. En todo caso, un feito predominante acabou por ser incuestionable: o triunfo das ideas de Cantor.

A introducción por Cantor, nos últimos anos do século XIX, dos conxuntos infinitos no vocabulario das Matemáticas deu nacemento á Teoría de Conxuntos, e con ela proporcionou unha nova e rica linguaxe que permitiu achar novas demostracións de feitos xa coñecidos e, sobre todo, permitiu considera-las Matemáticas dende unha nova perspectiva, con resultados tan espectaculares que logrou estimular enerxicamente ás xeracións posteriores. A Teoría de Conxuntos, que deixara estampada unha impresión indeleble nas cuestións filosóficas máis fondas dos fundamentos das Matemáticas, impulsou a que os problemas máis arrevesados das súas principais áreas fosen repropostos, e moitas veces resoltos, evidenciando así os efectos do poderoso pulo innovador xerado por ela.

Por exemplo, cuestións sobre a estabilidade das solucións das ecuacións diferenciais, nas que as solucións representan traxectorias de obxectos en movemento, foron traducidas en problemas de xeometría de certos conxuntos de puntos chamados superficies, axudando ó afianzamento dun novo campo nacente: a Topoloxía[17]. Dun xeito análogo, cuestións sobre a

[17] Compre suliñar que na lista de problemas propostos por Hilbert non se atopa ningún problema de Topoloxía como tal, pero Poincaré no 2º Congreso Internacional de Matemáticas de Roma en 1908 sinalou a Topoloxía, entón aínda chamada "Analysis Si-

estructura común das matrices, dos grupos e dos conxuntos, conduciron ó amplo dominio hoxe coñecido como Álxebra Abstracta. E métodos similares, ó ser aplicados á Análise do século XIX, conduciron á Análise Abstracta, na que as integrais e derivadas do cálculo clásico se aplican en espacios de dimensión infinita.

Estas tres disciplinas, Álxebra, Análise e Topoloxía, representan a cultura común dun matemático do século XX. As definicións, teorías e métodos destes tres campos forman hoxe o fundamento da educación matemática, e ninguén pode ser considerado culto en Matemáticas se non pode lelas e escribilas na linguaxe da Álxebra, da Análise e da Topoloxía. A partir destes tres campos, nados nos albores do século XX, xorde a incrible variedade das Matemáticas dos nosos días.

Esta rápida exposición das orixes, artífices e principais enclaves que levan ás Matemáticas contemporáneas, quedaría incompleta, penso eu, se non se cita a importante influencia exercida, entre os anos corenta e ata ben entrados os anos setenta, pola aparición no mundo matemático dunha iniciativa moi singular coñecida baixo o pseudónimo de Nicolás Bourbaki[18].

No primeiro semestre do curso 1934-35, un grupo de xoves matemáticos franceses, formado ó principio por Henri Cartan (1904-...), Claude Chevalley (1909-1984), Jean Delsarte (1903-

---

tus", como unha das áreas máis importantes para o futuro das Matemáticas (H. Poincaré, *L'avenir des Mathématiques*, Proc. 4th. Int. Congress Math., vol I (1908), 167–182.).

[18] O nome de Nicolás Bourbaki parece estar ligado cun xeneral da guerra franco-prusiana, C.D.S. Bourbaki, que no ano 1871 se refuxia en Suiza co seu exército derrotado. Durante algúns anos os membros do grupo mantiveron en segredo que Bourbaki era un pseudónimo, e mesmo trataron de facerse pasar por un único individuo. Son innumerables as anécdotas que se contan sobre Bourbaki, que semella tiña un especial sentido do humor, pero quizais a máis coñecida é a que fai referencia ó seu intento de ser admitido como membro da American Mathematical Society, admisión que lle foi denegada. Sobre 1950 R.P. Boas, editor executivo do *Mathematical Reviews*, publicou unha breve reseña sobre Bourbaki na *Enciclopedia Británica*, describíndoo como un grupo de matemáticos. Bourbaki reaccionou facendo correr o rumor de que Boas non existía como individuo, e que se trataba dun colectivo de matemáticos americanos.

1968), Jean Dieudonné (1906-1992) e André Weil (1906-1998), case todos eles antigos alumnos da Escola Normal Superior de París, decidiron escribir xuntos un libro sobre Análise. Nun primeiro momento concebiron o libro pensando nos estudiantes das universidades francesas e como sustituto dun libro[19] de Edouard Goursat (1858–1936) que atopaban xa anticuado, polo que decidiron redactar un novo texto que respondera axeitadamente ás necesidades das Matemáticas do século XX.

A tal fin, comezaron a reunirse unha vez por mes para discutir o seu plan, pero pronto chegaron á conclusión de que non lles sería posible limitarse a escribir tan só un texto de Análise. A Álxebra, por exemplo, que fora cambiada por completo nos últimos anos como resultado dos impulsos emanados dende Alemania, debidos principalmente ó traballo de Emmy Noether (1882-1935) e dos seus estudiantes, estaba xa a muda-la cara de toda a Matemática no seu conxunto. Doutra banda, as distintas ramas das Matemáticas tiñan acadado xa un desenvolvemento de tal magnitude que a especialización era absolutamente necesaria para case tódolos matemáticos. Tan só aqueles da estatura científica dun David Hilbert ou dun Henri Poincaré podían pensar en abarcar tódalas Matemáticas no seu conxunto. Para un matemático medio, sen embargo, era xa pouco menos que imposible ter unha perspectiva completa e coñecer tódalas relacións existentes entre as súas diferentes ramas.

Todo isto fixo que o grupo comezara a decatarse do enorme que tería que ser o seu traballo, polo que decidiron que tal tarefa non podía ser feita por un só individuo, e que a súa división entre os distintos membros do grupo dacordo coa súa especialización sería contraproducente para o que era o seu obxectivo final: expoñe-los conceptos básicos comúns a tódalas ramas

[19] E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, (1900-10).

das Matemáticas, en primeiro lugar, e tan só unha vez feito isto adicarse a cada unha das súas áreas.

Dende o principio Bourbaki non dubidou en adopta-lo método axiomático, polo que ten sido criticado duramente en moitas ocasións, pero o grupo considerábao absolutamente necesario para poder acada-lo seu obxectivo. A idea, moi simple, que inspira o método axiomático é a seguinte: en vez de defini-los obxectos que se van investigar, o que hai que facer é unha lista das propiedades fundamentais dos obxectos que se van utilizar no estudio. Estas propiedades tómanse como axiomas, e a partir de aquí xa non é importante cales son os obxectos que se estudian. As demostracións poden ser construidas de tal xeito que as súas conclusións poden aplicarse tamén a calquera outro obxecto que satisfaga eses mesmos axiomas. Resulta case incrible que unha idea tan sinxela, que transformou completamente as Matemáticas, tardase tanto tempo en ser posta en práctica.

Esta decisión de Bourbaki de utiliza-lo método axiomático levouno á necesidade de adoptar un novo ordeamento das diferentes ramas das Matemáticas, xa que non era posible manter a división clásica en Análise, Cálculo Diferencial, Xeometría, Teoría de Números, etc.; no seu lugar xurdiu a noción de estructura, que permitiu a introducción do concepto de isomorfismo e, con el, unha nova clasificación das disciplinas fundamentais dentro das Matemáticas.

Os primeiros fascículos da obra de Bourbaki, que se titula *"Elementos de Matemática"*, apareceron no ano 1939, chegando a publicarse arredor de cincuenta volumes; o emprego do singular no título, Matemática e non Matemáticas, plasma a idea que inspira o seu traballo, e que queda nidiamente exposta cando se sinala na introducción: "O tratado toma as Matemáticas na súa orixe e dá demostracións completas". Bourbaki é, sen dúbida, o mellor e o máis famoso discípulo de Hilbert.

Con partidarios entusiastas pero tamén con detractores moi importantes, ninguén sen embargo se atreverá a nega-la influencia da obra de Bourbaki, sen a que as Matemáticas do século XX serían algo totalmente distinto do que son: unha ciencia robustecida e unificada, cimentada sobre unha fonte única, a Teoría de Conxuntos, tal e como Hilbert preconizou. E, se ben quedan aínda ramas das Matemáticas que deberán ser axiomatizadas sobre ese fundamento, e a pesar de que as Matemáticas seguen apuntando cara á abstracción e a xeneralización, co paso dos anos comenzaron a recordar que os seus intereses e estímulos máis importantes sempre se atopan nas súas aplicacións.

Morris Klein sinala: "Pretender desterrar das Matemáticas as súas aplicacións equivalería a querer concentra-la vida dun animal únicamente nos seus ósos, sen adicar atención ós seus músculos, nervios e vísceras".

A aparición, a partir da década dos anos setenta, de potentes e poderosos ordenadores, co seu extraordinario poder para os cálculos numéricos, e a súa incrible capacidade tanto gráfica como para levar a cabo cálculos simbólicos, provocou que as Matemáticas experimentasen un pulo innovador no seu desenvolvemento.

A utilización dos ordenadores abriu novos e variados horizontes. Por exemplo, a posibilidade de darlle un tratamento numérico a ecuacións moi sofisticadas que ata entón eran intratables descubreu novos dominios de estudio e cambiou a visión matemática da complexidade, polo que o seu impacto foi considerable, mesmo se non temos en conta os profundos problemas matemáticos que propón o seu uso, tanto polas propias máquinas como polas redes que as interconectan, problemas que son de feito unha das novas fronteiras das Matemáticas.

Problemas que ata entón parecían intocables debido á inxente cantidade de datos que era preciso manexar, como ocorre por exemplo cos datos estatísticos, comenzaron a ser susceptibles dun tratamento que permite extraer deles unha información relevante. A capacidade das máquinas para repetir un algoritmo un número moi grande de veces, como ocorre por exemplo nos fractais, ten cambiado a visión que se tiña dalgunhas estructuras, transformando a súa apariencia patolóxica nunha riqueza real que proporciona ás ciencias naturais máis modelos para moitas das situacións prácticas coas que se atopan.

OS RETOS DO SÉCULO XXI

Hilbert, na súa histórica intervención no Congreso Internacional de París do ano 1900, comezou dicindo: "¿Quen de entre nós non estaría feliz se poidera levanta-lo veo detrás do que se agacha o futuro, para botar unha ollada ós próximos avances da nosa ciencia e ós segredos do seu desenvolvemento durante os séculos futuros?".

Nas proximidades da fin do século XX comezou a percorrer a comunidade matemática mundial unha especie de urxencia case febril por definir cales son os retos cos que se deben enfrontar, preferentemente, as Ciencias Matemáticas no novo século, tratando de revivir, dalgún xeito, o éxito da proposta de Hilbert.

Conscientes de que ninguén podería emular a Hilbert, a título individual, dado o inxente tamaño e a diversidade das Matemáticas hoxe en día, xa en agosto do ano 1990 a American Mathematical Society suxeriu, ó remate da Asemblea Xeral da Unión Matemática Internacional celebrada en Kobe (Xapón), que os matemáticos de primeira fila, representados nun "Comité de Cambio de Século"[20], organizaran os traballos para definir e expoñer os grandes desafíos cos que se atoparían as Matemáticas a partir do ano 2000.

Dous anos máis tarde, en 1992, prodúcese a Declaración de Rio de Janeiro, e sería imposible enumerar tódalas iniciativas das diferentes institucións matemáticas, das sociedades nacionais ou supranacionais[21], individuais[22], etc., levadas a cabo dende entón, nun intento colectivo por acadar ese obxectivo de defini-los retos do futuro.

En tódolos congresos de Matemáticas celebrados ó longo destes últimos anos pode atoparse, case sempre, algunha intervención especial ou algunha mesa redonda onde se tratan os principais problemas e retos da área de especialización de que se trate no congreso.

Centrándonos neste Ano Mundial das Matemáticas 2000, coido que os acontecementos máis importantes que se teñen producido en relación con este intento son os tres seguintes:

— O Terceiro Congreso Europeo de Matemáticas, celebrado en Barcelona do 10 ó 14 de xullo pasados, baixo o lema *"Dando forma ó Século XXI"*.

[20]Presidido por J. Palis (Secretario da UMI, Brasil), este Comité estaba formado por V.I. Arnold (Steklov Mathematical Institute, Moscova), F. Hirzebruch (Max-Plank Institut für Mathematik, Alemania), L. Lovász (Hungarian Academy of Sciences e Yale University, U.S.A.), B. Mazur (Harvard University, U.S.A.), S. Mizohata (University of Kyoto, Xapón), G.D. Mostow (Yale University, U.S.A.), J. Tits (Collège de France), W.P. Thurston (Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, U.S.A.) e S.R.S. Varadhan (Courant Institute for Mathematical Sciences, U.S.A.).

[21]Baixo os auspicios da Unión Matemática Internacional, a American Mathematical Society ven de publicar un libro titulado *"Mathematics: Frontiers and Perspectives"*, V.I. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur Eds., Amer. Math. Soc. 2000, 449 pp.

Unha inciativa similar atópase na publicación do libro *"Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond"*, B. Engquist and W. Schmid Eds., Spriger-Verlag, Berlin, 2000.

[22]A título de exemplo pódese citar o artigo [13]. O seu autor, Stephen Smale (1930–...), recibiu a "Medalla Fields" no Congreso Internacional de Matemáticas de Moscova en 1966.

— Entre o 7 e o 12 de agosto pasados celebrouse na Universidade de California en Los Angeles (UCLA), organizado pola American Mathematical Society, un congreso baixo o título *"Os Retos Matemáticos do Século XXI"*. Nel interviron, como conferenciantes invitados, trinta e un matemáticos de primeira liña, entre eles oito "Medallas Fields".

E, por último,

— O anuncio dos *"Premios do Milenio"* instituidos polo Clay Mathematical Institute, dos que lles falarei cun pouco máis de detalle de seguido.

Os Premios do Clay Mathematical Institute

O día 24 de maio de 2000 o Clay Mathematical Institute, entidade privada afincada en Cambridge (U.S.A.), anunciou, durante unha reunión do seu Comité Directivo celebrada no Collège de France en París, a creación de sete premios, que denomina "Premios do Milenio", cada un deles dotado cun millón de dólares, e que serán outorgados a aquel ou aqueles que resolvan algún dos sete problemas que un Comité Científico de Asesores[23] considera como os máis importantes cos que se enfrontan as Matemáticas no século que vai comezar.

A noticia da creación destes premios acaparou a atención dos medios de comunicación inmediatamente, penso que en razón da súa propia cuantía, pero iso foi todo e, salvo nos medios profesionais matemáticos, pouco se volveu falar deles dende entón.

Na presentación pública dos Premios dise, entre outras cousas, o seguinte:

[23]Este Comité está formado por Alain Connes (Collège de France e Institut des Hautes Études Scientifiques, Francia), Arthur Jaffe (Harvard University, U.S.A.), Andrew Wiles (Princeton University, U.S.A.) e Edward Witten (California Institute of Technology e Institute for Advanced Study, Princeton, U.S.A.).

As Matemáticas ocupan un lugar de privilexio entre tódalas ciencias, xa que encarnan a quintaesencia do coñecemento humano ... As fronteiras do coñecemento matemático evolucionan actualmente por profundos e insondables vieiros. Avances fundamentais [en Matemáticas] camiñan da man con descubrementos en tódolos campos da Ciencia. As aplicacións tecnolóxicas das Matemáticas apuntalan a nosa vida diaria, incluindo a nosa capacidade para comunicarnos gracias á criptografía e a teoría da codificación, a nosa capacidade para navegar e viaxar, a nosa saúde e benestar, e xogan igualmente un papel central na nosa economía. A evolución das Matemáticas seguirá sendo un factor determinante na evolución da nosa civilización. A apreciación da verdade matemática desafía as capacidades da mente humana.

... O Comité de Asesores Científicos do Instituto seleccionou estes problemas de entre aquelas cuestións clásicas máis importantes nas que a solución se vén resistindo ó longo dos anos.

... Hai cen anos, o 8 de agosto de 1900, David Hilbert pronunciou en París a súa famosa conferencia sobre os problemas matemáticos abertos ... É por iso que decidimos anuncia-los "Problemas do Milenio" e os Premios na nosa reunión de París.

Permítanme que abuse un pouquiño máis da súa paciencia e lles describa cales son estes sete problemas. Seguirei a orde en que se atopan propostos polo Clay Mathematical Institute, orde que non semella ter unha motivación especial, e tratarei de evitar, ata onde me sexa posible, a utilización de excesivos termos técnicos.

Problema 1: **P** ***versus*** **NP**

Proposto por Stephen A. Cook[24] en 1971, este é o problema aínda non resolto máis importante en Lóxica e Ciencias da Computación. Stephen Smale considera este problema como un regalo das Ciencias da Computación ás Matemáticas.

Imaxine cada un de vostedes que asiste como invitado a unha recepción social na que hai unha numerosa asistencia. Vostede síntese un pouco tímido, mesmo incómodo ou violento, porque dubida se alí atopará alguén coñecido. Afortunadamente o anfitrión da velada indícalle que seguro que coñece a aquela persoa que se atopa no curruncho do salón onde se celebra a recepción. Nun segundo vostede pode botar unha ollada e verificar se o seu anfitrión ten razón. En efecto, vostede coñece aquela persoa e respira aliviado porque xa ten con quen falar.

Sen embargo, imaxine o que pasaría se o seu anfitrión non lle fai esa indicación. Nese caso, se vostede quere comprobar se entre os asistentes á recepción se encontra algún dos seus coñecidos ou non, estaría obrigado a percorrer o salón, ollando unha por unha tódalas persoas presentes; se o número de asistentes é pequeno quizais faría ese percorrido, pero se ese número e moi grande, digamos un milleiro por exemplo, necesitaría tanto tempo para facelo que xa sería outro cantar, ¿verdade?

Isto é un exemplo moi sinxelo dun fenómeno xeral, no que xenerar unha solución dun problema moitas veces leva moito máis tempo do que sería necesario para verificar se unha solución proposta ó problema é correcta ou non.

Por exemplo, se alguén lles dice que un certo número A, de moitas cifras, pode escribirse como o producto de dous números máis pequenos, poden vostedes non saber se esa afirmación e certa ou non, pero se lles dicen que A pode ser factorizado como

[24]Stephen A. Cook, *The complexity of theorem-proving procedures*, In *Conference Record of Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Shaker Heights, Ohio, 1971, 151–158.

o producto B×C, cunha simple calculadora poderían verificar inmediatamente se tal factorización é certa ou non.

Para os teóricos da computación e da complexidade computacional, un problema computacional é "fácil" se o número de pasos necesarios para resolvelo está acotado por algunha potencia do tamaño do problema; por exemplo, a multiplicación de dous números con N díxitos cada un é un problema "fácil", xa que para resolvelo necesítanse como máximo N^2 multiplicacións e sumas de números dun só díxito. Os problemas deste tipo forman a clase chamada **P**, ou problemas "polynomial-time", e son problemas que poden ser resoltos por un ordenador nun tempo razoable.

Pero hai moitísimos problemas que semellan non quedar incluidos nesta clase, problemas nos que a demanda computacional crece exponencialmente co seu tamaño. Estes son os problemas "difíciles". En particular, existe unha clase de problemas de decisión, é dicir problemas nos que se busca unha simple resposta Si/Non, que se coñece como clase **NP**, ou "non-deterministic polynomial time". Neste tipo de problemas a verificación dunha solución pode realizarse nun prazo razoable de tempo, pero atopa-la solución podería necesitar dun tempo non razoable.

Os especialistas conxecturan que **P**<**NP**, é dicir que existen problemas que certamente non se poden resolver nun tempo razoable. Dar resposta a esta conxectura non é obviamente doado, e pode facerse de dúas maneiras: ben demostrando que **P**=**NP**, ou ben atopando un problema na clase **NP** que non estea na clase **P**.

Pero non é doado. Por exemplo, durante moito tempo pensouse que os problemas de programación lineal eran "difíciles", é dicir da clase **NP**, xa que o chamado "método do símplice" padecía dunha especie de crecemento exponencial na computación, o que é algo característico dos problemas **NP**. Pero en 1979 o ruso Leonid Khachian descubriu un algoritmo "polinómico en tempo" (polynomial–time) para resolve-los problemas de programación lineal, probando deste xeito que son problemas "fáciles", é dicir da clase **P**.

Dar resposta a este problema ten implicacións prácticas importantes, en particular, por exemplo, porque se **P=NP** a seguridade das transaccións financieiras e comerciais xa tan extendidas a través de Internet, baseadas no uso de sistemas criptográficos que semellan ser suficientemente seguros, podería verse seriamente afectada, mesmo destruida, co achado dun algoritmo satisfactorio para a factorización en números primos. Tratarei de explicarme un pouquiño mellor.

Un dos sistemas criptográficos de seguridade máis coñecido e utilizado é o chamado sistema RSA. Proposto por Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman no ano 1977, este é un sistema "public–key" no que, para o desencriptado, é necesario factorizar un certo número N, con moitos díxitos, digamos douscentos, como producto de dous números primos. O sistema semella bastante seguro xa que, se ben a factorización en primos é conceptualmente sinxela, sen embargo realizala pode levar, na práctica, moitísimo tempo.

Por exemplo, no ano 1977 estímabase que, con un ordenador facendo un millón de operacións por segundo, o tempo necesario para factorizar un número de cincuenta díxitos sería de catro anos, para un número con cen díxitos faría falla case un século, e para un número de douscentos díxitos necesitaríanse arredor de 4.000 millóns de anos.

Naturalmente, os ordenadores de hoxe en día son moitísimo máis potentes e rápidos que os dispoñibles no ano 1977, pero pese a iso e aínda que o tempo de ordenador necesario para facer tal factorización poida ser reducido en varios ordes de magnitude, aínda queda un marxe de seguridade dabondo. O achado dun algoritmo que permita facer tal factorización nun tempo razoable botaría por terra a seguridade do sistema de encriptado[25].

No momento presente os teóricos da computación pensan que a cuestión **P** *versus* **NP** podería estar relacionada co Teorema de Incompletitude de Gödel. Parece ser que certos enunciados matemáticos, entre eles por exemplo unha afirmación tal como "**P** *non é* **NP**", non se poden demostrar dentro do marco da Aritmética de Peano, que é a forma estándar e máis natural da Aritmética. As técnicas empregadas ata agora para resolve-lo problema son incapaces de distinguir entre **P** e **NP**, a menos que se dispoña de algoritmos para a factorización de números enteiros moito máis rápidos que os que se coñecen actualmente.

Noutras verbas, semella que distinguir entre problemas **P** e problemas **NP** pode depender, en última instancia, de se é posible factorizar enteiros moito máis rapidamente do que parece factible agora mesmo. E a esta cuestión podería darlle resposta unha nova área de investigación aínda nacente: a Computación Cuántica.

En 1994 Peter W. Shor[26] demostrou que un ordenador

---

[25] A fundación *Electronic Frontier Foundation*, unha asociación para a defensa e promoción da utilización de Internet, anunciou, en marzo de 1999, unha doación anónima de 50.000 dólares para premiar ó primeiro individuo ou grupo que descubrira un número primo con máis dun millón de díxitos. Poucos meses máis tarde o premio foi adxudicado ós descubridores do número $2^{6972593} - 1$. Un premio de 100.000 dólares recompensará a quen descubra un número primo de máis de dez millóns de díxitos, e existen igualmente premios de 150.000 dólares para o primeiro número primo de máis de cen millóns de díxitos, e de 250.000 dólares para o primeiro número primo de máis de mil millóns de díxitos.

[26] P.W. Shor, *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*, in *Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, S. Goldwasser Ed., IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 124–134 (1994).

Peter W. Shor (AT&T Labs Florham Park, New Jersey, USA) foi galardoado co Premio Rolf Nevalinna en 1998. O Premio Rolf Nevanlinna foi creado polo Comité Executivo da UMI en abril de 1981 para recoñecer as contribucións máis destacadas nos aspectos cuántico podería factorizar números grandes nun tempo que é unha potencia do tamaño do número, mellorando así exponencialmente a velocidade dos algoritmos clásicos. Naturalmente, isto significa que sería posible entón descifrar calquera dos códigos de uso habitual nas comunicacións actuais e que se supoñen tan seguros.

O pasado 15 de agosto IBM anunciou a posta en funcionamento do primeiro prototipo dun ordenador cuántico e, mentras se traballa sobre este novo tipo de ordenadores, outros o fan tratando de deseñar ordenadores baseados en principios distintos dos da Aritmética Booleana, sempre coa idea de intentar incrementa-la velocidade de computación.

Problema 2: A Conxectura de Hodge

Ó longo do século XX os matemáticos foron descubrindo distintas formas, técnicas ou camiños para estudiar e investiga-las formas de obxectos moi complicados. A idea básica consiste en preguntarse ata que punto podemos aproxima-la forma dun obxecto dado poñendo xuntos obxectos xeométricos simples e construíndo con eles bloques de dimensións cada vez máis grandes.

Esta técnica tense demostrada tan util que se ten xeneralizado de moitas formas diferentes, proporcionando poderosos intrumentos que permitiron ós matemáticos facer grandes progresos na catalogación dunha gran variedade de obxectos que atopan durante as súas investigacións. Lamentablemente, nestas xeneralizacións téñense perdido, ou polo menos escurecido, as orixes xeométricas do procedemento, xa que, dalgún xeito, nelas faise necesario apegar pezas que non teñen ningunha interpretación xeométrica.

matemáticos das ciencias da información. Outórgase un premio con ocasión de cada Congreso Internacional de Matemáticas. O primeiro deles concedeuse no ano 1982, no Congreso Internacional de Matemáticas de Varsovia do ano 1982 (1983).

A conxectura de Hodge[27] afirma que para un tipo particular de espacios, chamados "variedades alxebraicas proxectivas", as pezas chamadas "ciclos de Hodge" son de feito combinacións (lineais con coeficientes racionais) dun certo tipo de pezas xeométricas chamadas "ciclos alxebraicos".

A cuestión é, polo tanto, darlle unha resposta, afirmativa ou negativa, a esta conxectura.

Problema 3: A Conxectura de Poincaré

Imaxinen que collen unha pequena e estreita banda circular de goma e que a colocan, estirándoa, arredor dunha mazá, ben pegadiña á súa superficie; entón, é claro que podemos deixar que a banda se contraiga, movéndoa suavemente, sen rompela e sen deixar de toca-la superficie da mazá, ata que recupere a súa forma orixinal (é dicir, reducila a un punto) . Sen embargo, imaxinen esa mesma banda circular de goma colocada sobre un anel circular (por exemplo, o neumático da roda dun coche ou dunha bicicleta), pero enrolada ó longo do círculo do anel; entón, é claro tamén que agora non existe ningunha maneira de reducir a nosa banda a un punto sen rompe-lo anel ou a propia banda.

En termos matemáticos, ou máis propiamente en termos topolóxicos, dicimos que a superficie da mazá é "simplemente conexa" e que a superficie do anel non o é. Poincaré[28], hai xa case cen anos, sabía que a esfera 2-dimensional (i.e. a mazá) está esencialmente caracterizada por esta propiedade de ser simplemente conexa, e propuxo a pregunta de se iso é ou non certo para a esfera 3-dimensional, é dicir para o conxunto de puntos do espacio euclideo 4-dimensional que distan 1 da orixe de coordenadas.

---

[27] W.V.D. Hodge, *The topological invariants of algebraic varieties*, Proc. Int. Math. Congress 1950, 181–192.

[28] H. Poincaré, Oeuvres, Tomo VI, pax. 486, 498, París 1953.

Esta cuestión aparentemente tan sinxela resultou ser extraordinariamente difícil de resolver, e ata agora tan só se sabe que a resposta é afirmativa se se propón para as esferas de dimensión maior ou igual a catro[29].

Coido que non é esaxerado afirmar que a conxectura de Poincaré é, despois do famoso Teorema de Fermat recentemente demostrado polo matemático inglés Andrew Wiles[30], a conxectura matemática que ten sido obxecto de máis demostracións falsas. O mesmo Poincaré foi o primeiro en anunciar unha demostración (falsa) da conxectura[31].

A razón pola que a conxectura de Poincaré é fundamental na historia das Matemáticas do século XX, sinala Smale, é porque axudou a centrarse sobre as variedades diferenciables como tema de estudio. Neste senso, Poincaré tivo, e segue tendo, unha enorme influencia nas Matemáticas deste século pola atención que prestou ós obxectos xeométricos, incluíndo eventualmente as variedades alxebraicas, as variedades de Riemann, etc.

Problema 4: A Hipótese de Riemann

Como vostedes saben, algúns números, como 2, 3, 5, 7, etc., teñen a propiedade especial de que non se poden expresar como o producto de dous números máis pequenos. Estes números son os chamados "números primos", e xogan un papel moi importante, tanto no eido da Matemática Pura como no das súas aplicacións.

A existencia dunha infinidade de números primos é un feito

[29]Stephen Smale probou a conxectura para as esferas n-dimensionais, con $n \geq 5$ (S. Smale, *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. **74** (1961), 391–406), e Michael Freedman probouna para $n = 4$ (M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 357–453).

[30]A. Wiles, *Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. of Math. **141** (3) (1995), 443-551.

[31]H. Poincaré, Oeuvres, Tomo VI, pax. 370, París 1953.

ben coñecido que se remonta a Euclides[32]. Sen embargo, a cuestión de cómo aparecen os números primos entre tódolos números naturais, é dicir, a súa distribución dentro do conxunto dos números naturais, aínda é unha cuestión aberta, e de feito era xa un problema central da teoría de números no século XIX, en tempos de Riemann. Esta distribución non segue, aparentemente, ningún deseño ou patrón regular[33].

Riemann observou que a frecuencia con que se produce a aparición de números primos está moi relacionada co comportamento dunha certa función, coñecida como a "función Zeta de Riemann"[34], $\zeta(s)$. A famosa "Hipótese de Riemann" afirma que tódalas solucións "interesantes" (que son as que quedan dentro da banda $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$) da ecuación $\zeta(s) = 0$ están

[32]Euclides é coñecido principalmente pola Xeometría que leva o seu nome, pero entre os seus libros atópase un adicado ós rudimentos da Teoría de Números. O seu resultado máis importante neste eido é unha demostración da existencia dunha infinidade de números primos. A demostración de Euclides é como segue:

Consideremos a lista finita formada polos n primeiros números primos $p_1, p_2, \dots, p_n$; entón o número $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ é primo e non está na lista de partida. Da construcción realizada séguese que existe unha infinidade de números primos.

[33]En 1896 J. Hadamard (1865–1963) e J. de la Vallée Poussin (1866–1962) probaron, independentemente, o coñecido como Teorema do Número Primo, que afirma que o número $\pi(n)$ de números primos iguais ou menores que n é aproximadamente $n/\ln n$, onde $\ln n$ representa o logarítmo neperiano de n. Esta aproximación é bastante boa, cun erro de arredor dun 5% por exemplo, na estimación de $\pi(n)$ para $n = 10^9$, xa que predice arredor de 48 millóns de primos cando o número exacto é $\pi(n) = 50.847.534$.

Actualmente coñécense fórmulas, máis complicadas, para calcular mellores aproximacións de $\pi(n)$; a máis importante delas di que $\pi(n)$ é aproximadamente igual a $\mathrm{Li} = \int_2^n (\ln x)^{-1} dx$, chamada integral logarítmica de n.

[34]A función "Zeta de Riemann" é a función definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1, \quad s \in \mathbb{C},$$

e no plano complexo $\mathbb{C}$ completo por continuación analítica. Unha conexión entre os números primos e a función zeta prodúcese a través do chamado "producto de Euler", definido por $\zeta(s) = \Pi_p (1 - p^{-s})^{-1}$, p recorrendo os números primos, fórmula que é válida para $\mathrm{Re}(s) > 1$ e que aparece por primeira vez no libro de Euler *"Introductio in Analysin Infinitorum"* publicado en 1748.

situadas sobre unha liña recta (a liña definida por $\mathrm{Re}(s) = 1/2$). A validez da afirmación ten sido verificada para os primeiros 1.500 millóns de solucións, pero non se coñece unha demostración xeral.

A primeira vista, a 'Hipótese de Riemann" parece ser simplemente unha posible propiedade interesante dunha función especial, a función zeta de Riemann, e o mesmo Riemann[35] parece consideralo así, xa que escribe:

> *Sen dúbida sería interesante ter unha demostración rigorosa desta proposición; sen embargo, eu deixei este estudio a un lado polo momento e despois dalgúns intentos de resolvelo sen éxito, xa que non me parece necesario para os obxectivos inmediatos do meu estudio.*

A demostración de que a "Hipótese" é certa botaría luz sobre moitos dos misterios que rodean á distribución dos números primos; a súa non validez causaría estragos nesa distribución, polo que a súa demostración é a principal cuestión aberta na Teoría de Números.

O feito de que a "Hipótese de Riemann" teña chegado a ser considerado por moitos expertos como o problema aberto máis importante de tódalas Matemáticas non se debe unicamente á súa relación coa Teoría de Números, senón ó feito de que a función zeta de Riemann é o prototipo dunha clase máis xeral de funcións, chamadas L–funcións, asociadas a obxectos alxebraicos (as representacións automórficas) ou aritméticos (as variedades aritméticas).

Falar do problema seguinte nesta relación de Problemas do Milenio resúltame especialmente difícil, xa que son consciente

[35] Riemann tan só escribiu un artigo, de oito páxinas, adicado á Teoría de Números, titulado *"Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse"* ("Sobre o número de números primos menores que unha magnitude dada"), publicado en 1859.

de que neste Salón atópanse membros do Claustro que poderían falar del con moita máis autoridade ca min, e mesmo temo que as miñas verbas non sexan todo o axustadas que deberían, polo que rogo ós meus colegas saiban disculparme.

Ademais, penso que, como acontecía con algúns dos problemas de Hilbert, éste é máis todo un programa de investigación que un problema concreto propiamente dito como tratarei de explicarlles.

Problema 5: A Teoría de Yang-Mills

Galileo (1564–1642) dicía: "O libro da natureza está escrito con caracteres matemáticos"; e Richard Feynmann (1918–1988), Premio Nobel de Física en 1965 polo seu traballo sobre electrodinámica cuántica, abunda nesta idea cando dí: "O universo semella ser indescriptible excepto coa linguaxe das Matemáticas".

A relación entre as Matemáticas e a Física é unha constante ó longo dos tempos, xa que, dende sempre, a máis importante motivación das Matemáticas foi, e segue sendo, a Física, ou, se vostedes o prefiren, o mundo que nos rodea; as estructuras matemáticas son un elemento esencial no desenvolvemento da Física Teórica, e moitos dos problemas nacidos na Física influencian, e mesmo condicionan dun xeito decisivo, o desenvolvemento das Matemáticas. Neste senso, Chen-Ning Yang[36] e Robert L. Mills descubriron, coa formulación hai case cincuenta anos, en 1954, das ecuacións que levan o seu nome, que a Física Cuántica revela unha estreita relación entre a Física das partículas elementais e as Matemáticas dos obxectos xeométricos, relación que está a revolucionar algunhas das áreas máis abstractas das Matemáticas dos nosos días.

Steven Weinberg (1933–...), tamén Premio Nobel de Física

[36] Chen-Ning Yang (1922–...) recibiu, xunto co seu colega Tsung-Dao Lee, o Premio Nobel de Física no ano 1957 polos seus traballos sobre Física de Partículas.

en 1979, ten falado de coincidencias "fantasmais" ou "sorprendentes", xa que, segundo el, resulta sempre sorprendente para un físico que imaxina un novo concepto ou idea o constatar, *a posteriori*, que os matemáticos xa tiñan estado alí con anterioridade. Un exemplo ben coñecido desta situación proporciónanolo a Teoría Abstracta de Grupos.

En esencia, un grupo é, simplemente, unha forma matemática de expresa-la noción de simetría, e cando os físicos descubren a existencia da Teoría Abstracta de Grupos, atópanse con que iso é precisamente o que eles necesitan para unifica-las grandes leis de conservación da enerxía, do momento, do spin, da carga, etc. Pola década dos anos sesenta, os físicos tiñan xa definido moitas destas leis e cada unha delas resulta estar asociada a un determinado grupo de simetrías, o que os levou inmediatamente a estudia-los fundamentos da Teoría Abstracta de Grupos, para deleite dos matemáticos, que a desenvolveran por razóns completamente distintas[37], aínda que os propios matemáticos pronto descubriron que os grupos estan sorprendentemente omnipresentes[38].

Permítanme que faga agora un pouquiño de historia físico-matemática.

Foi arredor de 1864 cando James Clerk Maxwell (1831–1879) escribiu as súas famosas ecuacións do electromagnetismo, extendendo e formulando matematicamente a teoría de M. Faraday sobre a electricidade e o magnetismo, e describindo a

[37] A Teoría Abstracta de Grupos débese o matemático francés Evariste Galois (1811–1832), quen a desenvolveu a principios do século XIX para tratar de resolver un problema puramente matemático e xa clásico por aquel entón: cómo atopa-las raíces dunha ecuación polinómica. A resolución do problema para polinomios de graos 1 e 2 remóntase ós babilonios, 2000 anos antes de Cristo; para os graos 3 e 4 foi atopada no século XVI, para grao 3 por Scipione del Ferro (1465–1526) e Niccolo Fontana (1499–1557, máis coñecido como Tartaglia) independentemente, e por Ludovico Ferrari (1522–1565) para grao 4. Pero a resolución do problema para grao 5 ou superior a 5 tíñase resistido ata entón.

[38] André Weil dixo nunha ocasión: "¡En caso de dúbida, mirade polo grupo!"

electrodinámica en termos de "campos electromagnéticos". Os físicos teóricos simplificaron, arredor de 1900, as ecuacións de Maxwell introducindo o chamado "potencial vectorial", unha especie de estructura matemática engadida ó espacio-tempo 4-dimensional. Aínda que esta estructura resultaba matematicamente aceptable e tratable, era sen embargo insatisfactoria e misteriosa dende o punto de vista físico, xa que aparecía en rexións onde non existía un campo magnético como, por exemplo, no exterior dun solenoide. O misterio foi desvelado gracias á Mecánica Cuántica, nos anos vinte, coa formulación da versión cuántica da teoría de Maxwell, coñecida como Electrodinámica Cuántica.

Pouco a pouco os físicos teóricos comezaron a decatarse de que entre as dúas teorías de Maxwell, a clásica e a cuántica, existía algo en común, e ese algo era a asignación dun grupo a cada punto do espacio-tempo 4-dimensional, grupo que resultaba ser o das rotacións dun círculo. O que aparece así e o que se denomina hoxe unha Teoría "Gauge" Abeliana (Clásica ou Cuántica, segundo o caso).

O éxito das dúas teorías electrodinámicas, clásica e cuántica, levou ós físicos teóricos a propoñerse a pregunta de que ocorriría se fose cambiado o grupo asociado a cada punto polo grupo de rotacións da esfera ou polo grupo de simetrías doutros obxectos de dimensión máis grande; este planteamento deu nacemento ás Teorías "Gauge" Non Abelianas, xa que os grupos implicados son non conmutativos. E no centro desta nova teoría atópanse as ecuacións de Yang-Mills.

Ó igual que facían as ecuacións de Maxwell un século antes, as ecuacións de Yang-Mills describen un certo campo, pero agora este campo está asociado con un grupo non conmutativo moito máis complicado. Falando en termos coloquiais, a Teoría de Yang-Mills é unha forma non abeliana da electrodinámica que fai posible a descripción das interaccións entre as partículas elementais.

O mesmo que no caso da Teoría "Gauge" Abeliana, as ecuacións de Yang-Mills poden ser tratadas dun xeito clásico ou cos métodos da Mecánica Cuántica. En ámbalas dúas direccións apareceron de contado difíciles problemas matemáticos, pero para as aplicacións na Física de Partículas os físicos teñen que seguir o camiño cuántico. De feito, a Teoría de Yang-Mills Cuántica resultou ser excelente para o estudio das chamadas interaccións "febles", que inclúen a radioactividade e as propiedades dos neutrinos, pero os investigadores atopáronse con serias dificultades no referente ás interaccións "fortes", xa que moitos problemas básicos resultaban aínda intratables, como por exemplo o do confinamento dos "quarks", que era un problema central na Física Teórica dos anos setenta.

Pero ¿que estaba pasando, neses anos, do lado das Matemáticas?

Nun primeiro momento os matemáticos tan só se interesaron na versión clásica das ecuacións de Yang-Mills, investigando un caso especial coñecido como as ecuacións de Yang-Mills auto–duais. A formulación da teoría de Yang-Mills utilizando a linguaxe da Xeometría Diferencial, e máis concretamente a linguaxe dos chamados espacios fibrados e da teoría de conexións neles, permitiu o achado dunhas solucións no espacio 4-dimensional ordinario que foron bautizadas co nome de instantóns.

A pesar de que os estudios sobre os instantóns, debidos principalmente ós matemáticos Michael Atiyah e Karen K. Uhlenbeck (1942–...), permitiron resolver certos problemas físicos, sen embargo axudaron pouco para solucionar os problemas centrais que estaban propostos no eido da Física, e nos que a versión cuántica das ecuacións é ineludible.

En 1982, Simon Donaldson[39] abre novos vieiros matemáticos ó aplicar os instantóns e as ecuacións de Yang-Mills auto–duais no estudio das variedades 4-dimensionais xerais, producindo un método para xerar invariantes asociados a estas variedades, invariantes susceptibles de ser usados para a súa clasificación. Os resultados de Donaldson asombraron á comunidade matemática, e dende logo tamén á comunidade física, polo xeito en que introduce a Teoría "Gauge" Non Abeliana no tratamento de problemas puramente xeométricos; pero posiblemente a teoría iniciada por Donaldson, que dende logo interesou inmediatamente ós matemáticos, non houbera tido maior significado para os físicos de non ser pola insistencia de Michael Atiyah sinalando que esta teoría tiña certamente relevancia para a Teoría Cuántica de Campos e viceversa.

O paso fundamental nesta relación prodúcese no ano 1988, cando Edward Witten[40] publica un artigo interpretando a teoría de Donaldson como unha teoría de Yang-Mills cuántica. Ó longo dos anos noventa, os resultados de E. Witten e N. Seiberg, esencialmente interesados na resolución de problemas físicos, provocan sen embargo unha revolución na teoría de Donaldson, puramente matemática, e nos estudios xeométricos das variedades 4-dimensionais. De feito, utilizando ecuacións propostas por Witten, coas que se extenden os invariantes de Donaldson e mesmo os polinomios de Jones[41] da Teoría de Nós, os matemáticos poideron refacer nunhas poucas semanas cousas

[39]S. Donaldson (1957–...), discípulo de M. Atiyah, recibiu a Medalla Fields no Congreso Internacional de Matemáticas de Berkeley no ano 1986. O seu resultado implica a existencia de espacios 4-dimensionais "exóticos", é dicir que existen variedades diferenciables 4-dimensionais que son topolóxicamente pero non diferenciablemente equivalentes ó espacio Euclideo 4-dimensional estándar $\mathbb{R}^4$. O que fai este resultado tan sorprendente é que 4 é a única dimensión en que poden existir tales espacios "exóticos".

[40]E. Witten (1951–...) recibiu a Medalla Fields no Congreso Internacional de Matemáticas de Kyoto no ano 1990.

[41]Vaughan Jones (1952–...) recibiu a Medalla Fields no Congreso Internacional de Matemáticas de Kyoto no ano 1990.

que levaran décadas cos métodos vellos, e mesmo resolveron algún problema aínda aberto.

E aquí nos atopamos, máis ou menos, nestes momentos.

Prediccións baseadas nas ecuacións de Yang-Mills teñen sido verificadas con experimentos de alta enerxía nos laboratorios de todo o mundo (Brookhaven, Stanford, CERN e Tsukuba). Sen embargo, non se coñecen solucións desas ecuacións que describan satisfactoriamente o comportamento de tódalas partículas elementais e que sexan matematicamente rigurosas. En particular, a hipótese do "mass gap", que a meirande parte dos físicos dan por sentada e usan nas súas explicacións da invisibilidade dos "quarks", nunca ten recibido, unha xustificación matematicamente satisfactoria.

A resolución destas ecuacións é importante, como vimos de ver, non só para a Física senon tamén para as Matemáticas e, sen dúbida, os avances na resolución deste problema requerirán da introducción de novas ideas fundamentais tanto por parte da Física como por parte das Matemáticas.

Problema 6: As Ecuacións de Navier-Stokes

As ondas seguen á nosa embarcación cando imos navegando, e as correntes turbulentas de aire seguen ó noso avión cando imos voando. As turbulencias aparecen e interveñen nas situacións máis diversas: movementos atmosféricos, previsións meteorolóxicas, formación das galaxias no universo primitivo, evacuación da calor producida nas reaccións nucleares do interior do Sol, circulación sanguínea, etc. Trátase dun tema fundamental que interesa a matemáticos, físicos e astrónomos, con numerosas ramificacións prácticas en metereoloxía, enxeñería, medicina e mesmo nas finanzas[42].

[42] Os métodos de análise e os modelos utilizados para estudia-las turbulencias producidas por un conxunto de foles serven, ás veces, para estudia-las fluctuacións dos mercados bursátiles.

Físicos e matemáticos cren que unha explicación para estes fenómenos, e para a súa predicción, pode ser atopada a través dunha comprensión completa das solucións das chamadas ecuacións de Navier-Stokes.

As ecuacións de Navier-Stokes son as ecuacións básicas para describir o movemento dos fluídos, e a pesar de que foron descubertas no século XIX, hai máis de cen anos, a nosa comprensión delas segue sendo mínima. O reto que se presenta é facer progresos substanciais cara unha teoría matemática que permita desbloquear os segredos que se agachan nestas ecuacións.

Stephen Smale [13] propón esta cuestión nos seguintes termos: consideremos as ecuacións de Navier–Stokes[43] sobre un dominio no espacio 3-dimensional, ¿admiten estas ecuacións unha solución única para todo t?

Ecuacións relacionadas coas de Navier-Stokes aparecen dun xeito natural na descripción de moitos fenómenos físicos, e ningunha delas semella ser, a primeira vista, moi complicada; todas elas son sistemas de ecuacións diferenciais en derivadas parciais que expresan feitos básicos tales como a conservación da masa, da enerxía e do momento. Pero, como pasa tantas veces, as apariencias enganan.

Matematicamente, a dificultade para a resolución das ecuacións de Navier-Stokes radica no seu termo non lineal. En contextos nos que este termo é moi pequeno, por exemplo cando se describe un fluxo lento de auga por un cano cilíndrico, a non linealidade non é un problema e as ecuacións poden ser

[43] Dun xeito máis preciso, trátase de atopar unha aplicación $u\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^3$ de clase C^∞ (a función u é o "vector velocidade") e unha función $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (a función p representa a "presión") verificando as ecuacións de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - v\nabla u + \operatorname{grad} p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0,$$

onde $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $u \cdot \nabla$ é o operador $\sum_1^3 u_i(\partial/\partial x_i)$, v é unha constante positiva, e u verifica unhas condicións iniciais en $t = 0$ e sobre a fronteira $\partial\Omega$.

resoltas; pero cando o termo non lineal xa non é pequeno, por exemplo se a auga vai a gran velocidade polo cano, non só as técnicas analíticas para resolver as ecuacións fallan, senón que mesmo os métodos númericos para a obtención de solucións aproximadas deixan de ser totalmente fiables. Mesmo no caso claramente máis sinxelo dun fluxo dun fluído en dimensión dous as dificultades que provoca o termo non lineal non desaparecen.

A pesar da falla dunha resposta teórica precisa, a utilización do poder computacional dos ordenadores ten permitido ós investigadores resolver algúns problemas. Por exemplo, os enxeñeiros aeronáuticos reduciron significativamente a necesidade das costosas probas nos túneles de vento; combinando o deseño asistido por ordenador, para face-los modelos xeométricos das superficies, cos métodos numéricos para a simulación aerodinámica, os enxeñeiros poden agora avaliar os deseños preliminares das alas, dos motores, e doutras partes dun avión. Do mesmo xeito, os meteorólogos teñen mellorado a súa capacidade para resolver as ecuacións que lles permiten face-las súas prediccións do tempo, e os estudiosos da contaminación do medio ambiente comprenden mellor o proceso de difusión dun axente contaminante.

Sen embargo, a que se coñece como Dinámica de Fluídos Computacional, por exemplo, é algo máis que facer "correr" o mesmo vello programa nun ordenador máis potente e máis rápido. A meirande parte do progreso que se ten rexistrado neste eido débese ó desenvolvemento de novos métodos matemáticos que permiten, debidamente implementados, que os ordenadores fagan un mellor traballo.

En todo caso, tódolos indicios ou sinais que emanan do triunvirato formado pola teoría puramente matemática, a computación, e os experimentos, coinciden: as ecuacións de Navier-Stokes fan un traballo fantástico na descripción do fluxo dos fluídos en tódolos ámbitos, dende a mangueira para rega-lo xardín ata a explosión dunha supernova.

Pouco máis se pode dicir sobre a importancia de dar resposta a este problema.

Problema 7: A Conxectura de Birch e Swinnerton-Dyer

Dende sempre, os matemáticos están engaiolados polo problema de describir tódalas solucións númericas enteiras x, y, z, das ecuacións alxebraicas do tipo, por exemplo, da ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Euclides deu a solución completa para esta ecuación, en grao dous, pero para ecuacións máis complicadas esta solución resulta ser extremadamente difícil. Recórdese, por exemplo, o tempo que ten sido necesario para poder proba-lo Teorema de Fermat. De feito, en 1970, Yu. I. Matiyasevich (1947–...) demostrou que o Problema 10 de Hilbert[44] non ten solución, é dicir, non existe un método xeral para determinar cando tales ecuacións teñen unha solución enteira.

Pero en casos especiais pódese esperar que algo se poderá dicir. Cando as solucións son puntos dunha variedade abeliana, a conxectura de Birch e Swinnerton-Dyer afirma que o tamaño do grupo de puntos racionais está relacionado co comportamento dunha certa función asociada $\zeta(s)$ nas proximidades do punto $s = 1$. En particular, esta asombrosa conxectura afirma que se $\zeta(1)$ é igual a 0 entón existe un número infinito de puntos racionais (solucións), e recíprocamente, se $\zeta(1)$ é distinto de 0 entón tan só existe un número finito de tales puntos.

[44] No Problema 10, Hilbert propón a cuestión de determinar a resolubilidade da ecuación Diofántica, ou equivalentemente dar resposta á seguinte cuestión: ¿existe un proceso finito polo que se poida determinar se unha ecuación polinómica é resoluble nos enteiros? Matiyasevich deu unha resposta negativa a esta pregunta: tal proceso non existe (Sov. Math., Dokl. **11** (1970), 354–358).

¿MATEMÁTICA PURA OU MATEMÁTICA APLICADA?

Non quero remata-la miña intervención sen adicar unhas verbas á que semella ser unha das grandes disxuntivas ás que se enfrontan as Matemáticas no mundo actual: ¿Matemática Pura ou Matemática Aplicada? Como xa lles relatei ó principio da miña intervención, lembrando verbas de Felix Klein e de Henri Poincaré, non nos atopamos ante un fenómeno producto dos tempos que vivimos, nin moito menos.

Xa Platón se refería a esta disxuntiva nun dos seus escritos, no que se recolle un diálogo entre Sócrates e Plutarco[45], diálogo no que o primeiro, Sócrates, lle pregunta ó segundo, Plutarco: "¿Existen acaso dous tipos de aritmética, a da xente e a dos filósofos? ¿E que me dis da arte das contas ou das medidas, usadas na construcción e no comercio, en comparación coa xeometría filosófica e os cálculos elaborados? ¿Debemos falar de unha ou de dúas?". E Plutarco responde: "Eu diría que cada unha delas son as dúas".

Armand Borel, membro destacado do grupo Bourbaki, dixo nunha ocasión: "As Matemáticas son como un gran iceberg; por baixo da superficie atópanse as Matemáticas Puras, fóra da vista da xente. Por riba da auga está a punta do iceberg, a parte visible que se deu en chamar Matemática Aplicada. A maioría da xente tan só ve esa punta que emerxe sobre a auga e non se decatan de que esa porción que eles ven non existiría sen a outra porción, moitísimo máis grande, que permanece agachada da súa vista por baixo da auga, a Matemática Pura".

Hoxe en día estamos xa afeitos a falar de que hai que elexir entre investigación "pura" ou investigación "aplicada", dos Plans I+D, dos Programas Especiais, das Áreas Priori-

[45] En *"Philebus"*.

tarias, etc., e coido que tal contraposición, "pura" contra "aplicada", é artificial e mesmo perigosa, polo menos no que ás Matemáticas se refire. De feito, unha gran parte do que se adoita chamar Matemática Pura ten a súa orixe en investigación moi práctica, e reciprocamente. E nada impide que algún día, nun futuro quen sabe se moi próximo ou aínda moi lonxano, o traballo realizado nun contexto esencialmente "puro", e por xentes visceralmente tan puras como o foi Godfrey H. Hardy, retorne nun contexto de importante investigación práctica.

Por certo, non podo deixar de preguntarme qué pensaría Hardy, morto en 1947, se hoxe levantase a cabeza e se decatase de en qué medida ten resultado aplicable e aplicada a que el calificaba, xactanciosamente, como "a máis inútil de tódalas ramas das Matemáticas: a Teoría de Números". Porque é un feito indiscutible que a aplicabilidade ou non aplicabilidade dunha determinada teoría matemática é algo absolutamente impredicible. Phillip A. Griffiths, actual Secretario da Unión Matemática Internacional e Director do Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, abunda nesta afirmación ó dicir: "Canto máis fundamental é a Matemática implicada tanto máis ampla resulta ser a súa aplicación".

E frente á actitude extrema representada por Hardy, defendendo o estudio das Matemáticas como unha forma superior do coñecemento humano, independentemente da súa utilidade social, un atópase coa actitude oposta, de acordo coa que tan só se deberían de considerar e estudiar aqueles aspectos das Matemáticas que sexan socialmente útiles. Esta actitude tivo a súa máxima expresión, probablemente, baixo o réxime de Mao na República Popular Chinesa, polo que algúns autores a denominan "Maoismo matemático".

Nun certo momento, baixo o réxime de Mao, declarouse unha moratoria sobre o traballo de investigación científica en xeral, que afectou tamén, naturalmente, á investigación en Matemáticas. Os investigadores foron obrigados a realiza-lo seu traballo de acordo co principio político de que "a investigación científica debe servir á política proletaria, ós traballadores, ós campesiños e ós soldados, e estar integrada totalmente no proceso productivo".

Durante ese período funcionaron en China comités asesores que informaban sobre a importancia da investigación que se facía en áreas e subáreas das Matemáticas, así cómo da súa adecuación ou conformidade con ese principio político; é dicir, sempre baixo o criterio de que a investigación que se realizase debería estar dirixida á resolución de problemas prácticos, ó igual que a súa ensinanza debería basearse en aplicacións concretas. Mesmo se presionou ós investigadores para que abandoasen o traballo en determinadas áreas, como pasou coa Topoloxía por exemplo, áreas que eran consideradas como inútiles para tal obxectivo[46].

Paul R. Halmos[47], coñecido como matemático puro "militante", ó reflexionar sobre as dúas Matemáticas, sinala: "A motivación para un matemático aplicado é comprende-lo mundo e, quizais, cambia-lo. Unha vez fixado un problema, as técnicas para a súa resolución son elexidas e xulgadas pola súa eficiencia; e a satisfacción acádase de acordo co grao de coincidencia da solución obtida coa realidade e da súa utilidade para realizar prediccións. Pola contra, a motivación dun matemático puro é, con frecuencia, simplemente a curiosidade. A elección da técnica para resolver un problema está dictada, ó menos en parte, pola súa armonía co contexto que o rodea, e a satis-

[46]Unha delegación de matemáticos americanos visitou China en 1976, e durante a súa visita tiveron a oportunidade de celebrar encontros informais con matemáticos chineses. No informe sobre a súa visita elaborado pola delegación americana recóllense descripcións das súas entrevistas con estes matemáticos, descripcións que permiten constata-la terrible realidade daquela situación.

[47]En [15], P.R. Halmos, *Applied Mathematics is bad Mathematics*, p. 9–20.

facción é maior en tanto en canto a solución atopada mostre conexións insospeitadas entre ideas ou conceptos que semellaban moi lonxanos os uns dos outros."

Moitos matemáticos puros seguen considerando a súa especialidade como unha arte (o Hardynismo non está morto). Os matemáticos aplicados parecen considera-lo seu tema, ás veces, como unha simple sistematización de métodos.

Para moitos matemáticos puros a Matemática Aplicada non é outra cousa que unha bolsa chea de trucos, sen máis mérito que o de que eses trucos funcionan. Para moitos matemáticos aplicados a meirande parte da Matemática Pura merece ser descrita como unha abstracción sen máis sentido que o seu amor por si mesma e, polo tanto, sen mérito algún.

Este clima ou ambiente de tensión entre a Matemática Pura e a Matemática Aplicada, tan claramente posto de manifesto por estas opinións, non é algo novo, nin tampouco é algo polo que debamos lamentarnos. De feito, esta tensión é unha fonte inesgotable de novas Matemáticas; primeiro a teoría aplícase na práctica e logo esa práctica conduce a unha nova teoría. Esta situación é algo tan vello como a propia Matemática.

E posto que a historia debe servirnos sempre como referente e guía, non resulta aventurado pensar que as aplicacións máis importantes das áreas máis puras das Matemáticas aínda están por chegar, e farano moi probablemente en áreas que non poderíamos nin imaxinar neste momento.

REMATE

E remato xa, pois moito temo ter abusado de máis da súa paciencia, recordando as verbas de tres insignes matemáticos.

Georg Cantor deixou escrito: "A esencia da Matemática é a liberdade".

André Weil, un dos membros fundadores de Bourbaki e sen dúbida un dos matemáticos máis importantes do século XX que agora termina, escribiu[48]: "Para nós, que temo-las costas dobradas baixo o peso da herdanza do pensamento grego e que camiñamos pola senda trazada polos heroes do Renacemento, unha civilización sen Matemáticas é inimaxinable. Ó igual que lle pasou ó Postulado das Paralelas, o Postulado de que "as Matemáticas sobrevivirán" foi desposuído da súa "evidencia"; pero así como o primeiro non é xa necesario, non poderíamos seguir adiante sen o segundo".

E por último, Herman Hankel (1839-1873), matemático alemán do século pasado, escribiu: "Na maioría das Ciencias unha xeración destrúe o que ten edificado a outra, e o que unha estableceu desfaino a outra. Só en Matemáticas cada xeración engade un novo piso á estructura anterior".

A coherencia do edificio matemático sempre provoca asombro, pero pensar ou facer crer que está acabado sería un erro dramático, xa que iso sería negar que as Matemáticas son unha Ciencia e unha Ciencia moi viva, unha dobre verdade moitas veces agachada.

Moitas gracias pola súa atención.

[48] A. Weil, *The Apprenticeship of a mathematician*, Birkhäuser Verlag, Basel 1992.

Referencias

[1]D.J.Alberts,G.L.Alexanderson,C.Reid,*InternationalMathematicalCongresses.AnIllustratedHistory,1893–1986*,Springer-Verlag,Berlin1987.

[2]W.S.Anglin,*Mathematics:AConciseHistoryandPhilosophy*,UndergraduateTextsinMath.ReadingsinMathematics.Springer-Verlag,NewYork,1994.

[3]H.Cartan,*NicolasBourbakiandContemporaryMathematics*,TheMath.Intelligencer**2**(4)1980,175-180.

[4]C.Casacuberta,M.CastelletEds.,*MathematicalResearchTodayandTomorrow*,LectureNotesinMath.1525,Springer-Verlag,Berlin1992.

[5]B.Cipra,*What'sHappeningintheMathematicalSciences*,Vols.**1**(1993),**2**(1994),**3**(1996),**4**(1999),AmericanMathematicalSociety,Providence,RhodeIsland,U.S.A.

[6]P.J.Davis,R.Hersh,*TheMathematicalExperience*,Birkh¨auser,Boston,Mass.,6 ª Ed.1987.

[7]E.DuporqEd.,*CompteRenduduDeuxi`emeCongr`esInternationaldesMath´ematiciens*,Par´ıs,6–12Ao^ut1900,Gauthier-Villars,Par´ıs1902,ReimpresoporKrausReprintLimited,Nendeln/Liechtestein,1967.

[8]P.R.Halmos,*Selecta.ExpositoryWriting*,Springer-Verlag,Berlin1983.

[9]M.Kline,*MathematicsintheWesternCulture*,OxfordUniv.Press,Oxford1971.

[10] M. Kline, *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI de España Eds. S.A., Madrid 1985.

[11] E.R. Phillips, *Studies in the History of Mathematics*, MAA Studies in Mathematics, 26. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1987.

[12] D.E. Rowe, J. McCleary Eds., *The History of Modern Mathematics. Vol. I: Ideas and Their Perception. Vol. II: Institutions and Applications*, Proceedings of the symposium held at Vassar College, Poughkeepsie, New York, June 20–24, 1989, Academic Press Inc., Boston 1989.

[13] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, Math. Intelligencer **20** (1998), 7–15.

[14] L.A. Steen Ed., *Mathematics Today. Twelve Informal Essays*, Springer-Verlag, Berlin 1978.

[15] L.A. Steen Ed., *Mathematics Tomorrow*, Springer-Verlag, Berlin 1981.

ÍNDICE