La ciencia abstracta

José Luis Fernández Pérez

Lección inaugural
Universidad Autónoma de Madrid

Curso 2001-2002

25 de septiembre de 2001

Cuentan que el matemático francés Henri Lebesgue solía relatar la siguiente historia siempre que se le solicitaban unas palabras tras una cena protocolaria.

¿Saben ustedes aquella historia del emperador *Diocleciano, los leones y los cristianos*. El espectáculo central de aquella noche iluminada por miles de antorchas en el Circo de Roma con el Emperador Dicocleciano en el palco de honor era *leones contra cristianos* --indefensos, claro, que si no tiene menos gracia. Los leones fueron despachando a los cristianos uno tras otro sin avatares dignos de mayor reseña hasta llegar al décimo. Para sorpresa general, el décimo cristiano le susurraba algo al oído a cada león que se le acercaba que hacía que éste huyera espantado con el rabo entre las patas. El fervor del público ante aquel alarde de poder mágico obligó a Diocleciano a perdonarle la vida. El Emperador, intrigado, aunque receloso por las posibles implicaciones religiosas, le preguntó al cristiano cuál era la milagrosa fuente de su poder. El cristiano confesó que a cada león le decía que si se lo zampaba tendría que dar un discurso tras la cena.

Año de las Matemáticas

El año 2000 fue en todo el mundo un año de celebración de las matemáticas. Los matemáticos, con el respaldo de la UNESCO, querían resaltar el papel de las Matemáticas en la educación y la cultura, en el conocimiento científico y tecnológico, y como clave para el desarrollo de los pueblos.

Los matemáticos de la Autónoma han participado muy destacadamente en todas las actividades que tuvieron lugar en España con motivo de este Año de las Matemáticas. Y quiero entender que el que el honor de esta lección inaugural recaiga este curso sobre un matemático es una muestra de reconocimiento a esa labor. Gracias, en nombre de todos.

La fascinación de las matemáticas

> Digno de admiración es el número Pi
> *tres coma catorce*.
> Todas sus siguientes cifras también son iniciales,
> *quince noventa y dos* porque nunca termina.

No se deja abarcar *sesenta y cinco treinta y cinco* con la mirada,
ochenta y nueve con los cálculos
setenta y nueve con la imaginación
y ni siquiera *treinta y dos treinta y ocho* con una broma o sea
comparación
cuarenta y seis con nada
veintiséis cuarenta y tres en el mundo.
La serpiente más larga de la tierra después de muchos metros se acaba.
Lo mismo hacen aunque un poco después las serpientes de las fábulas.
La comparsa de cifras que forma el número Pi
no se detiene en el borde de la hoja,
es capaz de continuar por la mesa, el aire,
la pared, la hoja de un árbol, un nido, las nubes, y así hasta el cielo,
a través de toda esa hinchazón e inconmensurabilidad celestiales.
Oh, qué corto, francamente rabicorto es el cometa.
¡En cualquier espacio se curva el débil rayo de una estrella!
Y aquí *dos treinta y uno cincuenta y tres diecinueve*
mi número de teléfono el número de tus zapatos
el año mil novecientos setenta y tres piso sexto
el número de habitantes sesenta y cinco céntimos
centímetros de cadera dos dedos charada y mensaje cifrado,
en la cual *ruiseñor que vas a Francia*
y *se ruega mantener la calma*
y también *pasarán la tierra y el cielo*,
pero no el número Pi, de eso ni hablar,
seguirá sin cesar con un *cinco* en bastante buen estado,
y un *ocho*, pero nunca uno cualquiera,
y un *siete* que nunca será el último,
y metiéndole prisa, eso sí metiéndole prisa a la perezosa eternidad
para que continúe.

Wislawa Szymborska[1]

Cómo no maravillarse, como la poetisa polaca Szymborska, ante los secretos casi insondables de las cifras decimales de Pi. Cómo no admirarse ante la posibilidad de que esas cifras puedan esconder entre ellas todos los volúmenes, escritos y por escribir, en una suerte de Biblioteca Universal. El número Pi, la razón de la circunferencia al diámetro, aparece en todos los rincones de la Matemática, explicando misteriosamente ritmo, forma, azar, flujos, movimiento. ¿Cómo es que esa razón geométrica aparece en la estadística de las poblaciones o en la ley de errores?, se preguntaba asombrado el físico Eugene Wigner.

La Matemática fascina por la elegancia de sus argumentaciones, por la belleza de su edificio conceptual, por la unidad profunda que conecta todos sus objetos y métodos. La Matemática hechiza por la libertad de

---

[1] *El número Pi* de su libro *El gran número, fin y principio y otros,* de Editorial Hiperión

planteamientos que permite y, casi, a que obliga y por el permanente qué pasaría si. Y asombra *the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, que proclamaba Wigner, esa corroboración permanente de que *el libro de la naturaleza está escrito en matemáticas*, que profesaba Galileo

Dicen, y creo, que el propósito de una lección, de una conferencia, es *to uncover a little, not to cover a lot.* Y va a ser mi propósito en ésta lección compartir esa fascinación por la Matemática, la ciencia abstracta, con ustedes. No será una visión imparcial, pues he de reconocer que soy causa perdida: casi toda la matemática me resulta asombrosa y seductora, y, sin poder evitarlo, la percibo, o al menos eso creo, en todas partes, como por ejemplo, en este artículo de Juan José Millás.

> Dios, que es digital, creó la realidad analógica por la misma razón por la que nosotros hemos creado Internet: por enredar. [...]. Dios sólo es responsable de la puesta en marcha. Lo demás se dio por añadidura y Él fue el primero en extrañarse del modo singular que eligieron los mamíferos para reproducirse o las jirafas para llegar a la copa de los árboles. Cuando fabricas un calidoscopio, tampoco hay forma de predecir todas sus combinaciones posibles.
>
> Con la misma extrañeza con que observaba Dios la realidad analógica, construida por Él mismo, nos asomamos ahora a la realidad virtual, hecha a nuestra imagen y semejanza.[...] Más que una realidad, hemos creado una lógica con capacidad para desarrollarse por sí misma, aunque la abandonáramos ahora mismo a su suerte. Dios tampoco necesitó crear los lunes ni los martes ni los miércoles... Desde el momento en el que te inventas el domingo, el resto de la semana sale del huevo fecundado con cara de haberse confundido de estación. [...]
>
> *Juan José Millás*[2]

Tendré que hacérmelo mirar.

Imagen de los matemáticos

Hablar sobre lo fascinante que pueda resultar esta ciencia abstracta, esa ciencia abstracta, no es tarea fácil. La precisión y la disciplina que exige el manejo del lenguaje matemático, sobre todo cuando se refiere a los propios objetos matemáticos en sí, y no al papel de estos objetos como modelos para la ciencia, suelen crear cierto rechazo. Y es que con frecuencia a la Matemática se la ve simplemente como una serie de reglas de cálculo que se aplican en situaciones estereotipadas y a los matemáticos tan sólo como

[2] *Génesis*, publicado en el diario El País el 26 de Enero de 2001

pulidores de esas reglas que artesanos pretéritos confeccionaron en su día, gente hábil para los números y que sabe un montón de fórmulas.

He aquí unos pocos ejemplos de cómo se ve a los matemáticos, que no a la Matemática. El primero es de Lichtenberg, catedrático de Química y, creo que también de Matemáticas, en Gotinga en el siglo XVIII, pero conocido sobre todo por su libro de *Aforismos*, una joya de la literatura alemana.

> Las Matemáticas son una ciencia excelente, pero los matemáticos no suelen valer ni un ardite. Ocurre con las Matemáticas casi lo mismo que con la Teología. Así como quienes se consagran a esta última pretenden, sobre todo si ocupan cargos públicos, gozar de cierto crédito especial de santidad y una mayor afinidad con Dios, aunque muchos de ellos sean auténticas nulidades, también los denominados matemáticos exigen a menudo que se los tenga por pensadores profundos, aunque entre ellos abunden los mayores zopencos que encontrarse pueda, ineptos para cualquier trabajo que no pueda reducirse sin más ni más a aquella fácil combinación de signos que es obra más de la rutina que del pensamiento.[3]

Lichtenberg, por cierto, escribió hace más de doscientos años un memorando en que proponía un sistema de tamaños de papel en el que una hoja de un tamaño, digamos A4, se obtuviera juntando dos del tamaño siguiente, pongamos que A5, con la propiedad adicional de que todos los tamaños tuvieran la misma proporción de lado corto a largo; en otras palabras, Lichtenberg recomendaba el uso del actual el sistema DIN. La proporción constante de todos los tamaños DIN es la de 1 a raíz de 2, razón por la que, si se fijan, en muchas fotocopiadoras aparecen botones especiales para la magnificación al 141% y la reducción al 71%.

Los matemáticos suelen sentirse particularmente particulares. Nos dice André Weil, un grande de la matemática del siglo XX:

> El matemático seguirá su camino en la seguridad de que podrá saciar su sed en las mismas fuentes del conocimiento, convencido de que éstas no cesarán de fluir, puras y abundantes, mientras que los demás habrán de recurrir a las aguas cenagosas de una sórdida realidad.
>
> Si se le reprochase al matemático la soberbia de su actitud, si se le reclamase su colaboración, si se le demandase porque se recluye en los altos glaciares a los

[3] De su libro *Aforismos*, editorial Edhasa

> que nadie, salvo los de su clase, le pueden seguir*, él contestará, con Jacobi: Por el honor del espíritu humano.*[4]

Y como si acabara de leer a Weil, David Ruelle, físico y matemático actual, nos explica

> Puede resultar útil pensar en los rasgos de carácter --orden, parsimonia, obstinación—que son comunes entre los científicos, en especial, entre los matemáticos, y que les son útiles. Freud relacionó tales rasgos de carácter con la predisposición a la neurosis obsesiva y al estadio sádico-anal de la evolución de la libido.[5]

Pero, ¡basta ya!; no hace falta que suministremos más argumentos a la tan dañada imagen de la personalidad de los matemáticos.

El tono cambia y mucho, como no podía ser de otro modo, cuando se habla de la ciencia matemática, transformándose al cabo en uno de admiración sin descuento. Esto dice el filósofo de la ciencia, Jesús Mosterín[6]

> La matemática es la más grande aventura del pensamiento. En otras actividades también pensamos, obviamente, pero contamos además con la guía y el control de la observación empírica. En la matemática pura navegamos por un mar de ideas abstractas, sin más brújula que la lógica.
>
> Jacobi pensaba que la finalidad única de la matemática consiste en honrar al espíritu humano. Por otro lado, la matemática y el pensamiento abstracto impregnan toda la ciencia y la tecnología actuales. Desde la cosmología hasta la economía, nuestro conocimiento de la naturaleza y de la sociedad sería inconcebible sin las matemáticas. A diferencia de la ciencia antigua, que buscaba una comprensión cualitativa de los fenómenos, la ciencia moderna se basa en la construcción de modelos teóricos, es decir, matemáticos, de la realidad. La realidad es excesivamente compleja para poder ser directamente comprendida por nuestras limitadas entendederas. Lo único que podemos hacer es buscar en el universo matemático una estructura que se parezca en algún aspecto relevante a la porción de realidad por la que nos interesemos, y usar esa estructura como modelo teórico simplificado de la realidad. Una vez que disponemos de un modelo teórico, podemos traducir al lenguaje de las matemáticas las preguntas que nos hacemos en la vida real, podemos computar la respuesta dentro del modelo y, finalmente, podemos retraducir esa respuesta matemática al lenguaje de la vida real**.**

Y esto otro lo que nos explica el astrofísico, y magnifico divulgador científico, John Barrow

---

[4] Esta cita procede de un artículo publicado en 1950, aunque escrito unos años antes, sobre el porvenir de la Matemática.

[5] De su libro *Azar y caos*, Alianza Editorial

[6] En el prefacio de su libro *Los Lógicos*, editorial Espasa.

> Vista como la galería de todas las pautas, la matemática es algo infinitamente más grande que la ciencia. La ciencia necesita sólo parte del calidoscopio de las pautas posibles para descifrar el universo físico. [...] con frecuencia ha ocurrido que las pautas que los matemáticos investigaban por razones puramente estéticas desempeñaban un papel clave en la estructura del mundo físico.

La ciencia abstracta

R. Hersch define, con particular acierto, a la Matemática como

> la ciencia de objetos virtuales con propiedades reproducibles

virtuales más como potenciales que como irreales. No está mal. La Matemática primero es una ciencia, como las demás, y segundo, específico a la Matemática es que sus objetos de estudio directo son ideales y virtuales. Así que es una ciencia *abstracta*.

Piénsese en esa definición. Siempre que en una ciencia se cree un modelo, es decir, una idealización de una realidad, sus componentes serán necesariamente virtuales, y su manipulación, inevitablemente matemática. Con frecuencia ese modelo será una réplica o un caso concreto de otros para los que ya se ha desarrollado todo un lenguaje matemático, pero en ocasiones el modelo necesariamente abstracto, planteará retos nuevos sobre su manipulación matemática.

Y es en esa capacidad de hacer ciencia de lo abstracto donde reside el inmenso poder de la Matemática como lenguaje de la ciencia. No es paradoja. Entendemos lo concreto abstrayendo su esencia en una noción ideal. Y en Ciencia es la Matemática quien nos permite este proceso.

Si yo pido que imaginemos una esfera, nadie tiene dificultad en visualizarla en su mente. Pero las esferas no existen como realidades físicas, aunque *haberlas haylas*. Son muchos los objetos físicos que se aproximan al objeto ideal de esfera, pero ninguno lo es *exactamente*. El poder de las matemáticas reside en la capacidad de manipular esos objetos ideales.

Un día, en Zaragoza, cuando algunos alumnos de tercero esperábamos para entrar en clase, se acercó un hombre de aspecto campesino, boina incluida, con un ejemplar del *Heraldo de Aragón* en una mano y una cinta métrica, de esas de sastre, en la otra. Quería consultar una cierta dificultad matemática. Condescendientes, nos dispusimos a escucharle. El teorema de

Pitágoras no es cierto –nos dijo. Sonrisas. No le importaron, estaba acostumbrado. Impertérrito, extrajo con cuidado, casi con mimo, una de esas hojas-sábanas del *Heraldo* y la extendió en el suelo. Midió la diagonal con la cinta, anotó en el margen de la hoja del periódico el resultado en centímetros con su decimal correspondiente, y calculó su cuadrado, mientras como en letanía murmuraba *cuadrado de la hipotenusa*. Repitió lentamente, como para que pudiéramos seguir sus cálculos, la operación con cada uno de los lados, para luego sumar los resultados, musitando *suma de los cuadrados de los catetos*. Triunfante nos miró, y mientras señalaba los dos resultados sentenció: *no son iguales*. Nos reímos, pero la expresión de su cara seguía demandando respuesta. Que si la cinta, que si irregularidades del papel, que si precisión y decimales –se le dijo. Nada le convencía. Allí dejó la hoja. Y se marchó, muy digno y sin despedirse.

Pero tenía razón. El teorema de Pitágoras no es cierto, salvo en el mundo ideal los objetos matemáticos. Los triángulos rectángulos no existen, salvo ... . Tenía razón.

La Matemática es una metáfora de la realidad y no al revés,[7] por supuesto. Pero las nociones ideales de la Matemáticas, los números, las esferas y los triángulos, las estructuras y los espacios, adquieren corporeidad, están ahí para que virtualmente estudiemos su ideal realidad.

La matemática como ciencia ...

En la Matemática uno crea objetos nuevos, los relaciona con otros ya existentes, investiga propiedades comunes a varios de ellos, los engloba en una teoría que los explica, perfila detalles de esas teorías, dirime cuestiones sutiles sobre bajo qué supuestos se tiene tal o cual propiedad.

Pero ¿qué guía esas búsquedas, esas investigaciones?

Siempre hay un sentido estético de perfección de las teorías, una permanente aplicación de la navaja de Occam: cuanto más simple es la explicación de una serie de fenómenos y cuanto mayor sea su rango de aplicación, mejor. Vienen a colación dos dichos que manejan los matemáticos, *el trabajo pionero nunca es elegante*, pero *no hay lugar permanente para las matemáticas feas*.

[7] Como recordaba Joaquín Estefanía recientemente al escribir acerca de cierta polémica venida de Francia sobre una excesiva cientifización de la Económica.

Mueve el reto de saber, de ser el primero en saber, de resolver cuestiones con solera que nadie antes ha sido capaz de dilucidar. Las conjeturas matemáticas son, con frecuencia, casi retos caballerescos. Schrödinger, el gran físico, recordaba con nostalgia aquellos momentos de profundo goce, sólo en la cima, en posesión exclusiva de un nuevo saber, sabiendo que entendía como nunca nadie antes un porqué de la naturaleza.

Y, por último, y no menos importante que los anteriores, mueve el deseo de entender, de explicar con modelos realidades complejas de la naturaleza o de la sociedad.

Fuerzas, pasiones que impulsan la investigación matemática, aunque no por igual a todos los matemáticos. Los hay que se dejan llevar por la pasión por resolver y plantear problemas explícitos y aquellos que prefieren sobre todo la creación y desarrollo de teorías que engloben las soluciones de esos problemas. Los hay que gozan con la artesanía de los detalles técnicos intrincados y los que disfrutan más con demostraciones lo más compactas y sintéticas posibles.

En matemáticas, como en las demás ciencias, uno investiga mediante ensayo y error, se pierde en caminos sin salida, descarta teorías, etc., Da igual que sus objetos sean abstractos, la práctica es la misma que en todas las ciencias. Pero luego, una vez encontrado el camino, éste ha de quedar plasmado en una demostración.

... y como lenguaje

Thurston, medalla Fields, definía las matemáticas como una suerte de *software* mental. Sylvester, más romántico, prefería definirlas como la música de la razón.

Las matemáticas son un lenguaje. Un lenguaje diseñado para descubrir y describir patrones. Y ¿no es el objetivo de la ciencia la búsqueda de patrones que permitan explicar fenómenos? Explicamos cuando encontramos simetrías, estructuras, patrones que se repiten, que permanecen, y entendemos cuando logramos organizar esas pautas a partir de sencillos principios. Pero esos patrones son matemáticos y el lenguaje para analizarlos y combinarlos, para aplicarlos y obtener conclusiones es la Matemática.

La demostración. Certeza eterna

El conocimiento matemático se estructura alrededor de la demostración. Partimos de unas verdades, los axiomas, y con argumentos lógicos, inapelables, que hay que aplicar con rigor y disciplina sin concesiones se van construyendo sucesivas conclusiones.

Se trata de conocimiento que una vez establecido es inamovible y permanente, absolutamente cierto y definitivamente eterno. Nada menos.

Es frecuente que los matemáticos digan que una de las cosas que les atrajeron a la Matemática es la certeza. Certeza en las conclusiones y libertad en los planteamientos; libertad para moverse y certeza de haber llegado.

Einstein afirmaba, por el contrario, que esa combinación de libertad y certeza le habían alejado de la Matemática. En Matemática –decía– uno puede abrir camino y puede preguntarse, por ejemplo, que pasaría si tuviéramos dos dimensiones y media, o si ... . Hay libertad para plantearse nuevas situaciones, cambiar los axiomas o las hipótesis, y ver qué pasa. Luego todo tiene que cuadrar. Y sólo el paso del tiempo, las conexiones con otras cuestiones y la profundidad de los argumentos determinarán si el camino abierto es de interés o no. No se sabe *a priori* si es interesante o no, a cambio tiene la confianza en la certeza lógica de las conclusiones. En Física, argumentaba Einstein, los problemas están determinados, con interés intrínseco, los grandes problemas, al menos. Y, claro, las conclusiones no son inevitables.

Decía G. Hardy al respecto,

> Inmortalidad es tal vez un término estúpido, pero quizás un matemático posea las mayores probabilidades de alcanzarlo, sea cual sea su significado.

La demostración exige disciplina sin concesiones. Un teorema ofrece una conexión lógica sin fisuras para, a partir de unas hipótesis concretas y perfectamente delimitadas, alcanzar una conclusión. La conclusión del teorema es entonces inapelable. Pero si queremos aplicar el teorema, hemos de asegurar primero que se cumplen exactamente las hipótesis. No valen ambigüedades, el precio de la certeza en las conclusiones se paga en la precisión sin veleidades de las hipótesis.

Es éste un aspecto de la Matemática que irrita con frecuencia, y en muchos casos con razón, a los científicos e ingenieros, y al público, en general, en su relación con los matemáticos. Justo a lo que aludía Lichtenberg. En el *Cándido,* Voltaire ironiza, parece que mofándose de Maupertius, sobre un matemático que respondía al problema de por qué ciertas ovejas tenían la lana roja, que *por A más B, menos C, dividido por Z, que la lana debe ser roja y las ovejas han de morir de sarna.* O aquella historia de aquel informe de un grupo de matemáticos que investigaba como mejorar la producción lechera y que comenzaba con un *supongamos que las vacas son esféricas...*

Cuentan que un día un caballero inglés paseaba por el campo y cuando se entretenía en observar el vuelo de unos gorriones divisó un globo desde donde otro caballero, inglés también, cabe suponer, le hacía señales para que se acercara. Así lo hizo.

—Gracias. Por favor, ¿dónde estoy?—le preguntó el del globo.

Tras reflexionar un poco el de tierra le contesta.

—En un globo.

Perplejo, el del globo, tras mirar resignadamente al cielo, le dice:

—Usted es matemático, ¿verdad?

Más perplejo aún, el de tierra se quita el sombrero, se rasca la cabeza, y le pregunta:

—¿Cómo lo ha sabido?

—Muy sencillo, me ha dado usted una respuesta absolutamente precisa y perfectamente inútil.

Los matemáticos suelen ser un tanto inflexibles, intransigentes dirían algunos; en lo que atañe a su ciencia; deformación profesional. No es inusual que un científico o un ingeniero busque la colaboración de un matemático para dar estructura a un problema o para avanzar en su modelización, y es entonces frecuente que tropiece con una exigencia de precisión en las nociones y en las definiciones que detiene en seco la posible colaboración.

Es una pena. Mucho gana la Matemática de su colaboración con las otras ciencias. Decía Luis Caffarelli, doctor *Honoris Causa* por esta universidad, en una reciente conferencia en Madrid:

> Hay muchos científicos que en su trabajo están creando matemáticas muy interesantes. Los matemáticos, aportando técnica y formalización, clasificarían y mejorarían todo ese trabajo, si se involucraran abiertamente. Es un reto.

La indispensable exigencia de rigor en los desarrollos matemáticos es perfectamente compatible con la flexibilidad de su aplicación en la ciencia y en la ingeniería.

Lo imposible

La ciencia abstracta resplandece en el tratamiento de lo imposible. La matemática como ciencia de objetos virtuales se adapta perfectamente a tratar con el universo de todas las posibilidades, de todo lo concebible, de todo lo abarcable con unas reglas, para, al tiempo, discernir lo que queda fuera, lo que no es posible, lo que no se puede abarcar.

Decía Ulam, el matemático polaco que tan importante papel desempeñó en el desarrollo del proyecto Manhattan,

> Por desgracia, en Física casi no hay demostraciones de imposibilidad. En Matemáticas, por el contrario, las demostraciones de imposibilidad constituyen algunos de los ejemplos más hermosos de lógica pura.

Porque al intentar determinar si algo es imposible, sea lograr una transformación, alcanzar una frontera o diseñar un procedimiento, necesitamos abarcar todo el conjunto de posibilidades tangibles o no, existentes o por existir, concebidas o concebibles, un universo abstracto de contingentes, y manipularlos, argumentando con ellos. Pero, atención, científicamente, es decir, matemáticamente.

El imposible del que tratamos aquí no es un imposible cualquiera, es el imposible matemático, imposible sin paliativos. No aquél de Lord Kelvin sentenciando la imposibilidad de volar con máquinas más pesadas que el aire, o de Hegel elucubrando sobre la imposibilidad metafísica de la existencia de un séptimo planeta.

En realidad, la gente tiene muy claro lo que significa un imposible matemático, qué si no, significa ser matemáticamente campeón de liga, que, a no dudarlo, debe ser distinto de ser simplemente campeón de liga. Pero la mejor definición de lo matemáticamente imposible, una que es absolutamente imposible de mejorar, es

Lo que no puede ser, no es, y además, es imposible.

de *El Gallo*, según unos, o de *El Guerra* según otros, que hasta para esto doctores tiene la Iglesia. ¿Cabe definición más rotunda? Quizás sí. Captó la esencia del asunto, críptica e insuperablemente, en variación sobre un tema anterior y en tan sólo dos palabras:

In Posible

el inefable Jesulín de Ubrique.

La Matemática nace en Grecia generando imposibles. Cuenta la tradición que los atenienses alarmados ante la creciente virulencia de una epidemia decidieron peregrinar al oráculo de la cercana isla de Delos en busca de consuelo y consejo. Y que se llevaron como penitencia redentora la misión de construir un altar de forma cúbica que duplicara exactamente en volumen el ya existente en Delos. Y lo de exactamente iba en serio, tan en serio como la libra de carne sin sangre de *El mercader de Venecia.* Y casi tan difícil, porque había que lograr la proeza armados sólo con una regla (sin marcas y sin posibilidad de marcar) y de un compás. Se trataba de librarse de una epidemia atroz, indudable castigo, que no se saldaría con una simple hecatombe festiva.

Lo de la regla y compás debió gustar, ya puestos, y los griegos, en alarde de generalización matemática, se propusieron además: cuadrar el círculo y trisectar los ángulos. Es decir, hallar procedimientos que, con el sólo uso de esos instrumentos, permitieran hallar un cuadrado de área exactamente igual a la de un círculo, y la dividir cualquier ángulo en tres ángulos iguales. Lo de la cuadratura del círculo, tan sonoro y equívocamente sugerente, ha pasado al lenguaje ordinario como paradigma de lo extremadamente difícil.

¡Y tanto!, porque los tres **problemas délicos** buscan procedimientos que no existen. Es imposible cuadrar un círculo.

Y no fue fácil. Se tardó dos mil años, nada menos, en verificar esa imposibilidad. A pesar de la popularidad de estos problemas, y de su larga historia, los héroes finales son desconocidos fuera de los círculos matemáticos: Wentzel y Lindemann.

Pero, ¿cómo puede uno demostrar esa imposibilidad? Porque no se trata de argumentar por aburrimiento, descartando uno tras otro incontables candidatos voluntaristas. Hay que demostrarlo, y eso es Matemática.

La Matemática se enfrenta a lo imposible en una suerte de gambito total, como diría Hardy, ofreciendo en la argumentación lógica todo el terreno al contrario, y dando por sentado que sí que es posible de alguna forma indeterminada, la que sea, para luego de un plumazo desbaratar todas las posibilidades.

¿Se puede transformar? Pongamos que nos interesa transformar una cosa A en otra B, con reglas perfectamente definidas. Una vez convencidos tras numerosas pruebas de que quizás sea imposible lograrlo, ¿cómo lo demostramos? Buscando un invariante. Un **invariante** es una característica que se conservaría inmutable tras cada una de las transformaciones que se ajusten a las reglas señaladas. Si A tiene esa característica pero B no, entonces ya tenemos garantizada la imposibilidad de la transformación de A en B.

Veamos un ejemplo, un **juego**. Tenemos un tablero 4 por 4, con 16 casillas. En esas casillas ponemos fichas, negras por un lado y blancas por el otro. Y ahora jugamos con ellas. Al principio, disponemos fichas en las 16 posiciones, unas por su lado negro y otras por su lado blanco. En cada paso escogemos dos casillas vecinas, y a las dos fichas de esas casillas les damos la vuelta. Queremos llegar a que todas las fichas aparezcan por su lado blanco. ¿Cómo hacerlo, si al principio hay 5 fichas en blanco y las restantes 11 en negro?. Pues nada, no se esfuerce, es imposible. Necesitamos un invariante. Fijémonos en el número de fichas blancas. En cada paso, dos fichas cambian de color. Si las dos cambiadas son blancas, el número de blancas decrece en dos, si una es blanca y la otra negra, el número de blancas permanece igual, y si las dos elegidas son negras, entonces aumenta en dos. En cada paso, pues, el número de blancas sobre el tablero, aumenta en dos, disminuye en dos o no cambia. Pero eran 5 al principio, tras el primer paso serán 3, 5 o 7, tras el segundo podrán ser 1, 3, 5, 7 o 9. Siempre un número impar. El invariante es la paridad del número de blancas. No podemos alcanzar el objetivo de 16 blancas, porque éste es par.

Este ejemplo no es sólo un juego. Piénsese que la disposición de las fichas podría representar el estado de un sistema, los blancos y negros codificarían información binaria de sí o no, y las reglas del juego serían las reglas de posibles evoluciones del sistema.

Pero no abandonemos el ámbito del juego. Sam Lloyd era un americano del siglo XIX que se dedicaba a diseñar **pasatiempos matemáticos**. Entre sus más afamadas creaciones se encuentra un juego que todos hemos visto alguna vez. Tenemos como antes un tablero 16 casillas cuadradas. En ellas hay 15 fichas cuadradas que se pueden deslizar, si hay espacio para ello, arriba, abajo a derecha o a izquierda. Las fichas están numeradas del 1 al 15 y en la disposición original las 12 primeras ocupan las tres primera filas en su orden natural. Las tres últimas se hallan en la última fila, y de izquierda a derecha son la 13, la 15 y la 14, y por último, en la esquina, la casilla vacía. El objetivo del juego es pergeñar una sucesión de movimientos que permita llegar a la distribución natural en la que en la última fila aparezcan de izquierda a derecha, la 13, la 14, y la 15 y luego el espacio vacío. Lloyd patentó y comercializó el juego, y prometió el pago de un sustancioso premio económico para quien lograra la transformación deseada ajustándose a las reglas establecidas, es decir, sin impaciente solución de tipo nudo gordiano. El juego se hizo muy popular y Lloyd ganó mucho dinero porque como el perspicaz lector habrá, sin duda, imaginado lo exigido por Lloyd era imposible. El invariante aquí es más complejo: la signatura de la lista, que puede ser par o impar. Las transformaciones permitidas conservan la signatura y la disposición inicial es de signatura impar y la disposición objetivo es par.

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**15**	**14**	

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	

Los mapas perfectos. Todos sabemos que los mapas de la tierra no son perfectos, siempre aparecen distorsiones. En la representación usual de Mercator, los países nórdicos, por ejemplo, aparecen desmesuradamente grandes. Todas las representaciones planas de la Tierra están distorsionadas, lo que invita a pensar que quizás sea imposible representar bien la Tierra en un mapa. Precisemos, para poder argumentar

matemáticamente. Queremos representar un trozo de la superficie de la Tierra, es un mapa, pero de manera que haya una escala única, la misma en todas partes y en todas direcciones.

Fue el gran Gauss, al que aquí vemos representado en los billetes de 10 marcos alemanes, ya a punto de perder su legalidad de curso, en su retrato más famoso, en actitud un tanto desafiante, quien demostró que tal representación era imposible. La clave, el invariante en cuestión, es la curvatura. Un concepto técnico. La Tierra se curva siempre en la misma dirección, digamos que hacia adentro. Se dice que tiene curvatura positiva. Una patata *Pringle*, o una silla de montar se curva en direcciones opuestas, se dice que tiene curvatura negativa. Una hoja de papel sobre la mesa, un mapa, no se curva, tiene curvatura cero. Pero, una columna (cilíndrica) también tiene curvatura cero, se curva siempre hacia un lado, pero en una dirección no se curva. La curvatura no es sólo un signo además es una cantidad, un balón de fútbol está más curvado que la Tierra, por que su radio es menor, pero eso no nos concierne aquí. Lo que Gauss demostró, y tan satisfecho quedó con su logro que el mismo lo denominó Teorema Egregio, es que si se transforma una superficie en otra de manera que todas las distancias sobre una superficie se corresponden con distancias en la otra en una escala fija, es decir, si por ejemplo, todas las distancias quedan dividas por 1000, una escala de 1:1000, entonces el signo de la curvatura se conserva. La Tierra es de curvatura positiva, un plano sobre la mesa tiene curvatura cero. ¡Imposible!

Seamos realistas, pidamos lo imposible o *Lo perfecto es enemigo de lo bueno*. Pidamos, por ejemplo, para empezar, que nuestro **sistema de impuestos,** deba ser progresivo, en el sentido de que la tasa de impuestos para las rentas más altas sea mayor que para las rentas bajas, y que además sea equitativo con las familias, es decir, que el total de impuestos que una matrimonio pague por sus rentas sea independiente de si hace la declaración conjuntamente o por separado. Parece una buena idea. Incluso es una idea tan buena que podríamos proponer una ley para que así sea, dejando para los técnicos el diseño de las adecuadas tasas de impuestos que cumplan esos requisitos

Pero, no, tanta perfección es imposible. Un sistema de impuestos con *tantas* virtudes es imposible.

Un ejemplo lo aclara enseguida. Si las rentas de 100 se gravan al 10%, las rentas de 200 se habrán de gravar a un tipo más alto, digamos que 15%. Pero entonces un matrimonio donde uno gana 200 y el otro 0, pagaría, 30 y uno que tiene rentas de 100 y 100 y que hiciera la declaración por separado, pagaría 20.

Simplemente, no puede ser, las dos virtudes deseadas son incompatibles. Las matemáticas ponen un límite y hay que optar, políticamente, socialmente, por una u otra.

Pero, ¿qué preferencias tiene una comunidad? ¿Existe el interés nacional? Si conocemos las preferencias de los miembros de una comunidad ante ciertas alternativas, ¿habría forma de obtener a partir de estas preferencias individuales algo que pudiéramos llamar las preferencias de la comunidad?

Supongamos que cada individuo ordena tres alternativas, A, B, C por orden de preferencia. Habrá individuos que prefieran A a C y esta a B, por ejemplo, mientras que otros individuos optarían por otra ordenación de esas alternativas.

Querríamos entonces determinar un orden de preferencia de las alternativas que pudiéramos decir que representa a toda la comunidad. Ese orden comunitario debería respetar las ordenaciones individuales, cualitativa y cuantitativamente: 1) si todos los individuos prefieren A a C entonces la comunidad también prefiere A a C, y 2) si todos prefieren A sobre C, pero ahora cambian de opinión sobre otras alternativas pero mantienen el *ranking* individual de A y C, entonces los *rankings* comunitarios de A y C deben mantenerse. En otros términos, la segunda exigencia pide que el sistema sea independiente de alternativas irrelevantes.

K. Arrow, premio Nobel de Economía, demostró –efectivamente, lo han adivinado– que la elección social es imposible, o, en términos menos dramáticos, que no existe ningún procedimiento de elección social que se ajuste a las exigencias señaladas. Lo que se afirma es que sea cual sea el sistema general de elección social que se concibiese, hay una comunidad, una serie de alternativas, unas ordenaciones de esas alternativas por parte de los miembros de la comunidad, de manera que cuando se aplica el procedimiento el resultado no es un ranking.

Por ejemplo, supongamos que nuestro procedimiento de elección social es tan simple y natural como fijarse en cada par de alternativas y decidir que la comunidad prefiere a A a D si más gente pone a A por delante de D que a D por delante de A. No es mala idea, pero miremos las siguientes preferencias de una comunidad de 100 personas en la que

40 ordenan	A > C > B
35 ordenan	B > A > C
25 ordenan	C > B > A

Como 75% de los miembros de la comunidad prefieren A a C este sistema proclama que A es preferible a C para la comunidad, pero también pone a C por delante de B y a B por delante de A. Es decir, no ordena, no permite concluir.

Este es un teorema matemático, los términos son precisos, se trata de permutaciones, de funciones que llevan permutaciones en permutaciones y de ciertas propiedades de monotonía. Y lo que se demuestra es que para cualquier procedimiento que se pergeñase siempre habrá una comunidad con un conjunto de preferencias individuales de las que no se puede concluir una lista de preferencias que represente a toda la comunidad.

De nuevo, no hay sistema perfecto, los hay buenos, y tenemos que optar entre ellos. Aunque, si queremos que sea una decisión de la comunidad, quizás tengamos primero que decidir con qué sistema imperfecto decidimos nuestra elección del sistema menos malo, ...

Dejémoslo aquí, no sin antes señalar, en honor a la precisión, que hay una excepción; hay un procedimiento de decisión colectiva que si que tiene todas las propiedades exigidas aunque, en realidad, no tiene virtudes, ni es de elección ni es social.

No hay tampoco ningún **sistema electoral**, es decir, ningún procedimiento de asignación de escaños en función de porcentaje de votos que cumpla unas cuantas exigencias naturales. Por ejemplo, querríamos que más votos se traduzcan siempre en más escaños, que, como sabemos, no siempre ocurre en nuestro sistema electoral. Hay muchos sistemas electorales, ninguno perfecto. Esto nos lo afirman las matemáticas. Hay que optar entre distintos sistemas imperfectos, entender claramente las implicaciones de su uso y decantarse por uno.

Cantor, Gödel y Turing. **Los límites del conocimiento**. En un artículo fin de siglo la revista norteamericana Time encuestaba a intelectuales y científicos sobre los principales logros de la Ciencia en el siglo XX. La única representación de la matemática en esa lista era debida justamente un resultado de límites y de imposibilidad.

Kurt Gödel y Alan Turing, a quienes vemos en las ilustraciones, uno con un amigo en un parque y otro con el pie en el estribo dispuesto a subir a un tren, y otros varios, pusieron límites, no a la capacidad de raciocinio sino a la capacidad de organizar conocimiento y también al alcance de los algoritmos y de la computación algorítmica. Nada menos.

George Cantor, a finales del siglo XIX, al desarrollar su teoría de conjuntos de los tamaños y los órdenes infinitos, descubrió un hecho fascinante. El continuo, es decir, todas las distancias imaginables, digamos que entre distancia 0 y distancia 1, no se puede numerar. Es decir no podemos hacer una lista con todas esas distancias. Uno creería que sí, pero, una vez más, no, es imposible. El argumento de Cantor, que se conoce como argumento diagonal, por razones que pronto quedarán claras, es magníficamente elegante. Primero, ¡gambito a la totalidad!, supongamos que sí es posible, y que de alguna forma hemos podido confeccionar una lista con todas esa distancias. Pongamos que la lista es la siguiente (el argumento con cualquiera otra lista sería exactamente el mismo).

0.**3**8761544233456...
0.8**7**264544320012...
0.34**5**623498
0.314**9**5169299987...
0.2789**3**452221001...
....

Y así sucesivamente, se supone que hasta abarcar todas las distancias. Los decimales de algunos de estos números seguirían indefinidamente, mientras que los de otras se pararán.

Pero, fijémonos en la diagonal; los dígitos que hemos destacado. Nos dan la distancia:

$$0.37593....$$

y ahora cambiamos cada dígito, por ejemplo, sumándole uno (si es un 9, ponemos un cero) y obtenemos:

$$0.48604....$$

¡Voilá! Esta distancia no está en la lista, porque no es la primera (tiene un dígito, el primero, distinto), ni la segunda (tiene un dígito, el segundo, distinto), y así sucesivamente. ¿No es fantástico? Y así haríamos con cualquier intento de escribir una lista con todas las distancias. Hagamos lo que hagamos, siempre se escapa algún número (en realidad, casi todos, pero eso es otra historia).

La pregunta que se hacía Turing, una versión computacional de lo que preocupaba a Gödel, es ¿cuál es el alcance de los algoritmos, o de los ordenadores? Turing conceptualizó la noción de computación y de ordenador y creó un concepto abstracto, un objeto matemático, la máquina universal de Turing. Y se preguntó si habría un programa supervisor, una suerte de metaprograma, que antes de arrancar cualquier programa con cualesquiera datos nos permitiera saber si éste se va a detener (por ejemplo, para dar un resultado) o no (por ejemplo, porque entra en un bucle eterno).

Por supuesto, la respuesta es que no. Y de nuevo: supongamos que sí. Un programa no es sino una lista de unos y ceros y los datos, lo mismo. Y estas listas de unos y ceros no son sino representaciones de números naturales, de los de contar. Así que el tal programa supervisor nos daría como resultado una tabla como la siguiente:

	1	2	3	4	5	....
1	**1**	0	0	1	0	...
2	0	**0**	1	1	1	...
3	1	1	**0**	1	0	...
4	1	1	0	**1**	0	...
...	...	...	...	...	...	...

que nos informa de que el programa 3 se para con los datos 1, 2, 4, pero no con los datos 3, 5, ...

Y ahora en diagonal, ninguno de los programas tiene un conjunto de paradas codificados con 0, 1, 1, 0, ..., es decir, hay un conjunto de números naturales que no son detectados por ningún programa. La conclusión final es:

> Hay cuestiones acerca de los números naturales, como la pertenencia o no a un determinado conjunto, que no son resolubles algorítmicamente.

Y ya que estamos en esta vena. Una mala noticia. **No existe un antivirus universal**. Por antivirus universal uno entiende un programa capaz de detectar si un programa con unos datos alterara el sistema operativo, por ejemplo. El argumento es similar al anterior.

Todas estas conclusiones, de gran alcance en la teoría de la computación, provienen de un análisis con nociones ideales, hasta el ordenador es ideal, esa máquina universal de Turing capaz de emular a cualquier ordenador. Y la manipulación de esas nociones (los programas y los datos son simplemente números de contar) es también abstracta, matemática.

Toda esta técnica procede en realidad de Cantor, que se atrevió a lidiar con infinito actual, no potencial, de los conjuntos infinitos dados, completos. Todo un atrevimiento. Galileo en su *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* ya se hacía cruces sobre las paradojas (aparentes, claro) del infinito, al observar que había tantos cuadrados de números como números en sí. Antonio Machado por boca de su Juan de Mairena no escapa a ese mismo asombro:

> La serie de los números pares es justamente la mitad de la serie total de los números. La serie de los impares es exactamente la otra mitad. La serie de los pares y de los impares son --ambas-- infinitas. La serie total de los números es también infinita. ¿Será, entonces, doblemente infinita que la serie de los pares y que la serie de los impares? Sería absurdo pensarlo porque él concepto de infinito no admite más ni menos. ¿Entonces las partes --la serie par o la impar-- serían iguales al todo. Átenme ustedes. esa por el mosca rabo, y díganme en qué consiste lo sofístico de este razonamiento.
>
> *Mairena gustaba de hacer razonar en prosa a sus alumnos, para que no razonasen en verso*.

Límites por todas partes. Mencionemos tan sólo dos más; el **teorema de Shannon** que impone un límite a la capacidad de transmitir información sobre un canal si es que no se quieren cometer errores, o el **principio de incertidumbre de Heisenberg**, que pone un límite a la precisión con que se pueden determinar a la vez la posición y la velocidad.

Smale, medalla Fields de 1966, propone como unos de los más importantes retos matemáticos para el presente siglo el de averiguar los límites, si es que los hay, de la inteligencia humana y de la inteligencia artificial. El énfasis provocador radica en su planteamiento como problema matemático.

Y hay quien se plantea si no habría manera de establecer límites, de nuevo, si los hubiere, de la capacidad de expresión del arte para captar los conceptos ideales que intenta representar y de las realidades que pretende describir. Recordaba recientemente Félix de Azua en un articulo al escritor japonés Tanizaki necesitado de cincuenta páginas para sugerirnos someramente el célebre pie de la cortesana Fumiko.

Coda

Un lenguaje, éste de las matemáticas, que nos permite, moviéndonos en un mundo poblado por objetos y relaciones ideales, poner límites a la calidad de los mapas, a la precisión de los sistemas electorales, a la capacidad del razonamiento lógico para estructurar el conocimiento, a la precisión de la comunicación digital, etc., manipulando científicamente objetos puramente virtuales.

Y, terminemos, con una cita de John Kemeny, el matemático que inventó el lenguaje de programación BASIC:

> Es hora ya de que aprendamos, como parte de nuestra educación básica, que la matemática es simplemente un lenguaje, que se caracteriza por su capacidad para clarificar y para argumentar lógicamente. El poder de las matemáticas no es ni más ni menos que el poder de la razón pura.