LAS MATEMÁTICAS EN LA ERA DEL ORDENADOR

Excmo. y Mgfco. Sr. Rector de la Universidad de Huelva,
Excmas. e Ilmas. Autoridades,
Queridos Compañeros,

Señoras y Señores.

En primer lugar, quiero manifestar mi agradecimiento a nuestro Rector por haberme concedido el honor de desarrollar la Lección Inaugural del curso 2002-2003. Para un universitario, además, es un placer poder hablar de su disciplina ante un auditorio tan ilustre. No obstante, todos coincidirán conmigo en afirmar que no es una tarea fácil la elección del tema más apropiado para la Lección, dado lo variopinto del auditorio a la que va dirigida. Algunos de los presentes recordarán que en el año 2000 se celebró el denominado Año Mundial de las Matemáticas, uno de cuyos objetivos era el de acercar la matemática a la sociedad. En 1999, un pequeño número de profesores onubenses nos embarcamos en esa aventura con más ilusión que idea de lo que había que hacer. La respuesta institucional fue positiva y conseguimos un importante respaldo económico para organizar las actividades programadas, pero el resultado no fue todo lo bueno que habíamos imaginado. Sin embargo, el trabajo realizado, al menos en mi caso, no ha sido inútil. La experiencia adquirida en aquellos dos años de trabajo no tiene precio y, sin duda alguna, me ha sido de gran ayuda para enfrentarme a este otro reto.

INTRODUCCIÓN

En la sociedad actual, las matemáticas están presentes más ampliamente que nunca antes. No obstante, el ordenar el mundo que nos rodea según principios matemáticos es una actividad tan antigua como la Humanidad. Desde que surgió el pensamiento humano, ya hubo matemática. Se conocen ordenaciones de objetos que datan de la época en que aparece el hombre. Hay ejemplos de esto en las pinturas rupestres, en las avenidas de menhires de Bretaña y en los alineamientos de cráneos de oso encontrados en algunas cuevas. En todas las culturas se encuentran disposiciones de tipo geométrico. El arte nos ha dejado numerosos ejemplos, especialmente en arquitectura y ornamentación.

Ahora bien, como es sabido, la matemática se origina como disciplina científica en la antigüedad griega en torno al año 600 a. C. Siendo, por tanto, una de las ciencias más antiguas es a la vez una gran desconocida. El ciudadano medio tiene una idea muy vaga y, de hecho, equivocada de qué es la matemática y qué hacen los matemáticos. Para muchas personas, el contacto con ella se reduce a la época escolar y en esta etapa las características esenciales de esta disciplina, abstracción y desarrollo lógico-deductivo, a menudo quedan ocultas detrás de cálculos rutinarios, que tienen valor pero sólo representan una cara de la moneda. Lo mismo ocurre, pero en mayor grado, con el proceso de investigación. En nuestra opinión, éste es el origen de una idea muy extendida de que el matemático es un virtuoso del cálculo. Pero ahora, con la aparición de los ordenadores, se tiene tendencia a pensar en el matemático como alguien que sabe programarlos especialmente bien y que dedica todo su tiempo a ello. Este desconocimiento, sorprendentemente, se da también entre científicos de otros campos, muchos de los cuales consideran que la matemática sólo es el lenguaje de lo cuantitativo y lo realmente útil ya estaba elaborado antes de 1800. En definitiva, no es exagerado afirmar que una gran parte de nuestros contemporáneos ven la matemática como una materia muerta; están convencidos de que ya no queda nada por encontrar en matemáticas y que el matemático se limita a enseñar el legado de los siglos pasados.

Los datos que voy a facilitar seguidamente muestran que la realidad es muy diferente. El desarrollo experimentado por las matemáticas en los últimos años es impresionante; se estima que el número de artículos de investigación matemática publicados en el último cuarto del siglo XX es cercano al millón y el número de disciplinas matemáticas supera ampliamente el centenar. Se ha producido una ramificación extraordinaria que ha dado lugar a la aparición de nuevas y numerosas subdisciplinas que son útiles y no meras elucubraciones teóricas. De hecho, usualmente se considera que los siglos XIX y XX constituyen la Edad de Oro de las matemáticas. Matemáticos como Arquímedes, Newton, Euler, Gauss y Poincaré, considerados los más ilustres de todos los tiempos por el número y profundidad de sus trabajos, dominaron en su tiempo gran parte de la matemática existente, tanto pura como aplicada y, además, trabajaron en otros campos, especialmente en física. Hoy es impensable que una persona pueda dominar más de 3 ó 4 disciplinas matemáticas diferentes, dado el enorme crecimiento experimentado por cada una de ellas.

El cuerpo central de la lección tiene por objetivo poner de manifiesto cómo la llegada del ordenador, con su potencia de cálculo y sus posibilidades gráficas, ha provocado cambios sustanciales en los métodos, el nacimiento de nuevas disciplinas matemáticas y el crecimiento de otras ya existentes, estimuladas por las nuevas posibilidades que ofrece el empleo del ordenador o por el intento de resolver los nuevos problemas planteados. Como el ordenador lleva relativamente poco tiempo entre nosotros, la mayor parte de la matemática que voy a tratar ha sido elaborada muy recientemente, concretamente, durante la segunda mitad del siglo XX. Me voy a ocupar especialmente de tres disciplinas en las que el ordenador está jugando un papel de la mayor importancia: criptología, geometría fractal y teoría del caos determinista.

No obstante, dado que existe, como ya hemos indicado, un cierto grado de desconocimiento en relación con la matemática, he creído conveniente iniciar la lección con algunas reflexiones encaminadas a explicar qué es la matemática, cómo trabajan los matemáticos y qué significan denominaciones como matemática pura y matemática aplicada.

I. REFLEXIONES SOBRE LA MATEMÁTICA

Responder de una forma precisa a la pregunta ¿qué es la matemática? es poco menos que imposible. Hay una respuesta muy concisa debida a Poincaré (1854-1912) que afirma: "La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes". Podríamos dar otras más elaboradas y, con toda seguridad, serían tachadas de parciales. Sin embargo, sí es factible y puede ser suficiente señalar los rasgos característicos de la matemática que la distinguen de las restantes ciencias.

1. LAS CARACTERÍSTICAS ESENCIALES DE LA MATEMÁTICA

Los rasgos fundamentales de la matemática se pueden reducir a los dos siguientes: abstracción y desarrollo lógico-deductivo.

Un gran número de conceptos matemáticos se obtienen a partir de objetos de la realidad por abstracción de todas sus propiedades excepto algunas de ellas. Así, una línea recta es el resultado de abstraer todas las propiedades que vemos en un hilo tensado entre los dedos, exceptuando la de extensión en una dirección. Los conceptos de número y de formas geométricas son sólo los primeros y más elementales ejemplos, seguidos luego por muchos otros. Estas abstracciones, apoyadas unas en otras, llegan a alcanzar tal grado de generalización que pierden aparentemente toda conexión con la realidad y al hombre de nivel cultural medio le cuesta entenderlas.

Desde los griegos, la matemática se desarrolla de una forma lógico-deductiva a partir de unos pocos principios aceptados como evidentes en sí mismos y que se denominan axiomas. Toda afirmación, que no sea un axioma, deberá deducirse a partir de éstos mediante un razonamiento lógico. Platón describe con acierto la forma en que esto debe desarrollarse en un fragmento de la *República*:

" Los que se ocupan de la geometría, de los cálculos ..., una vez que han establecido por hipótesis la existencia de lo par y de lo impar, de las figuras, de los tres tipos de ángulos ...,, tratan estas nociones como aquellas que ya conocen; las manejan y utilizan como hipótesis, no consideran necesario explicarlas, ni a sí mismos ni a los

demás, como si ya fueran claras para todo el mundo; después, las toman como punto de partida, recorren todo el camino y acaban por alcanzar, en coherencia con ellos mismos, la proposición que se han planteado desde el principio.”

El hecho de establecer conclusiones a través del razonamiento deductivo constituye un avance extraordinario. Hasta ese momento, en todos los campos, cualquier conocimiento fiable se adquiría a través de la experimentación, la inducción y el razonamiento por analogía. Los griegos buscaban verdades y vieron que sólo las obtendrían con los métodos infalibles del razonamiento deductivo. Comprendieron que para llegar a verdades seguras debían de partir de verdades y estar seguros de no suponer ningún hecho no garantizado. Por ello, establecieron todos sus axiomas de forma explícita. La genialidad consiste en que comprendieron que la demostración era posible y necesaria en situaciones en las que los enunciados no son de ningún modo evidentes. Por otra parte, esto significa que el concepto de verdad se relativo. La afirmación de que un teorema es verdadero sólo significa que se sigue lógicamente de los axiomas propios de la teoría en cuestión.

Así, si un geómetra diese cuenta de un teorema recientemente descubierto mediante un simple modelo material y se limitara a tal demostración, ningún matemático admitiría que el teorema había sido demostrado.

Hay que advertir que la abstracción no es algo exclusivo de la matemática. Por el contrario, es una característica de todas las ciencias. Ahora bien, en matemáticas el nivel de abstracción es superior. Los conceptos surgen en una sucesión creciente de grados de abstracción que conduce, en muchos casos, a que la matemática se mueva en el campo de los conceptos absolutos.

Por otro lado, esta abstracción de la experiencia práctica es una de las principales fuentes de la utilidad de la matemática y el secreto de su poder científico. Con la abstracción y la simplificación de las observaciones de los sentidos, la matemática hace posible una descripción racional de nuestras experiencias que concuerdan con las observaciones hechas. Y aunque muchas veces se esgrima la abstracción como reproche a las matemáticas, ésta es la razón fundamental de las aplicaciones que encuentra en las diversas ciencias.

2. MATEMÁTICA PURA Y APLICADA

Como hemos dicho con anterioridad, la matemática como disciplina bien organizada no existía antes de que aparecieran en escena los griegos de la época clásica. Naturalmente, existieron civilizaciones anteriores en las que se desarrollaron los orígenes o rudimentos primitivos de la matemática. Hacia el año 10.000 a. C., las tribus primitivas tienden a establecerse sedentariamente en zonas concretas. Construyen viviendas, surgen la agricultura y la ganadería. En esta época el desarrollo de la matemática fue lento y muy desigual, existiendo civilizaciones que no han dejado vestigio matemático alguno. Las aplicaciones se limitaron a cálculos comerciales muy sencillos, cálculos aproximados de áreas de terrenos, al registro y medida del tiempo, a la decoración geométrica de la cerámica, al diseño en los tejidos... Hasta que llegamos a la matemática de los babilonios y egipcios (alrededor del año 3000 a. C.), no encontramos ningún otro progreso matemático.

En el caso de las civilizaciones egipcia y babilónica, la matemática era tan sólo una herramienta en forma de reglas simples e inconexas que respondían a problemas de la vida diaria. Apenas hay simbolismo ni pensamiento consciente sobre abstracciones, ninguna idea de demostración ni formulación de un método general o razonamiento que sirviera para convencer a alguien de la corrección de una regla. De hecho, no había ninguna concepción de ciencia teórica de algún tipo. La matemática de esta época suele calificarse como empírica y, desde luego, es una matemática utilitarista en su totalidad.

Sin embargo, con los griegos se produce un cambio radical. Su matemática tiene todas las características esenciales que acabamos de ver, pero hay otra diferencia de gran importancia con la matemática anterior. Desde el principio, los griegos hacen también una matemática que es desarrollada por un impulso puramente intelectual. Esto se pone de manifiesto claramente en la aritmética griega. Ya en la época pitagórica, apenas interesan los detalles técnicos del cálculo. Estas técnicas fueron relegadas a una disciplina independiente llamada *logística*, que trataba de la numeración y del cálculo aplicado a las cosas y no de la esencia y las propiedades de los números en sí, que eran las cuestiones de las que se ocupaba la aritmética. Esta característica también se da en la geometría griega. El periodo que va desde el año 300 hasta el 200 a. C. suele ser considerado como la Edad de Oro de la matemática griega. En esta época sobresalen, por encima de todos, tres matemáticos: Euclides, Arquímedes y Apolonio. Este último fue considerado en la Antigüedad como el Gran Geómetra. Seis de sus obras fueron incluidas, junto con dos tratados de los más avanzados de Euclides, en una colección conocida como el Tesoro del Análisis. Una de las obras más importantes de Apolonio, *Las cónicas*, constituye un tratado de una amplitud y una profundidad extraordinarias. Junto con los *Elementos* de Euclides fueron las mejores obras en su género de toda la matemática de la Antigüedad. Se llaman cónicas a las curvas planas que se obtienen al cortar un cono circular recto con un plano. Dependiendo de la posición relativa del plano con el eje de revolución del cono, se obtienen las curvas denominadas elipse, parábola e hipérbola. La circunferencia es el caso particular de elipse en el que sus semiejes tienen el mismo tamaño. Para generaciones de astrónomos, desde Eudoxo (370 a. C.) hasta Copérnico y Tycho Brahe, la figura celeste por excelencia era el círculo, y suponían sin vacilación que cualquier trayectoria celeste estaba constituida cinemáticamente por circunferencias. Kepler (1571-1630), por el contrario, rompió con esta tendencia introduciendo las trayectorias elípticas: los planetas describían una elipse con el Sol en uno de sus focos. Por tanto, *Las cónicas* de Apolonio tuvieron que esperar alrededor de 1800 años para encontrar aplicaciones. A esta afirmación sólo podemos oponer una excepción: está muy extendida la creencia de que Arquímedes, durante un asedio de Siracusa por los romanos, entre los años 214 y 212 a. C., llegó a incendiar las naves romanas usando un espejo parabólico, que refleja los rayos del Sol que inciden paralelamente al eje del espejo en rayos que convergen en el foco. Si tomamos esto como cierto, salvo la circunferencia y la parábola, las cónicas no fueron usadas hasta Kepler.

Estos hechos explican por sí solos que la clasificación de la matemática en pura y aplicada haya dado lugar a opiniones diversas. Corrientemente, se llama matemática aplicada a la actividad en la que las matemáticas encuentran aplicaciones externas a sus propios intereses. Por el contrario, la matemática pura trata de las relaciones de la matemática consigo misma; es decir, de desarrollos internos. Pero los ejemplos anteriores, junto con otros muchos acaecidos a lo largo de la historia, muestran que no es posible establecer una línea divisoria entre ambas o, en todo caso, que ésta debería ser modificada con el paso del tiempo.

Sí podría hacerse una clasificación atendiendo al objetivo inicial. En matemática aplicada el objetivo es la comprensión de las realidades del mundo y, por tanto, comienza con una situación empírica que presenta un problema. En cambio, la matemática pura se hace por su propio interés sin motivación exterior alguna.

Los matemáticos puros juzgan cualquier trabajo en matemáticas sobre la base de su profundidad, por la medida en que introduce nuevas ideas y métodos o porque resuelve un problema teórico que llevaba largo tiempo planteado. Sin embargo, cuando las matemáticas se aplican a otras disciplinas, lo que se tiene en cuenta es la cuestión de hasta qué punto se mejora el conocimiento del mundo real.

No hace mucho, ha habido una tendencia hacia la separación entre ambas, debido a dos razones principales. Por un lado, el matemático aplicado se ha dejado llevar, en ocasiones, más por los posibles beneficios económicos que por el desarrollo de la matemática en sí, y esto ha sido muy criticado por los matemáticos puros. Por otro lado, muchos matemáticos aplicados han considerado excesivamente artificial ciertas partes de la matemática pura. Afortunadamente, en los últimos tiempos, está cambiando profundamente la visión de ambos campos, que tienden a confundirse en uno sólo, como en la mejor tradición del pasado. Una de las razones fundamentales de este cambio es la inesperada variedad de aplicaciones que están encontrando las diversas ramas de la matemática, que ha llevado a E. Wigner (premio Nobel de física en 1963) a hablar de la irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias de la naturaleza. En opinión de Dieudonné (y de la mayoría de los matemáticos), la clasificación más apropiada debería ser la que distingue entre matemáticas y sus aplicaciones.

3. EL MOTOR EN LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

Acabamos de ver que, en las civilizaciones anteriores a la griega clásica, el motor de la creación matemática era de índole económica. La matemática surgió en aquellas civilizaciones para dar respuesta a problemas de la vida diaria, la mayor parte de los cuales tenían que ver con necesidades comerciales: cambio de moneda, medida de los terrenos, reparto de herencias, etc. Sin embargo, a partir de la matemática griega, puede afirmarse que en la creación matemática ha sido más frecuente el impulso puramente intelectual, como muestran los ejemplos que hemos comentado en el apartado anterior y otros muchos que se han dado a lo largo de la historia de las matemáticas, algunos de los cuales tendremos ocasión de comentar en lo que sigue.

El psicólogo Paul Souriau, en una obra de 1881, declaraba que la vanidad era el motor fundamental del esfuerzo creador en la ciencia, debido a que el científico joven desea conseguir reconocimiento público y/o asegurarse una posición cómoda e independiente. De esta forma, Souriau minimiza el profundo deseo de todo hombre de ciencia de participar en el progreso, en la difícil conquista de la verdad. Obviamente, la ambición, el amor propio y el deseo de hacer carrera son estímulos motores que no podemos subvalorar. De hecho, la prueba de que esto es así la aportan las muchas disputas por la prioridad que se han producido a lo largo de la historia. En el caso de la matemática, una de las más famosas es la disputa entre Newton y Leibniz por la prioridad en la invención del cálculo infinitesimal. Pero estos motivos por sí solos no hubiesen sido capaces de provocar el espléndido desarrollo de la ciencia. Hay un motivo mucho más elevado cuya influencia ha sido más fecunda: el amor a la ciencia que anima a todos los grandes investigadores. Es claro que este elemento afectivo no puede ser el único motor de la investigación científica, pero sin él muchos descubrimientos no se hubieran producido ya que, lejos de representar para sus autores la satisfacción de su amor propio o ventajas materiales, tales descubrimientos les obligaron a emprender una lucha difícil y desigual contra los prejuicios, la ortodoxia dominante y los intereses particulares. Esto sucede hasta el punto de que, en muchos casos, el investigador prefirió no publicar su descubrimiento, silenciarlo, debido a su miedo a provocar agotadoras polémicas, mientras que otros que sí dieron a conocer sus ideas, pusieron sus vidas en grave riesgo. Son más conocidos los ejemplos ocurridos a científicos de otros campos, como Galileo, Giordano Bruno, etc.., pero también en matemáticas se han dado casos, aunque no con tanto dramatismo. Uno de los más notables tiene que ver con Gauss (1777-1855), el Príncipe de los Matemáticos, como se le llamaba en su época. En su diario, que no fue hecho público hasta 1898, se encontraron resultados que anticipaban mucho de las matemáticas que se desarrollaron durante la segunda mitad del siglo XIX. En 1829 y 1832, los descubridores de la geometría no euclidiana, Lobachevsky y Bolyai, respectivamente, publican sus resultados obtenidos independientemente. En 1898, se encontraron entre los papeles de Gauss una buena parte de las aportaciones de Lobachevsky y Bolyai. Es conocido que Gauss no publicaba sus resultados hasta que estos estaban bien pulidos y ésta puede ser la razón de que no publicara sus descubrimientos en dicha geometría. Pero parece más acertado pensar que Gauss prefiere no hacerlo por temor a iniciar una polémica tremenda, debido a que en ese momento, principios del siglo XIX, estaban muy vigentes las ideas de Kant y las geometrías no euclidianas significaban contradecir la concepción del espacio de un gigante de la filosofía. En su *Crítica de la razón pura,* Kant afirma que la geometría es la ciencia del espacio y que nuestro conocimiento de éste no es empírico sino una consecuencia del modo en que está estructurada nuestra mente. Y, precisamente, está estructurada de tal modo que la geometría euclidiana es la única concebible. En los *Elementos* de Euclides la geometría se desarrolla de forma axiomática a partir de cinco postulados (llamados ahora axiomas). El quinto postulado, conocido como el de las paralelas, establecía que por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una recta paralela a la primera. En realidad, el enunciado original era otro equivalente pero, de hecho, siempre pareció a los matemáticos, casi desde la aparición de los *Elementos*, que el quinto postulado era más complejo que los otros cuatro y que podría obtenerse como una consecuencia de los restantes. A lo largo de la historia, ha habido numerosos intentos fallidos de conseguirlo hasta que, finalmente, con los trabajos de los anteriormente mencionados, Lobachevsky y Bolyai, se demostró que son posibles otras descripciones del espacio. Su geometría, denominada hiperbólica, se fundamenta sobre los cuatro primeros postulados de Euclides y el quinto es sustituido por este otro: "por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela". De este modo, desarrollan una forma de geometría que parecía ser tan consistente como la de Euclides. Durante más de dos mil años, matemáticos y físicos habían creído que la geometría de Euclides era la geometría del espacio, pero la geometría hiperbólica demostró que son posibles otras descripciones.

Desde el punto de vista de las matemáticas, el descubrimiento de las geometrías no euclidianas produjo un cambio copernicano. Desde entonces, quedó claro que en matemáticas se puede establecer cualquier conjunto de axiomas (no contradictorios) y estudiar sus consecuencias abstractas. Como consecuencia de este hecho la matemática se volvió más abstracta. No obstante, estas abstracciones geométricas encontraron, sorprendentemente, aplicaciones físicas: en 1916, Einstein usa las geometrías no euclidianas (especialmente, las ideas de Riemann) en la teoría general de la relatividad.

Finalmente, me voy a referir a un aspecto que es específico de la investigación matemática: el problema de su utilidad. Esta cuestión ha dado lugar a numerosas y ardientes polémicas. Una de las más célebres enfrentó a Fourier y Jacobi en 1830. Fourier había contribuido brillantemente a la física matemática, al progreso del análisis y a la introducción de las series trigonométricas, pero no apreciaba en su justo valor la importancia de ciertas partes de la matemática que tachaba de puramente teóricas. Pero, con ocasión de tener que emitir un informe para la Academia de Ciencias sobre ciertos trabajos fundamentales de Abel y Jacobi, cometió el error de querer imponer sus gustos personales y manifestó su pesar por el hecho de que científicos de tanto valor prefiriesen emplear su tiempo en investigaciones puramente teóricas en lugar de trabajar en la resolución de los problemas de la física matemática. Ese mismo año, en una carta a Legendre, Jacobi replicó a estas declaraciones con cierta indignación:

"Es cierto que el señor Fourier opinaba que el objetivo principal de la matemática era la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debería saber que el único objetivo de la ciencia es el honor del espíritu humano, y que desde este punto de vista tiene el mismo valor una cuestión de números que una relativa a la estructura del mundo."

En este sentido, hay una anécdota muy sugerente de Hadamard:

"Después de haber obtenido un teorema sobre singularidades de las funciones analíticas, estando conversando con el físico Pierre Duhem, le confesé que confiaba al futuro el trabajo de encontrar aplicaciones a este teorema. Pierre, en su calidad de físico y artista, me comparó a un pintor que comenzase por esbozar un paisaje encerrado en una habitación, y que luego, con el cuadro a la espalda, saliese en busca del paisaje que pudiera parecérsele. Esta comparación no me turbó; de hecho, era yo quien tenía razón. Las aplicaciones llegaron luego y hoy día son bastante numerosas. Yo me había confiado sin reservas en el sentimiento de belleza que me producía el enunciado del teorema, y este sentimiento no me engañó."

Curiosamente, los resultados obtenidos por Fourier sobre la conducción del calor tuvieron una fecunda influencia en la matemática pura (nacimiento de una nueva disciplina matemática llamada análisis armónico), y algunos resultados de Jacobi encontraron importantes aplicaciones, lo que constituye una prueba más de que es muy difícil poder predecir las repercusiones posteriores de una teoría matemática. De hecho, es indiscutible que los descubrimientos teóricos más fecundos en aplicaciones, a menudo, han sido aquellos que en un primer momento parecían más abstractos, más alejados de la realidad. Esta es la razón de que la mayoría de los matemáticos manifiesten cierto desinterés acerca de la posible aplicación de sus descubrimientos. El caso más notable es el de Hardy (1877-1947) que publicó un libro titulado *A Mathematician's Apology* donde expone sus opiniones sobre la utilidad de las matemáticas. Hardy fue un matemático puro, especialista del máximo nivel en Teoría de Números. Sus opiniones sorprenden por ser demasiado radicales. En uno de los pasajes más polémicos de su libro afirma: "Las matemáticas auténticas de los auténticos matemáticos, es decir, las matemáticas de Fermat, o Euler, o Gauss, o Riemann, son totalmente inútiles". Tan sólo unos años después, diversos resultados de estos autores sirven de fundamento a la tecnología relacionada con el fax, videófono, cierto sistema de grabación y reproducción de los discos compactos, transmisión de fotografías desde el espacio , etc.

En este aspecto, las matemáticas se asemejan más a una actividad artística que a una científica. Desde el punto de vista de la utilidad, ciertas partes serían consideradas sin valor alguno y, sin embargo, para los especialistas no sólo son útiles sino que pueden tener belleza, ¿no ocurre lo mismo con algunas obras de arte abstracto? Sin embargo, el matemático puro se diferencia del artista en un aspecto fundamental: mientras que un artista crea su obra con total libertad, el matemático no dispone de esa libertad, pues no olvidemos que la matemática es un conocimiento que se desarrolla de manera acumulativa porque construye consistentemente sobre las potencialidades iniciales. El quehacer matemático no es libre para configurar a su antojo los nuevos entramados de relaciones que vayan apareciendo. Hay un imperativo racional de rigor. Los nuevos objetos matemáticos no son meras piezas de un juego. Siendo esto así, parece razonable afirmar que el matemático no crea. Precisamente, este es el punto de vista de Platón. Para el platonismo, los objetos matemáticos existen en un reino ideal. Por ello, la matemática existe con independencia de los seres humanos y los matemáticos descubren, pero no crean. Esta idea está muy extendida entre los propios matemáticos, debido a que se ha dado en muchas ocasiones la circunstancia de que una teoría ha sido descubierta por matemáticos distintos entre los que no había relación alguna.

II. LA MATEMÁTICA EN LA ERA DEL ORDENADOR

El fabuloso desarrollo de los computadores se ha producido en la segunda mitad del siglo XX debido, como veremos a continuación, a la confluencia de dos fuentes: matemática y tecnología. Todas las ramas de la matemática, pura y aplicada, han sufrido el impacto, positivo desde luego, que supone la posibilidad de realizar una cantidad enorme de cálculos con una rapidez extraordinaria, así como experimentos gráficos que antes no podían ser ni imaginados. Términos nuevos como modelos numéricos, simulación por ordenador, experimento numérico, visualización dinámica... se han convertido en lugar común en las ciencias y en la industria. Éste es el caso en áreas como astrofísica, predicción del tiempo, industria del automóvil, medioambiente, economía y finanzas, comunicaciones y, muy recientemente, biología y medicina. En general, en cualquier área en la que se necesita aproximar de una forma eficiente las soluciones de modelos matemáticos sofisticados. Desde hace algún tiempo, el uso de instrumentos de computación de alta tecnología ha sido general en investigación. Pensemos, por ejemplo, en la enorme ayuda que representa en la investigación el disponer de varios supercomputadores trabajando en paralelo. Sin embargo, en matemática pura esto no ha ocurrido hasta muy recientemente. Suele llamarse matemática experimental al uso de tecnología avanzada para explorar estructuras matemáticas, contrastar conjeturas o sugerir generalizaciones. En cierto sentido, no hay nada de nuevo en esta forma de proceder, los matemáticos lo han venido haciendo así durante siglos con los instrumentos que tenían a su disposición. Muchas veces, un resultado fue intuido y se hicieron toda clase de intentos fallidos de prueba, hasta que finalmente ésta se consiguió. Hadamard llegó a afirmar: “el rigor matemático tiene por objeto sancionar y legitimar las conquistas de la intuición.”

¿Qué se entiende por un experimento en matemática pura? La respuesta es bien simple: cualquier hecho que permita discriminar entre posibilidades, de modo que nos da confianza para seguir por el camino que hemos tomado o nos hace pensar en la necesidad de corregirlo. Hay dos herramientas fundamentales que posibilitan esta nueva forma de hacer investigación en matemática pura:

-La existencia de poderosos programas de cálculo simbólico como Maple, Mathematica, Matlab, etc.

-La aparición de los algoritmos de detección de relaciones enteras y otras técnicas que descansan sobre aritmética de alta precisión que utilizan, entre otras herramientas, la transformada rápida de Fourier.

Con estos métodos, se están descubriendo identidades matemáticas desconocidas. Algunas de estas identidades se han podido demostrar, otras sólo están establecidas de una forma aproximada, pero algunas con una precisión de hasta miles de cifras decimales. No se tiene una demostración formal, pero hay una evidencia empírica más que razonable. Por tanto, a efectos prácticos, esas identidades no demostradas pueden ser usadas como si estuvieran consolidadas.

Estos hechos, junto con la existencia de teoremas que han sido "probados" por medio de los ordenadores, han dado lugar a que en la actualidad existan versiones diferentes de lo que entendemos por demostración y rigor. El primer ejemplo de un teorema demostrado con la ayuda del ordenador es el llamado problema de los cuatro colores que fue probado en 1976. Se trata de un problema cuyo planteamiento es muy simple pero de solución muy complicada. Inicialmente, fue propuesto a A. de Morgan por un alumno suyo. Incapaz de resolverlo, de Morgan se lo planteó a Hamilton en 1852 con el siguiente enunciado: "para colorear un mapa plano, de modo que países con frontera común se pinten con color diferente, ¿bastan cuatro colores?". Desde entonces y hasta 1976 se sucedieron demostraciones parciales, pero en ese año, con 1200 horas de ordenador, K. Appel y W. Haken obtuvieron la prueba. Se trataba de la primera demostración que no podía verificarse directamente por ningún matemático, sino sólo por otro programa. Muchos se resisten a aceptar tal tipo de demostración y consideran no probada la conjetura. Lo que sí parece claro es que, en el futuro, la lógica aristotélica no será siempre la mejor manera de tomar una decisión.

La aparición del ordenador no sólo ha provocado cambios fundamentales en los métodos sino que, además, ha dado lugar al nacimiento de nuevas disciplinas como matemática computacional, teoría de autómatas o lenguajes formales, etc., y ha dado nueva vida a otras ya existentes debido a que el ordenador hace posible el estudio de problemas complejos que antes resultaban intratables. Así ocurre con ramas de matemática discreta, como teoría de grafos, con sus importantes aplicaciones (por ejemplo, a las redes telefónicas y, en general, al mundo de las comunicaciones).

A continuación, hacemos una breve historia de las máquinas de calcular que pondrá de manifiesto el hecho, anteriormente citado, de que el ordenador se origina a partir de dos fuentes: matemática y tecnología. Seguidamente, consideraremos tres disciplinas matemáticas que tienen en común el importante papel que el ordenador está jugando en su desarrollo: criptología, geometría fractal y la teoría del caos determinista. Veremos que, en dos de ellas, su desarrollo comienza precisamente en el momento que el ordenador permite la realización de experimentos numéricos y gráficos con extraordinaria rapidez. En el caso de la criptología, encontraremos un nuevo ejemplo de resultados de matemática pura que encuentran posteriormente aplicación. Así ocurre con el llamado teorema pequeño de Fermat que, tres siglos después, se aplica en un método de criptología de clave pública al que nos vamos a referir más adelante.

1. HISTORIA DE LAS MÁQUINAS DE CALCULAR

Como ocurre en cualquier teoría científica o artilugio tecnológico, hay un periodo de tiempo, más o menos grande, durante el cual se van gestando y perfeccionando los principios básicos sobre los que se sustenta. Siempre resulta interesante conocer cómo ha sido el desarrollo de este periodo de gestación, cargado de esfuerzos y fracasos que van conduciendo a la forma elaborada final.

En el caso de la historia de las máquinas de calcular, hay que retrotraerse hasta el siglo XVII. Concretamente, hasta 1642, año en que Pascal fabrica una máquina de sumar, basada en los ábacos chinos, para ayudar a su padre a llevar las cuentas para el gobierno en Rouen. Esta máquina podía manipular números que no tuvieran más de seis dígitos. Contaba con una secuencia de diez diales numerados de 0 a 9. Estaban diseñados de modo que cuando uno de ellos pasaba de 9 a 0, entonces el siguiente en la secuencia giraba una unidad. De este modo podía sumar de un modo automático. Pascal llegó a fabricar 50 de estas máquinas.

Unos años más tarde, Leibniz (1671) y Sir Morland (1673) inventaron máquinas que multiplicaban. Hubo otros intentos similares, pero en casi todos ellos las máquinas resultaron ser muy lentas y poco prácticas. En 1820, Thomas de Colmar transformó una máquina del tipo de la de Leibniz en otra que podía hacer restas y divisiones. Esta máquina se convirtió en el prototipo de todas las máquinas comerciales que se construyeron antes de 1875 y de muchas construidas con posterioridad.

En 1822, el excéntrico matemático inglés Charles Babbage dirigió una carta al Presidente de la Royal Society, señalando la importancia (para el gobierno) de disponer de una máquina que ayudara a calcular las tablas usadas en navegación y astronomía, y él mismo ofrecía sus servicios para construirla. Su propuesta fue recibida con gran entusiasmo y en 1823 el gobierno accedió a financiar la empresa. Babbage empezó a trabajar con gran interés en el proyecto de fabricar una máquina, a la que llamó *difference engine*, capaz de emplear 26 cifras significativas y de computar e imprimir diferencias sucesivas hasta el orden seis. Pero el proyecto fue un fracaso. Después de diez años de trabajo, el gobierno suspendió su ayuda. Babbage abandonó el proyecto inicial y comenzó a trabajar en una máquina más ambiciosa (*analytical engine*). En este nuevo proyecto colaboró una matemática, Ada Lovelace (1815-1852), una de las pocas mujeres que se dedicaron a las matemáticas con anterioridad a 1900. Esta segunda máquina debía ser capaz de ejecutar, de un modo completamente automático, una serie completa de cálculos aritméticos que se le asignasen. La máquina podría almacenar en su memoria resultados intermedios para su uso posterior y tendría una capacidad de mil números de 50 dígitos cada uno. Poseía una librería propia con tablas numéricas (logaritmos, etc.) que podría usar. Comparando números, podría tomar decisiones. Todo esto, que constituye la esencia de un computador moderno, sería ejecutado de una forma puramente mecánica (sin ayuda de electricidad, transistores, etc.). Este nuevo proyecto también fracasó por diversas razones, la más importante radica en el hecho de que la tecnología todavía no había alcanzado el grado de desarrollo necesario para fabricar los instrumentos de precisión requeridos. Aunque los proyectos de Babbage fracasaron, proporcionaron la inspiración para los computadores mecánicos y electrónicos que más tarde aparecieron. Babbage, cien años antes, había enunciado los principios sobre los que descansan todas las modernas máquinas de computación. Uno de los primeros descendientes de la analytical engine de Babbage es el ASCC (Automatic Sequence Controlled Calculator), conocido mejor por Mark I, fabricado en la Universidad de Harward, bajo la supervisión del profesor H. Aiken (1994). Esta máquina pesaba cinco toneladas. En 1946, la revista Nature publicó un artículo sobre el Mark I con el título *El sueño de Babbage se hace realidad.*

En 1875, el americano F. S. Baldwin patentó la primera máquina de calcular que podía ejecutar las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética. Muchas máquinas electrónicas (de mesa) de calcular de los tiempos recientes se basan sustancialmente en la de Baldwin. En general, las calculadoras de mesa derivan de la máquina de sumar de

Pascal (1642) y los grandes computadores electrónicos de hoy derivan de la analytical engine de Babbage (1830).

Una gran parte de los resultados sobre los que se sustenta el ordenador moderno fueron descubiertos a principios del siglo XX por matemáticos que trabajaban en lógica o en la teoría de sistemas axiomáticos. Los logros de los primeros cuarenta años van a sacudir los cimientos de las matemáticas pero, a su vez, van a servir de fundamento de los ordenadores.

A comienzos del siglo pasado, la gran mayoría de los matemáticos creían que toda la matemática se podía fundamentar sobre un único sistema axiomático y el objetivo era encontrar el conjunto de axiomas y reglas de inferencia correctos. De esta forma, cualquier teorema podría obtenerse a partir de los axiomas con sólo aplicar una secuencia finita de reglas de inferencia. Esta idea ya fue planteada por Leibniz en 1666 en su obra *De arte combinatoria.* Leibniz imaginó la posibilidad de un tipo de matemáticas universales en las que "un cálculo de razonamiento" expresado en un simbolismo eficaz sujeto a reglas adecuadas de combinación, elaboradas de una vez para siempre, guiarían la razón. Esta idea, esencialmente, fue retomada por D. Hilbert a principios del siglo XX. Su famoso programa de formalización de las matemáticas perseguía probar mediante su teoría de la demostración que las matemáticas no tienen contradicción.

En 1931, Gödel publica su célebre teorema de incompletitud que establece, en esencia, que en cualquier sistema axiomático, con tal que sea válido para la aritmética, existen teoremas verdaderos que no pueden ser demostrados mediante las reglas del sistema. De esta forma, el sueño de Leibniz y el Programa de Hilbert estaban abocados al fracaso. Sin embargo, el teorema de Gödel generó un gran interés por conocer el poder de los métodos axiomáticos y los procesos computacionales. Los matemáticos empiezan a desarrollar máquinas de computación teóricas (esto sucedía antes de que la tecnología fuera capaz de producir máquinas reales) y a estudiar la capacidad y los límites de estas máquinas. Fruto de este trabajo es el nacimiento del ordenador moderno. En este punto hay que destacar las aportaciones de Alan Turing que diseñó un tipo de máquina automática con mayor poder computacional que ninguna otra. De hecho, existe una conjetura (la denominada tesis de Turing) que afirma que las máquinas de Turing poseen la capacidad suficiente para resolver cualquier problema para el cual exista una solución por medios computacionales.

No podemos terminar sin mencionar las aportaciones de Von Neumann, considerado como uno de los padres del ordenador moderno. Fue el matemático más polifacético del siglo pasado; en Princenton circulaba la broma de que era en realidad un extraterrestre que había aprendido perfectamente a imitar a los humanos. Al final de la segunda guerra mundial, los ordenadores se convirtieron en su principal pasión. Sus ideas sobre la estructura interna de los ordenadores tuvieron una gran aceptación y llegó a idear las técnicas matemáticas para su funcionamiento. Inventó un prototipo de ordenador digital y un sistema de predicción meteorológica que culminó en el ordenador MANIAC, usado por la marina de guerra de Estados Unidos para la predicción del tiempo atmosférico.

2. CRIPTOLOGÍA

Se llama criptografía al estudio de los métodos de cifrar mensajes secretos de modo que sólo puedan ser descifrados por las personas designadas y no por cualquier otra que pueda interceptarlos. Se llama clave a la información específica de cómo se ha cifrado el mensaje o de cómo hay que hacer para descifrarlo. El estudio de las formas de descifrar los mensajes interceptados, sin conocer la clave, se llama criptoanálisis. Por último, criptología es la disciplina que se ocupa de ambas problemáticas.

Obviamente, estos métodos siempre han interesado a los militares. De hecho, las raíces de la criptografía llegan hasta Julio César que cifraba los mensajes sustituyendo cada letra por la que está tres lugares más adelante en el alfabeto. Ahora, en la época de los ordenadores, encuentran aplicaciones en temas bancarios, de comunicaciones, datos personales, etc.

Los métodos más elementales de cifrado consisten en hacer una permutación del alfabeto. De esta forma, cada letra se sustituye por otra de acuerdo con una regla preestablecida, la clave. Precisamente, la transmisión de la clave es uno de los principales problemas en la mayoría de los métodos de cifrado de mensajes. Además, por razones obvias, la clave debe ser cambiada con frecuencia. A partir de la segunda guerra mundial, los métodos y posibilidades de la criptografía sufren una transformación radical. Durante la guerra, los alemanes usaban una máquina eléctrica, llamada Enigma, para cifrar y descifrar los mensajes. Un grupo de matemáticos británicos, liderados por Alan Turing, desarrollaron métodos para descifrar los mensajes interceptados. Esto jugó un papel de la mayor importancia en la victoria final de los aliados. Los mensajes eran transmitidos radiotelegráficamente, por lo que eran fácilmente interceptados. A pesar de que los alemanes cambiaban diariamente el dispositivo de Enigma que fijaba la clave, la eficacia de este grupo era tal que a las pocas horas de ser interceptado un mensaje, éste era descifrado y facilitado a los oficiales británicos. Todo el esfuerzo realizado por este grupo se mantuvo en secreto hasta mucho tiempo después de acabada la guerra.

En los años setenta se desarrollaron métodos que no requerían la transmisión de la clave. En estos métodos, llamados de clave pública, la persona que desea recibir mensajes da a conocer ciertos números que permiten el cifrado. Pero sólo ella conoce determinados números secretos que le permiten descifrar los mensajes que recibe.

En 1978 aparece un sistema de clave pública denominado RSA (por las letras iniciales de los nombres de sus creadores) en el que se utilizan resultados de Teoría de Números (una rama de las matemáticas puras a la que también suele llamarse aritmética superior). Este método necesita disponer de un par de números primos muy grandes p y q (de más de cincuenta cifras cada uno) con el objeto de que su producto $n = p\,q$ sea un número muy difícil de factorizar. Los números secretos son p, q y un número N que no tiene divisores comunes con $p - 1$ y $q - 1$. Se hacen públicos el número $n = p\,q$ y cierto número M que permite el cifrado de los mensajes. Sin embargo, el descifrado requiere el conocimiento de p, q y N, que se mantienen en secreto.

La fuerza del método RSA descansa en la dificultad de descomponer en factores un número grande de las características de $n = p\,q$. Este método ha generado dos líneas de investigación antagónicas. Una consiste en idear métodos para generar números primos muy grandes. La otra línea trata de descubrir métodos de factorización de números grandes que sean rápidos con la ayuda del ordenador. La primera línea trata de dar seguridad al método RSA y la segunda trata de romper el cifrado en el mínimo tiempo posible. Esta carrera entre los investigadores de ambas líneas ha producido avances importantes en teoría de números y en algoritmos de computación. En 1976, se consideraba que se necesitaban 4×10^6 años de ordenador para factorizar el número que daba el método RSA por no factorizable. Pero, en unos pocos años, se consiguió factorizar dicho número en 8 meses, usando 1600 ordenadores trabajando en paralelo. Por último, es preciso destacar que los métodos de factorización de A. Lenstra constituyen uno de los hitos de la matemática más reciente.

2. LA TEORÍA DEL CAOS DETERMINISTA

Esta teoría se inicia muy recientemente, precisamente en el momento que los ordenadores permiten realizar multitud de experimentos numéricos y gráficos que son imposibles de desarrollar manualmente. Sus dos ingredientes principales son: formas geométricas denominadas fractales y comportamiento irregular llamado caos. Los dos conceptos han evolucionado por separado, pero luego han llegado a estar indisolublemente entrelazados.

En gran medida, el caos llega a la matemática actual a través de experimentos y observaciones realizados, durante las décadas de los sesenta y setenta, por científicos de muy diferentes campos: físicos, biólogos, meteorólogos, astrónomos, etc. Sin embargo, las raíces de esta teoría llegan, como tendremos ocasión de ver más adelante, hasta finales del siglo XIX.

Numerosos problemas de las ciencias, tanto de la naturaleza como sociales, se reducen a encontrar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que verifican ciertas condiciones iniciales. Una ecuación diferencial es aquélla en la que aparece reflejada la derivada de la función incógnita. En los problemas que estudian las ciencias, habitualmente, las variables que intervienen y sus ritmos de variación están relacionados entre sí por medio de los principios científicos que los regulan. Al expresar esas relaciones matemáticamente, el resultado es en gran número de casos un sistema de ecuaciones diferenciales, dado que la derivada representa el ritmo de variación de la variable dependiente respecto de la variable independiente. Aquí radica la razón de que la mecánica clásica dé una imagen determinista del mundo: usando las leyes de la mecánica encontramos, para determinado sistema físico, un modelo matemático que consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales (las ecuaciones de movimiento del sistema) junto con ciertas condiciones iniciales. Por tanto, el conocimiento del estado del sistema en un instante dado, que denominamos instante inicial, permite deducir su estado en cualquier otro instante. El célebre matemático francés Laplace, (1749-1827), dio la siguiente formulación del determinismo, que es fiel reflejo del optimismo que imperaba en la física a finales del siglo XVIII:

"Una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza, así como las situaciones respectivas de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis

tales datos, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del Universo y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos. El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido dar a la astronomía, un débil esbozo de esta inteligencia."

El siglo XVIII (y principios del XIX) fue un periodo en el que se forjaron la mayoría de las grandes teorías de la física matemática clásica. Por ello, se impuso un paradigma contundente: las ecuaciones diferenciales son la forma de modelar la naturaleza. De todas formas, hay un precio a pagar: una cosa es obtener las ecuaciones y otra muy diferente es resolverlas. El propio Euler, el matemático más importante del siglo XVIII, dijo:

"Si no nos está permitido penetrar en un conoc imiento completo concerniente a los movimientos de los fluidos, no es debido a la mecánica, o a la insuficiencia de los principios conocidos del movimiento, a lo que hemos de atribuir la causa. Es el mismo análisis el que aquí nos abandona" (desde el siglo XVIII, el cálculo riguroso recibe el nombre de análisis).

A pesar de todo, el optimismo era ilimitado y existía un sentimiento general de que los problemas de la naturaleza habían quedado resueltos, al menos los problemas relativos a sistemas simples, es decir, con pocos grados de libertad. Sin embargo, los sistemas físicos complejos con muchos grados de libertad tenían un comportamiento que parecía aleatorio y poco a poco se va imponiendo la idea de que lo apropiado es realizar un tratamiento estadístico. De esta forma, a finales del siglo XIX hay dos paradigmas en la ciencia muy definidos: el análisis de gran precisión por medio de las ecuaciones diferenciales, aplicable a los problemas simples y bien estructurados, y el análisis estadístico de cantidades promedio para los sistemas muy complejos, como es el caso del estudio cinemático de los gases (piénsese que un miligramo de un gas puede contener aproximadamente cien trillones de partículas).

A primera vista, el determinismo no deja ningún espacio para el azar. Pero vamos a ver que el dilema azar/determinismo es un falso problema. A mediados del siglo XX, los científicos se van a encontrar diversos ejemplos de sistemas deterministas que parecen comportarse aleatoriamente. Ecuaciones que no contienen ningún término aleatorio y que, en principio, describen de forma unívoca la evolución temporal de un sistema pueden tener efectos aleatorios. Existen muchos sistemas que tienen la propiedad denominada "sensibilidad a las condiciones iniciales". Por esto, entendemos que un pequeño cambio en el estado del sistema, en el instante inicial, produce un cambio grande a largo plazo. En tales sistemas, tenemos a la vez determinismo y la imposibilidad de predecir a largo plazo. En efecto, la evolución del sistema en el tiempo está completamente determinada por el conocimiento de las condiciones iniciales pero, si es "sensible a las condiciones iniciales", por mucha precisión con que se determinen dichas condiciones, obtendremos una predicción a largo plazo completamente inútil.

Existen sistemas que tienen sensibilidad para cualesquiera condiciones iniciales, otros tienen sensibilidad sólo para ciertas condiciones iniciales y los hay que no la tienen en absoluto, como es el caso del péndulo, prototipo de la mecánica clásica. No cabe duda de que esto va un poco en contra de la intuición y los científicos han necesitado un cierto tiempo para entender perfectamente cómo suceden las cosas.

La primera demostración de que, para ciertos sistemas, un pequeño cambio en las condiciones iniciales conduce a un cambio grande en la evolución posterior del sistema, de modo que las predicciones a largo plazo resultan completamente vanas, se debe al matemático francés Hadamard, a finales del siglo XIX. Para ello, consideró una mesa de billar con superficie curva. Curiosamente, el físico francés Henri Duhem publicó en 1906 un libro de divulgación en el que se refiere a la inutilidad de hacer predicciones en un sistema como el de Hadamard. Aproximadamente por la misma época, el matemático francés H. Poincaré estudió los movimientos planetarios con la intención, entre otras, de establecer si el sistema era estable. Pero, incluso el problema más simple de estudiar el sistema formado por el Sol, la Tierra y la Luna (denominado problema de los tres cuerpos) se le resistió. Poincaré estudió el llamado modelo reducido de Hill en el que se supone que uno de los tres cuerpos tiene una masa insignificante, comparada con la de los otros dos. La masa pequeña no afecta de una manera sensible a las otras, pero éstas sí intervienen de manera relevante en el movimiento de aquélla. Estos problemas conducen a ecuaciones que no pueden ser resueltas explícitamente. Por ello, Poincaré buscó métodos nuevos mediante los cuales el problema sería resuelto examinando las propias ecuaciones diferenciales. De esta forma, inició la denominada teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, para lo cual llegó a crear una nueva rama de las matemáticas : la topología. Ideó un método (las secciones de Poincaré) para tratar de descubrir si la masa pequeña en el modelo reducido de Hill tenía un movimiento periódico y, sin embargo, encontró un comportamiento extremadamente complicado y nada intuitivo. Poincaré se asomó al caos y llegó a discernir algunas de las formas que estaban escondidas en el abismo, pero carecía de algunas herramientas necesarias para descubrir algunas de las cosas más bellas de la matemática a las que confundió con monstruosidades. Le tocó a otra época, armada con la propia teoría cualitativa de Poincaré sobre las ecuaciones diferenciales, junto con los ordenadores, y otras ayudas técnicas, el ver la belleza que había en las profundidades del caos. Pero no podrían haberlo hecho nunca, si Poincaré no hubiera explorado el borde del abismo. Poincaré llegó incluso a tratar el problema de la sensibilidad a las condiciones iniciales en meteorología. Más adelante, veremos que esto fue redescubierto por E. Lorenz en 1961.

Puede sorprender el gran lapso de tiempo que separa a Hadamard, Poincaré y Duhem de los estudios modernos del caos. Sin embargo, hay varias razones que lo explican:

- El descubrimiento de la mecánica cuántica, que conmocionó el mundo de la física y ocupó todas las energías de varias generaciones de físicos.

- Cuando un problema matemático se resiste, hoy se puede proceder a estudiarlo numéricamente por ordenador. Esta ayuda es inapreciable, pero los primeros ordenadores aparecen a mediados del siglo XX.

Antes de la dramática aparición del caos en los años sesenta, había ciertos esquemas conceptuales admitidos por la comunidad científica, a saber:

a) Sistemas simples se comportan de modo sencillo. Un péndulo, un circuito eléctrico pequeño o una población aislada de insectos deberían poseer una estructura sencilla.

b) Comportamiento complejo de un sistema implica causas complejas. La evolución del tiempo meteorológico o un fluido turbulento son sistemas complicados, inestables e impredecibles. Tal comportamiento tendría que ser debido a multitud de causas diversas cuya influencia no podemos dominar conceptualmente en su totalidad.

c) Sistemas diferentes se comportan de modo diferente. La química de la neurona o la turbulencia en un túnel de aire son sistemas cuyas componentes elementales son diferentes. Su comportamiento global no debería tener mucho en común.

Sin embargo, los años sesenta comienzan con el sorprendente hallazgo de que ecuaciones matemáticas muy simples podían modelar sistemas con comportamiento caótico. Vamos a describir, aunque sea brevemente, dos de los casos más sobresalientes.

En 1961, E. Lorenz encuentra el caos en su simulación matemática del tiempo meteorológico estudiado con un ordenador. Propuso un modelo simplificado del tiempo que consistía en un sistema de doce ecuaciones diferenciales. Cierto día, para estudiar con mayor profundidad el resultado de la simulación efectuada el día anterior, decidió iniciar la simulación a medio camino; es decir, para la nueva simulación toma como condiciones iniciales los datos correspondientes a un punto intermedio obtenido en la del día anterior. Esta segunda tenía que haber sido la réplica exacta de la primera, pero se encontró algo inesperado: a medida que pasaba el tiempo los resultados de ambas simulaciones se separaban más y más. Concretamente, al cabo de unos meses (minutos en el ordenador) no había similitud alguna, como si se tratara de dos tiempos atmosféricos completamente diferentes. Tras las lógicas dudas iniciales, pronto comprende la verdad. La memoria del ordenador almacenaba seis decimales pero, para ahorrar espacio, en la impresión aparecían únicamente las tres primeras. En la segunda simulación, Lorenz había introducido los datos iniciales con sólo los tres decimales que estaban reflejados en la impresión del día anterior, convencido de que la diferencia era de poca importancia. Pero su modelo, a pesar de su extremada simplicidad matemática, era sensible a las condiciones iniciales y mostraba que los pronósticos meteorológicos a largo plazo son completamente inútiles.

Sorprendentemente, los años 50 y 60 se caracterizaron por su optimismo irreal en el pronóstico del tiempo atmosférico. Los periódicos rezumaban esperanza sobre la meteorología, no sólo en lo relativo a la predicción, sino también en lo referente a su modificación y dominio. Dos técnicas fundamentales para ello estaban madurando simultáneamente: el ordenador digital y el satélite artificial. El motor intelectual de este estado de opinión fue el matemático Von Neumann, que construyó su primer ordenador con la intención, entre otras, de dominar el tiempo. Pero los resultados de los más notables pronósticos se volvían inútiles pasados seis o siete días.

Volviendo a Lorenz, tras su descubrimiento inicial, decidió buscar formas incluso más sencillas de producir aquel complejo comportamiento. Encontró un sistema extremadamente simple de tres ecuaciones diferenciales. Con la ayuda del ordenador, ahora podía representar gráficamente la evolución temporal del sistema en el espacio de las tres variables (el espacio de fases). El diagrama resultante manifestó una tremenda complejidad. Tenía el aspecto de una mariposa con su par de alas (el atractor extraño de Lorenz). Para casi todos los valores iniciales, los valores de las variables son atraídos rápidamente a puntos sobre esta figura y entonces da vueltas alrededor en las dos “alas” de una forma aparentemente caótica. Pero dentro de una extremada complejidad había una fina estructura geométrica, orden disfrazado de casualidad.

Figura 1. El atractor extraño de Lorenz

En aquella época pocos lo comprendieron. Lorenz publicó con estos resultados un trabajo en una revista de meteorología, *Journal of the Atmospheric Sciences*, donde quedó enterrado varios años.

La segunda experiencia que voy a describir es aún más sorprendente, debido a la inusitada sencillez del modelo matemático que se usa. En los años 70, los ecólogos van a desempeñar un papel especialmente importante en el nacimiento del caos como ciencia. Usaron modelos matemáticos en dinámica de poblaciones, aunque lo hicieron convencidos de que eran endebles imitaciones del complejo mundo real.

Hay variedades de insectos que se reproducen estacionalmente una vez al año y, para el estudio de la evolución temporal de una población determinada, se usa el llamado modelo logístico de Verhulst que tiene en cuenta la barrera que opone la limitación del medio a la expansión continuada de la población. Una función matemática tan simple como $P(x) = k\, x\, (1 - x)$ es la base del modelo logístico. Aquí k es una constante que expresa la mayor o menor vitalidad reproductora de la población y x, un número entre 0 y 1, es una medida de la población en un determinado año. Si x_n denota la población en un cierto año, entonces la población en el siguiente año viene dada por $x_{n+1} = k\, x_n\, (1 - x_n)$. Los biólogos habían detectado que muchas poblaciones reales de tales insectos tenían una evolución caótica. Pero los expertos en dinámica de poblaciones tenían la idea de que ello se debía a la influencia de causas que el modelo logístico no era capaz de recoger a causa de su extrema simplicidad. En definitiva, opinaban que el modelo no era lo suficientemente sofisticado.

A mediados de los setenta, Robert May explora cómo cambia la dinámica de la aplicación logística a largo plazo, a medida que el parámetro k varía. May encuentra que para valores mayores que 3.58 aparece comportamiento caótico en el propio modelo matemático. Es decir, una población ideal que siguiera exactamente este simple modelo presentaría un comportamiento impredecible, para tales valores de k.

Como el modelo matemático es de lo más simple, es posible e interesante, aunque sólo sea de una forma concisa, describir cómo varía exactamente la dinámica de la aplicación logística a medida que k recorre el intervalo (1, 4). Para facilitar la exposición, conviene introducir la definición de órbita de un punto x perteneciente a [0, 1]. La sucesión formada por las sucesivas iteraciones de $P(x) = k\, x\, (1 - x)$, comenzando en determinado x, recibe el nombre de órbita de x. Cuando k varía en el intervalo (1, 3), la dinámica es muy simple: hay un punto fijo atractor y todas las órbitas que comienzan en un x perteneciente a (0, 1) convergen hacia dicho punto fijo. Si k es exactamente 3, la dinámica es como en el caso anterior, pero ahora se nota que la convergencia de las órbitas hacia el punto fijo es extremadamente lenta. Esto es un signo de que algo importante está próximo a ocurrir. Si k pertenece al intervalo (3, 1 + $\sqrt{6}$), el sistema dinámico tiene una órbita atractora y periódica de periodo 2, pues se prueba que la órbita de cualquier punto, salvo unos puntos bien determinados, converge hacia la órbita periódica. Es decir, al pasar k por el valor 3, en lugar de un punto fijo atractor (periodo 1), hay una órbita atractora y periódica de periodo 2 (este fenómeno se conoce con el nombre de duplicación de periodo y será tratado con más extensión en lo que sigue).

¿Qué ocurre cuando k pasa por el valor 1 + $\sqrt{6}$? Se demuestra que los puntos de periodo 2 se convierten en repulsivos y se duplican, cada uno de ellos, para dar lugar a una órbita de periodo 4, que será atractora hasta, aproximadamente, k = 3.55. Al pasar por este valor, vuelve a producirse una duplicación de periodo. Concretamente, la órbita de periodo 4 se convierte en repulsiva (como las órbitas de los puntos que ya lo eran) y cada uno de los cuatro puntos que constituyen dicha órbita se bifurca para dar lugar a una órbita periódica de periodo 8 que atraerá a las orbitas de todos los puntos de (0,1), exceptuando unos puntos bien determinados. Si traducimos el fenómeno de la duplicación de periodo al estudio de las poblaciones de insectos modeladas por la aplicación logística, obtendríamos que un leve cambio de la fecundidad podría hacer que una población determinada pasara de un ciclo de cuatro años a uno de ocho

A medida que k avanza hacia 4 se va reproduciendo el comportamiento anterior y, sucesivamente, van apareciendo órbitas atractoras de periodo 16, 32, 64,.., al tiempo que se van convirtiendo en repulsivas las órbitas que la preceden. Este es el fenómeno que se denomina cascada de duplicación de periodo de Feigenbaum, en honor a su descubridor. Para k = 3.58, aproximadamente, después de que el sistema ha hecho todo lo posible para permanecer periódico, a costa de periodos cada vez más largos, la aplicación logística se vuelve caótica. Pero no termina todo ahí, para k = 3.835 aparece una órbita de periodo tres y si se incrementa k muy suavemente, los periodos se hacen 6, 12, 24,..; es decir, se produce una nueva cascada de duplicación de periodo. En el valor máximo k = 4, cualquier órbita pasa tan cerca como se desee de cualquier punto de (0,1).

Feigenbaum optó por calcular los valores paramétricos exactos que daban lugar a las duplicaciones de periodo con una calculadora HP y descubrió que había una regularidad en el modo de producirse la cascada de duplicaciones, que permitía predecir el momento en que se producía la duplicación siguiente. Para ver qué significa esto exactamente, recordemos que con la aplicación logística el fenómeno de la duplicación de periodo comienza a partir de k = 3. Por tanto, el intervalo (3, 4) es la zona donde se produce el caos. Denotemos por k_1 el valor del parámetro para el que se produce la primera duplicación de periodo, k_2 el valor para el que se produce la segunda, etc. Feigenbaum observó que las diferencias $k_{n+1} - k_n$ decrecen de una forma aproximadamente geométrica de razón $r = 4.669201^{-1}$. El número 4.669201 se llamó la constante de Feigenbaum o constante del caos, debido a que, y esto es lo realmente sorprendente, este mismo extraño comportamiento (¡pero regular!) no sólo es válido para la aplicación logística, sino también para las iteraciones de cualquier aplicación definida sobre el intervalo (0,1) que presente sólo una joroba. Este descubrimiento se debe al físico Feigenbaum y fue el primer indicio de que algunos de los modelos del caos podían ser universales; es decir, no específicos para ejemplos particulares, sino representativos de una clase entera de sistemas dinámicos.

En los años siguientes se sucedieron hechos similares en otras disciplinas. Se descubrió caos determinista en los registros de epidemias de sarampión en Nueva York. Los biólogos moleculares empezaron a concebir las proteínas como sistemas en movimiento. Los economistas exhumaron datos pretéritos sobre el precio de valores cotizados en bolsa y emprendieron un género nuevo de análisis. Se crea el clima apropiado para que se abra paso la idea de que las asombrosas estructuras que están aflorando no son exclusivas de una ciencia en particular, sino que las leyes de la complejidad son en gran medida universales, uniformemente válidas para un gran número de sistemas.

En las dos últimas décadas, el caos determinista se ha convertido en el nombre de un movimiento que crece aceleradamente y traspasa las fronteras de las disciplinas científicas. Algunos de sus defensores más radicales declaran que la teoría del caos es la tercera revolución de la física del siglo XX. Las dos anteriores son la relatividad y la mecánica cuántica. La relatividad eliminó la ilusión del espacio y el tiempo absolutos de Newton; la teoría cuántica arruinó el sueño del mismo sabio de un proceso de medición controlable; y el caos barre la fantasía determinista de Laplace. De las tres revoluciones, el caos importa al mundo que vemos y tocamos, a los objetos de dimensión humana. Los sistemas más sencillos se conciben ahora como capaces de suscitar arduos problemas de predecibilidad. Sin embargo, el orden se presenta de forma espontánea en tales sistemas: caos y orden simultáneamente.

Ponemos fin a esta especie de vista panorámica de la teoría del caos con un breve resumen del desarrollo experimentado por la teoría matemática desde Poincaré y sus sucesores, a comienzos del siglo XX, citando sólo los nombres más sobresalientes:

Liapunov (1857-1918), en su Tesis Doctoral (1892), introdujo los conceptos de estabilidad del movimiento, las llamadas funciones de Liapunov para establecer la estabilidad de un sistema, y un conjunto de números, llamados hoy exponentes de Liapunov, que proporcionan un método para detectar el caos. La Tesis estaba en ruso y no se publicó en inglés hasta 1966 con el título *Stability of motion.*

Andronov, Vitt y Khaikin estudiaron los osciladores no lineales.

La escuela rusa fundada por Andrei Kolmogorov (1903-1987) ha hecho numerosos descubrimientos fundamentales inspirados en la teoría cinética de la dinámica de los gases. En particular, tomó la definición de entropía de la termodinámica y la definió para un sistema dinámico arbitrario. Uno de los criterios más fiables para el caos es el criterio de Kolmogorov-Sinai sobre la entropía no nula.

Arnold dio un importante impulso al desarrollo de la teoría de los sistemas llamados hamiltonianos.

A principios de los sesenta, el topólogo americano Stephen Smale retomó la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales desde donde la habían dejado Poincaré y Birkhoff (1911). Estaba considerado como el topólogo más destacado del momento.

La topología, iniciada por Poincaré, había avanzado notablemente durante el medio siglo transcurrido, pero la mayoría de los topólogos habían olvidado que la topología en parte provenía de problemas físicos. Smale, sin embargo, no lo había olvidado. Relacionando la topología y los sistemas dinámicos, hacía posible visualizar el comportamiento global del sistema, al contrario del enfoque anterior que era, fundamentalmente, local. Smale, en lugar de fijarse en una trayectoria concreta, se concentra en el comportamiento global de todo el sistema. Los sistemas bidimensionales continuos no ofrecían problema alguno, tras la aparición del Teorema de Poincaré-Bendixon, que establece las formas típicas que pueden presentar tales sistemas. Se plantea el problema de encontrar las formas típicas de comportamiento de los sistemas tridimensionales. Siguiendo ciertas ideas de los años treinta de Andronov y Pontryagin, para el caso bidimensional, estableció el concepto de sistemas estructuralmente estables, válido para cualquier dimensión. Estos sistemas se caracterizan porque su topología no cambia si se alteran las ecuaciones que lo describen en una cantidad muy pequeña. Se propuso encontrar la relación de formas típicas para esta clase de sistemas. Smale se da cuenta de que usando las secciones de Poincaré, podía estudiar lo que sucede en un sistema dinámico continuo de dimensión n + 1, viendo lo que sucede a un sistema dinámico discreto de dimensión n. Una de sus aportaciones fundamentales es la llamada herradura de Smale (1967) que nos ofrece un sistema dinámico discreto (teórico) de dimensión dos que es caótico. Estudiando este modelo teórico, para lo que sólo necesita geometría y topología, pero no ordenador, fue capaz de hacer progresos donde Poincaré había abandonado, y esto llevó a una explosión de nuevas ideas en la teoría de los sistemas dinámicos. La herradura de Smale es una transformación bidimensional que modifica el espacio de fases reduciendo, doblando y estirando. Al aplicarla una y otra vez, jamás podremos saber dónde terminarán dos puntos próximos, debido a los sucesivos plegados y estiramientos. Una forma simple de explicar cómo opera esta transformación es la siguiente: si la aplicamos a determinado rectángulo, aprieta sus partes superior e inferior hasta obtener una barra horizontal, y después estira un extremo de ésta y lo dobla para crear una figura similar a una herradura; finalmente, imaginamos la herradura encajada adecuadamente en el rectángulo original. La herradura proporcionó una elegante analogía visual de la dependencia sensitiva de las condiciones iniciales y fue la primera de muchas formas geométricas nuevas que ofrecieron a matemáticos y físicos una intuición desconocida de las posibilidades del movimiento. Al principio, como criatura de una ciencia pura como la topología, no parecía atraer a los físicos que la consideraban demasiado artificial para ser útil. Sin embargo, unos diez años después, los físicos se dan cuenta de que los trabajos de Smale habían devuelto toda una rama de la matemática pura al mundo real.

4. GEOMETRÍA FRACTAL

Entre los años cincuenta y setenta, Benoit Mandelbrot escribió una serie de trabajos en los que mostraba cómo muchos fenómenos de la naturaleza tenían en común la propiedad denominada autosemejanza (una pequeña parte, previamente magnificada, es semejante al todo). En algunos casos esta semejanza es completa y en otros sólo aproximada. Un ejemplo muy simple lo constituye la curva definida por primera vez por el matemático sueco Koch (1904). Esta curva se obtiene en pasos sucesivos de la siguiente forma: se parte de un triángulo equilátero, cada uno de cuyos lados es dividido en tres partes iguales; se dibujan triángulos equiláteros con base en cada una de las tres subdivisiones centrales de los lados y se suprimen dichas bases, resultando una estrella de seis puntas; en el paso siguiente, se repite esta operación sobre cada uno de los lados de la quebrada resultante y se continúa así ad infinitum. Es fácil comprobar que, en cada paso, la longitud de la curva se multiplica por 4/3, por lo que la curva de Koch es una curva cerrada de longitud infinita que, sin embargo, encierra un área finita. Esto resulta, a primera vista, paradójico y, ciertamente, desconcertó en su momento a muchos matemáticos. Se la consideraba una curva patológica y distinta de todo lo que se podía encontrar en la naturaleza. Por esta razón, no llamó la atención en la época; de hecho, otros matemáticos construyeron ejemplos distintos: la curva de Peano, las alfombras de Sierpinski, etc. En 1975, estas formas geométricas fueron denominadas fractales por Mandelbrot.

Hasta 1951, los fractales se consideraban meros artificios matemáticos. Pero, poco a poco, se va abriendo paso la idea de que, por el contrario, lo fractal es algo común en la naturaleza. El primer trabajo de Mandelbrot mostró que los errores en la transmisión de datos se producen en ráfagas similares a las del conjunto fractal conocido con el nombre de conjunto de Cantor. En 1967, observa que una línea costera rocosa como la de Bretaña puede verse como un fractal, sólo que en este caso la autosemejanza no es completa. Plantea la pregunta ¿qué longitud tiene la línea de costa de Bretaña?. La respuesta es: depende de la longitud de la vara de medir. En efecto, consideremos el siguiente método posible de medición. Un agrimensor abre el compás de cuadrante, lo fija en la amplitud de un metro y recorre con él la línea costera; la cantidad resultante de metros es sólo una aproximación de la longitud auténtica, porque el agrimensor prescinde de las concavidades y retorcimientos menores de un metro; no obstante, anota la cantidad obtenida. A continuación, fija el compás con la amplitud de un palmo y repite el procedimiento. Obtiene así una longitud algo mayor, porque el compás habrá seguido mejor los detalles y anota el resultado. Después, gradúa el compás en 10 cm y empieza de nuevo. Parece lógico esperar que estas medidas que vamos obteniendo converjan hacia la auténtica longitud. Sin embargo, Mandelbrot descubrió que, a medida que la escala de medición se hace más pequeña, la longitud medida de un litoral aumenta sin límite.

La autosemejanza se da con frecuencia en los vegetales. Uno de los casos más ejemplares lo ofrece el helecho. Cada una de sus hojas está formada por una serie de frondes que salen a izquierda y derecha. A su vez, cada fronde está formado por una serie de frondes de segundo orden y así sucesivamente. Un fronde o un fronde de segundo orden, convenientemente ampliados, son completamente semejantes al helecho entero. Lo mismo ocurre con el brécol y la mayoría de los árboles.

Mandelbrot introdujo el concepto de dimensión fractal (fraccionaria) para ponderar cualidades como el grado de escabrosidad, discontinuidad o irregularidad de un objeto. Por ejemplo, una costa serpenteante posee cierto grado característico de escabrosidad. Mandelbrot especificó modos de calcular la dimensión fractal de los objetos reales, dada una técnica para construirlos. Una condición que debía cumplir el objeto era que debía conservar el grado de irregularidad a diferentes escalas. La dimensión fractal resultó ser la vara idónea para medirlos. En algún sentido, el grado de irregularidad se corresponde con la eficacia del objeto para ocupar espacio. Una simple línea euclidiana no ocupa ninguno, pero sí lo hace la curva de Koch de longitud infinita encerrando una superficie finita. Es algo más que una línea y algo menos que un plano. Mandelbrot utilizó técnicas matemáticas de principios del siglo XX (debidas a Hausdorff y Besicovitch), que habían sido olvidadas, para caracterizar la dimensión fractal. Los matemáticos de esa época llegaban enseguida a una barrera de cálculo enrevesado, semejante a la que se oponía a los biólogos desprovistos de microscopio. Mandelbrot usó su prodigiosa imaginación geométrica y la potencia de los ordenadores. Pero matemáticos y físicos seguían sin prestar atención a sus ideas.

Por el contrario, Scholz, un especialista en la forma y estructura de la tierra sólida, empezó a interesarse en ellas. Desde hacía algún tiempo, se sabía que la distribución de los terremotos, intensos y débiles, obedecía a una especial pauta matemática, la misma precisión que regía la distribución de las rentas individuales en una economía de mercado libre. Lógicamente, era importante descubrir qué clase de procesos explicaba tal regularidad. Scholz comprobó que la geometría fractal suministraba un procedimiento muy eficaz para descubrir la redondez entrecortada de la superficie terrestre. La misma idea tenían los metalúrgicos en relación con las diferentes clases de acero (la dimensión fractal de su superficie suele proporcionar información sobre su fuerza). Las descripciones fractales encontraron aplicación inmediata en problemas relacionados con las propiedades de las superficies que están en contacto. Estos contactos tienen propiedades completamente independientes de los materiales que las componen: hay cualidades que dependen del carácter fractal de las protuberancias, y éstas de otras protuberancias, y así en adelante. Una consecuencia sencilla, pero fundamental, de la geometría fractal de las superficies es que éstas, cuando se hayan en contacto, no se tocan en todas sus partes. La condición de la protuberancia a todas las escalas lo impide.

En 1983, apareció publicado el libro de Mandelbrot titulado *The Fractal Geometry of Nature* que tuvo un gran éxito. Poco tiempo después**,** varios biólogos teóricos notaron que la organización fractal imponía estructura en todo el cuerpo humano. Eran fractales el sistema colector urinario, el conducto biliar, la red de fibras especiales en el corazón que transportan impulsos eléctricos a los músculos contráctiles, etc. Esta última estructura, que los cardiólogos llaman red de His-Purkinje, inspiró una línea de investigación de importancia. Varios cardiólogos, que simpatizaban con el caos, descubrieron que el espectro de frecuencias del ritmo cardíaco se ajustaba, como los terremotos y los fenómenos económicos, a leyes fractales y aseguraban que una de las claves para comprenderlo era la organización fractal de la red de His-Purkinje, laberinto de caminos ramificados constituido de modo tal que era similar a sí mismo a escalas cada vez más pequeñas. ¿Cómo logra la naturaleza estructurarse para desarrollar una arquitectura tan complicada?. Mandelbrot pensaba que tal vez las transformaciones simples que producen las figuras de Koch, Peano o Sierpinski, tengan homólogas en las instrucciones codificadas en los genes. El ADN no puede concretar la enorme cifra de bronquios, bronquiolos y alvéolos o la peculiar estructura del árbol resultante; en cambio, puede especificar un proceso repetido de bifurcación y desarrollo. Los biólogos teóricos hacían especulaciones, en morfogénesis, relativas a que la disposición fractal de las escalas era universal y fundamental para comprender cómo se codifican y procesan aquellas pautas.

Por estos años, las obras de Mandelbrot son éxitos rotundos entre un público no especializado y es invitado a impartir conferencias por todo el mundo. Sin embargo, continúa sin recibir crédito entre los matemáticos porque sus trabajos contenían más bien intuiciones. Pero las aplicaciones se suceden en muy diversos campos, llegando incluso a Hollywood con la creación de paisajes de gran realismo, tanto terrestres como extraterrestres, en los efectos especiales de películas como *Star Trek II o The return of the Jedi.*

A mediados de los setenta, las pautas descubiertas por Robert May en su estudio de poblaciones de insectos con límites intrincados entre el comportamiento ordenado y el caótico, poseían una regularidad insospechada, sólo descifrables si se atendía a la relación de las escalas amplias con las pequeñas. Se comprobó que eran fractales las estructuras que proporcionaban la clave de la dinámica caótica. En la actualidad, es costumbre definir un atractor extraño como uno que es fractal y resulta que la dimensión fractal (ese misterioso número) es una propiedad clave del atractor que gobierna varias características cuantitativas de la dinámica.

En 1980, Mandelbrot investigó el comportamiento de las iteraciones sucesivas de la función $f(z) = z^2 + c$, donde tanto z como c son números complejos. Recordemos que los números complejos se representan gráficamente como puntos de un plano, una vez que se ha escogido un sistema de referencia cartesiano. El resultado de su investigación con el ordenador fue un extraordinariamente complicado y hermoso subconjunto del plano, al que más tarde se dio el nombre de su descubridor. Su complejidad es tal que ha sido calificado como el objeto más complejo que la matemática ha elaborado. El conjunto de Mandelbrot, M, está formado por todos los números complejos c tales que las sucesivas iteraciones de f(z), empezando en 0, permanecen acotadas; es decir, la sucesión siguiente de números complejos está acotada

$$0^2 + c,\ c^2 + c,\ (c^2 + c)^2 + c, \ldots,$$

si c pertenece al conjunto de Mandelbrot. Se demuestra que, en tal caso, sus términos están acotados en módulo por 2.

En las primeras décadas del siglo XX, los matemáticos franceses Pierre Fatou y Gaston Julia consideraron unos conjuntos (conjuntos de Julia) que guardan una estrecha conexión con el conjunto de Mandelbrot. Obtuvieron varias propiedades de los conjuntos de Julia pero, ayudados sólo de lápiz y papel, no llegaron a tener idea de cuál sería su forma.

En 1980, Mandelbrot decidió ver el aspecto del conjunto M valiéndose de un ordenador. En la pantalla apareció un sorprendentemente intrincado y hermoso conjunto fractal. No podemos esperar que el ordenador nos ofrezca un dibujo perfecto del conjunto M, debido a su extrema complejidad. Pero hay un medio de hacerse una idea bastante buena de su forma. Consideramos en el plano complejo una red de cuadrados diminutos, cada uno de los cuales se corresponde con un píxel en la pantalla del ordenador. Si la sucesión de iteraciones correspondiente al número c cuya representación gráfica es el vértice inferior izquierdo de un cuadradito supera a 2, antes de haber realizado un número de iteraciones prefijado, dejamos sin colorear el píxel que le corresponde. Esto garantiza que el número c no pertenece al conjunto M y dejamos sin colorear el pixel entero para reflejar este hecho. Si la sucesión no supera a 2 después de realizar las iteraciones establecidas, hay alguna probabilidad de que el número c pertenezca al conjunto M y el ordenador colorea el pixel de negro. El número máximo de iteraciones que estamos dispuestos a hacer para tomar la decisión de colorear o no el pixel tiene que ser establecido previamente. Para obtener una representación aceptable de M, debemos escoger dicho número suficientemente grande para que la imagen resultante sea lo más precisa posible, pero que ello no suponga un tiempo de ordenador demasiado elevado.

A lo largo de la frontera del conjunto M hay numerosas y diminutas protuberancias semejantes al conjunto entero. De hecho, se ha demostrado que en todo círculo con centro en cualquier punto de dicha frontera, por pequeño que sea su radio, existen infinitas y minúsculas protuberancias semejantes al cuerpo principal. Muchas de estas protuberancias no serían observadas con este procedimiento, si el tamaño del pixel es mayor que la propia protuberancia. Una forma de ver más de la estructura del conjunto M consiste en hacer que el ordenador asigne colores a los puntos que están fuera de M. El ordenador asignará un color diferente al píxel, dependiendo del número de iteraciones que hay que realizar hasta superar a 2. En este caso, aparece en la pantalla del ordenador una figura de una complejidad y hermosura extraordinarias que parece más la obra de un artista que la expresión gráfica de determinadas relaciones matemáticas.

Figura 2. El conjunto de Mandelbrot

Figura 3. Un conjunto de Julia

En 1982, A. Douady y J. Hubbard probaron que M es un conjunto conexo. Esto significa que no puede dividirse en dos partes completamente separadas. La demostración usa delicados argumentos de análisis complejo que prueban que hay filamentos extremadamente finos conectando las protuberancias. Este teorema muestra el poder de la demostración matemática pues ningún programa de ordenador del tipo que estamos comentando podrá captar todos estos filamentos, pero la demostración garantiza que están ahí.

Terminamos el capítulo, describiendo el método de M. Barnsley para generar fractales. A finales de los ochenta, basándose en ideas de J. Hutchinson, Barnsley desarrolló un método muy simple para generar fractales. La importancia de este método radica en el hecho de que podía describir estas complicadas formas por medio de unos pocos números; por tanto, resulta de extraordinario interés en el problema de la compresión de imágenes. Dada la enorme cantidad de imágenes que diariamente se transmiten o simplemente se almacenan en la sociedad actual, es imprescindible encontrar la forma de reducir el espacio de memoria necesario para su almacenamiento o el número de bits necesarios para su transmisión electrónica. Tradicionalmente, esto se lleva a cabo estableciendo el color de cada uno de los pixeles de que consta la imagen. El método de Barnsley usa cuatro transformaciones afines cada una de las cuales se puede describir con sólo seis números. Es decir, con sólo 24 números podemos describir la imagen completa. Estas transformaciones son: traslación, rotación, simetría y homotecia. El ordenador dibuja cada imagen punto a punto; cada vez que marca un punto, para marcar el siguiente, elige de una forma aleatoria una de las cuatro transformaciones y la aplica al punto. El ordenador continúa de esta forma un número de veces prefijado en el programa. En el caso del helecho, que es el logotipo de la empresa fundada por Barnsley, tras marcar 20.000 puntos, se obtiene una imagen bastante realista, al cabo de unos pocos segundos en un buen ordenador. El método puede aplicarse con éxito a imágenes no necesariamente fractales. En estos casos, se divide la imagen en un número finito de trozos que sí lo sean por separado y se aplica el método a cada uno de ellos.

Figura 4. Imagen de un helecho obtenida por el método de Barnsley

III. CONSIDERACIONES FINALES

El objetivo de la ciencia es encontrar modelos de la naturaleza con el propósito de entender cómo se producen las hechos, mientras que la tecnología, en general, consiste en la aplicación de los modelos científicos para construir aparatos capaces de mejorar la calidad de vida. En las ciencias de la naturaleza, los modelos matemáticos han jugado un papel importante durante los últimos siglos pero, indudablemente, el ordenador ha mejorado de una forma drástica la capacidad de aplicar esos modelos matemáticos. Se está haciendo realidad la visión de von Neumann de reemplazar los experimentos físicos por simulaciones con ordenador. De esta forma, se pueden estudiar problemas para los que no es posible realizar los experimentos físicos tradicionales. La enorme velocidad con que se desarrolla la tecnología informática, nos permite esperar que en pocos años los científicos, apoyados en un software significativamente mejorado y en ordenadores de una potencia prodigiosa, puedan realizar descubrimientos que hoy sólo podemos soñar. ¿Conseguirá la tecnología producir ordenadores capaces de hacer profundos descubrimientos matemáticos sin la ayuda del hombre?

Para mejorar la idea de la matemática que tiene la sociedad actual, es fundamental que, incluso antes de la enseñanza secundaria, los matemáticos nos esforcemos en mostrar que las matemáticas están aún haciéndose, y que miles de matemáticos por todo el mundo están trabajando y resolviendo una extraordinaria variedad de problemas, muchos de ellos de considerable impacto en la vida cotidiana de la gente. El principal reto de los profesores en todos los niveles es conseguir que ese aspecto llegue al estudiante. Hechos que antes sólo eran asequibles para un grupo reducido de grandes matemáticos son ahora asimilados por una masa enorme de alumnos, y esto es posible porque se han desarrollado nuevos conceptos y nuevas técnicas. Este es el mejor antídoto contra la visión de la matemática como una disciplina muerta. En mi opinión, la mayoría de los profesionales de la matemática no ponen suficiente interés en la cuestión de cómo la matemática se relaciona con las otras ciencias y el conocimiento apropiado de esta relación es indispensable para alcanzar el objetivo de presentar a la matemática como la disciplina de gran vitalidad que es.

Debido a su papel de herramienta universal y a su potencia en la formación intelectual de los estudiantes, las matemáticas siempre han tenido, tienen y tendrán un lugar destacado como disciplina escolar. Como señalan Rey Pastor y Puig Adam, “la enseñanza de la matemática en la escuela primaria tiene un carácter predominantemente instrumental y se propone ante todo adiestrar a los niños en el cálculo numérico, proveyéndolos de conocimientos necesarios o útiles para la vida como son, por ejemplo, el sistema métrico, el cálculo comercial, el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos usuales, etc.” Respecto a la enseñanza secundaria indican que su fin es fundamentalmente educativo; se espera conseguir que las cualidades de la matemática (razonamiento lógico, precisión, rigor, abstracción y formalización) acaben contribuyendo a que el alumno aprenda a enfrentarse a los problemas de una forma racional, distinguiendo lo fundamental de lo meramente accesorio y adoptando una actitud crítica. En cuanto a la enseñanza superior, afirman que su objetivo es profesional en el sentido más amplio.

El papel central de la matemática en la formación de los valores de la razón no debe entenderse como un argumento en menoscabo de las demás disciplinas escolares, ni de las denominadas científicas, ni de las llamadas humanidades. A fin de cuentas, si se acepta esta clasificación, hay que considerar las matemáticas como un puente entre ambas. De hecho, no es deseable concebir esos mundos como separados o incomunicados.

Pese a ese papel singular que las matemáticas tienen en el sistema educativo o quizás debido precisamente a eso, su enseñanza no ha alcanzado niveles satisfactorios para las administraciones educativas, ni para los padres, ni para los profesores. Hay que admitir que las matemáticas no han supuesto una fuente de placer intelectual para la mayoría de los alumnos. Son muy diferentes las experiencias que cada persona ha tenido con las matemáticas y muy distintos los recuerdos que guardan, pero muchos opinarían como Bertrand Russell que dijo en cierta ocasión: "la aritmética es el coco de la niñez, recuerdo que lloraba amargamente por no poder aprender la tabla de multiplicar". Pero, corregir esta situación insatisfactoria no es tarea fácil, debido a que los factores que hay que revisar son muy diversos: la formación del profesorado, los contenidos, el número de horas lectivas dedicadas a las matemáticas, el sistema de valores que se está vendiendo a los jóvenes., etc.

Es indispensable mejorar la formación del profesorado, tanto en lo que se refiere a los contenidos como en lo concerniente al conocimiento de las nuevas aplicaciones y los avances de la investigación en didáctica de la matemática. Ésta debe presentarse cargada de significado para los alumnos y no reducidas al uso sistemático de algoritmos. La enseñanza de la matemática, al igual que la propia matemática, debe nutrirse de la realidad y ser tan dinámica como ella misma.

Por otro lado, los contenidos deben someterse a una profunda revisión para adaptarlos a las nuevas demandas de la ciencia y la ingeniería. Acabamos de ver cómo la aparición de los ordenadores ha cambiado la manera de hacer matemática, especialmente en el caso de la matemática aplicada. Los ordenadores permiten una computación rápida, segura y barata que ha dado nuevas alas a la matemática. El papel del ordenador en la investigación es de la mayor importancia en un gran número de disciplinas matemáticas. Los efectos de estos cambios sobre la enseñanza no son menos importantes pero, desgraciadamente, hasta el momento no se ha hecho el esfuerzo necesario para adaptarse a la nueva era. Salvo contadas excepciones, no se ha conseguido desterrar el método tradicional de enseñanza de la matemática con lápiz y papel y, en buena medida, la docencia que se imparte sigue dando la espalda al ordenador. Es cierto que, actualmente, una parte de los créditos prácticos de la mayoría de las asignaturas se desarrolla, con un grupo reducido, en el aula de informática. Pero estos créditos, llamados créditos prácticos de laboratorio, sólo representan un pequeño porcentaje del número total, por lo que el número de clases que se imparten con ordenador es anecdótico en muchos casos. Además, asignaturas como Estadística y Métodos Numéricos deben desarrollarse casi por completo en el aula de informática. Nuestra Universidad deberá hacer todo el esfuerzo que sea posible para adaptarse a la nueva realidad.

Durante muchos siglos, la física ha sido compañera de aventuras de la matemática y el beneficio ha sido mutuo durante ese dilatado periodo de tiempo. En ocasiones, la física ha planteado un problema a la matemática y ha habido que esperar a que se creara la teoría matemática necesaria para poder dar respuesta al problema; este es el caso del cálculo infinitesimal creado por Newton y Leibniz, que permitió el desarrollo de la mecánica que ahora llamamos clásica. Sin embargo, en otros casos, algunos de los cuales hemos mencionado con anterioridad, la teoría matemática ya estaba elaborada cuando la física lo necesitó. No obstante, como hemos tenido ocasión de ver, en la época más reciente se ha producido la universalización de las matemáticas. En la mayoría de los campos científicos, los modelos matemáticos se aplican con éxito y hasta las más inesperadas disciplinas matemáticas encuentran aplicación en las ciencias y en las ingenierías. Es decir, las matemáticas (y no sólo los métodos estadísticos o numéricos) se hacen necesarias en nuevos campos.

Paradójicamente, se está produciendo en la actualidad un proceso de reducción de la presencia de las matemáticas en los planes de estudios de las diversas titulaciones universitarias. Con la creencia de que así se conseguirán titulados universitarios con una preparación más adecuada en sus respectivos campos, hay una tendencia imparable hacia una especialización radical en todas ellas. Pero una excesiva compartimentación de las disciplinas científicas no ayuda al desarrollo de la ciencia, ni de la técnica. Pero aún es peor el panorama, si esa extrema especialización se consigue en detrimento de una buena formación matemática, indispensable para un profesional de la ciencia o la técnica en el siglo XXI. La buena salud de la ciencia exige un cruce de ideas entre los científicos de los distintos campos. Esto sólo es posible mejorando la formación científica básica de los matemáticos y ofreciendo una formación matemática más adecuada a los científicos.

BIBLIOGRAFÍA

ALEKSANDROV, A. D.-KOLMOGOROV, A. N. y otros,”La Matemática: Su contenido, métodos y significado”. Ed. Añianza Universidad (1973).

BELL, E. T., “Historia de las Matemáticas”. Ed. Fondo de Cultura Económica (1992).

BOCHNER, S., “El papel de las Matemáticas en el desarrollo de la ciencia”. Ed. Alianza Universidad (1991).

BOYER, C. B.,”Historia de las Matemáticas”. Ed. Alianza Universidad Textos (1986).

CAÑÓN LOYES, C. “La Matemática: Creación y descubrimiento”. Ed. Universidad Pontificia de Comillas (1993).

CORBALÁN, F., “La Matemática aplicada a la vida cotidiana”. Ed. Biblioteca de Aula 6 (1995).

CUENA, J. Y otros,”Inteligencia Artificial: Sistemas Expertos”. Ed. Alianza (1986).

DAVIS, D. M., “The Nature and Power of Mathematics”. Ed. Princenton University Press (1993).

DAVIS, P. J.- HERSH, R., “El sueño de Descartes”. Ed. Labor (1989).

DAVIS, P. J.- HERSH, R., “Experiencia Matemática”. Ed. Labor (1988).

DIEUDONNÉ, J., “En honor del espíritu humano. La matemática hoy”. Ed. Alianza Universidad (1989).

ENGQUIST, B-SCHMID, W.,”Mathematics Unlimited-2001 and beyond”. Ed. Springer (2001).

FIELD, M.-GOLUBITSKY, M.,”Simmetry in Chaos”. Ed. Oxford University Press (1992).

FREY, G.,”La matematización de nuestro Universo”. Ed. García del Toro, Madrid (1972).

GLEICK; J.,”Caos”. Ed. Seix Barral (1988).

HARDY, G. H.,”Apología de un Matemático”. Ed. Nivela (1999).

KLINE, M.,”El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días”. Ed. Alianza Universidad (1992).

LANG, S.,”El placer estético de las matemáticas”. Ed. Alianza Universidad (1992).

LORENZ, E.,”La esencia del caos”. Ed. Círculo de Lectores (1993).

MARTÍN, M. A.-MORÁN, M.-REYES. M.,”Iniciación al caos”. Ed. Síntesis (1995).

MORSE, P. M.-KIMBALL, G. E.,”Methods of Operations Research”. Ed. John Wiley&Sons (1951).

NICOLIS; G.-PRIGOGINE, I.,”La estructura de lo complejo”. Ed. Alianza Universidad (1994).

PAZOS, J.,”Inteligencia Artificial”. Ed. Paraninfo (1987).

RUELLE, D.,”Azar y Caos”. Ed. Alianza Universidad (1993).

SOURIAU, P.,”Théorie de l’Invention”. París (1881).

STEWART, I.,”¿Juega Dios a los dados?”. Ed. Grijalbo Mondadori (1991).

STEWART, I.,”El Laberinto Mágico”. Ed. Drakontos (2001).

TATON, R.,”Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos”. Nueva Colección Labor 53.

VÁZQUEZ, J. L.,”The importante of Mathematics in the development of Science and Technology”.Boletin de la Sociedad Española de Matemática Aplicada 19 (2001), pp. 69-112.

ÍNDICE

I. REFLEXIONES SOBRE LA MATEMÁTICA

1. Las características esenciales de la matemática.
2. Matemática pura y aplicada
3. El motor de la investigación en matemáticas

II. LAS MATEMÁTICAS EN LA ERA DEL ORDENADOR

1. Historia de las máquinas de calcular
2. Criptología
3. La teoría del caos determinísta
4. Geometría fractal

III. CONSIDERACIONES FINALES

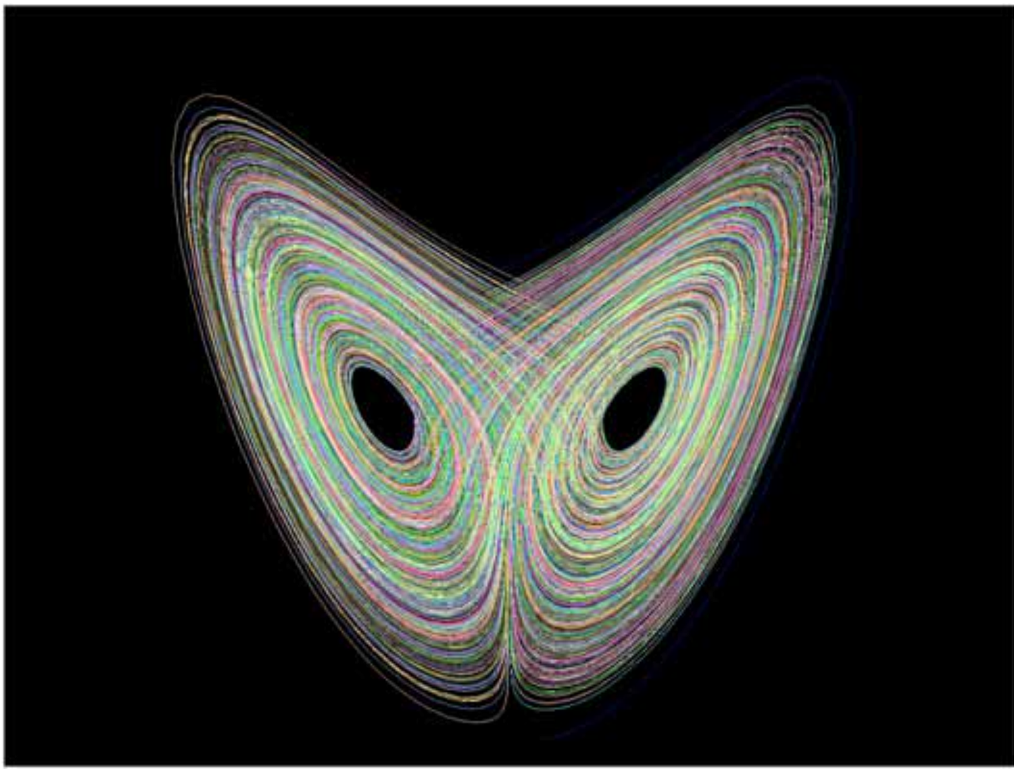

Figura 1. El atractor extraño de Lorenz

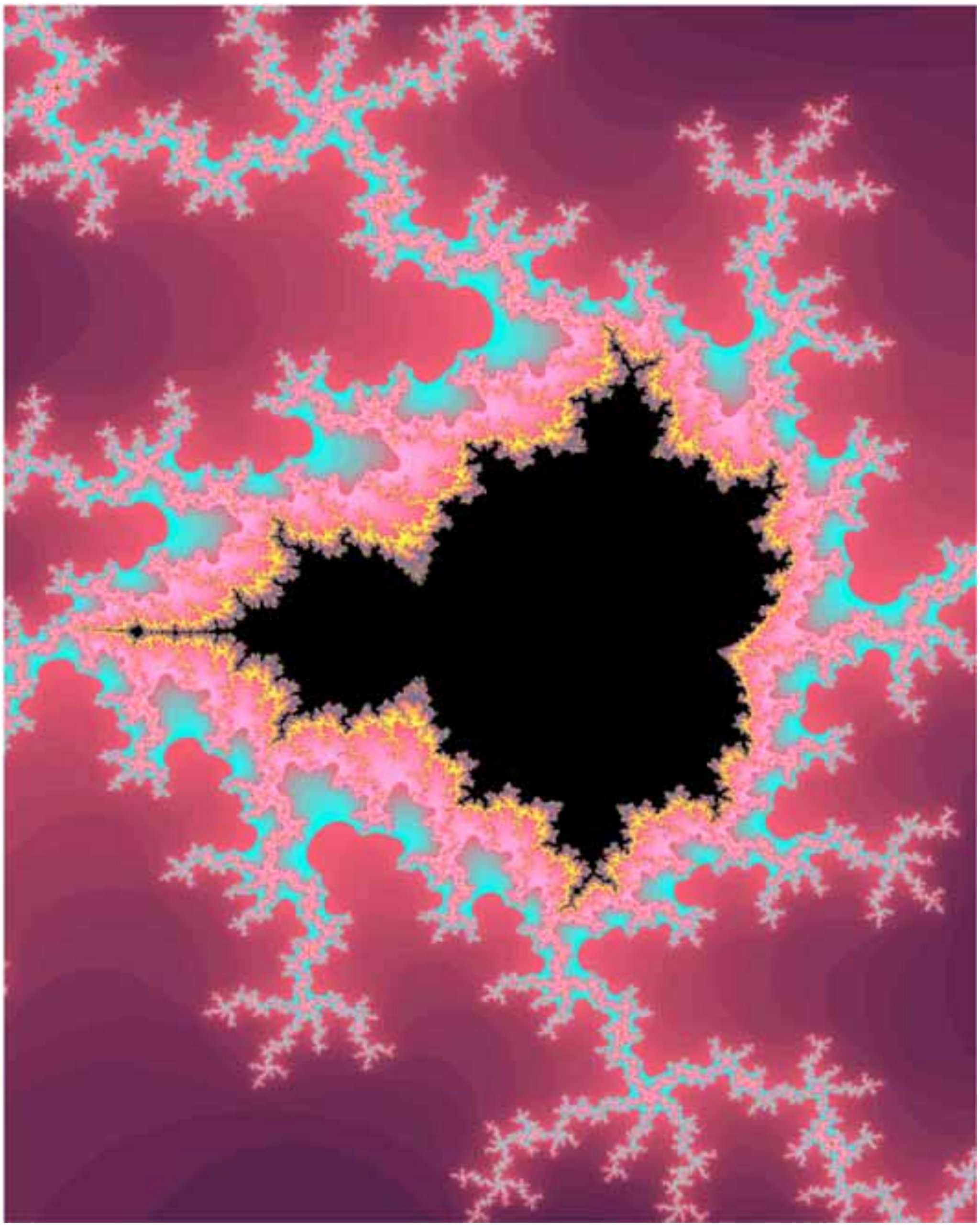

Figura 2. El conjunto de Mandelbrot

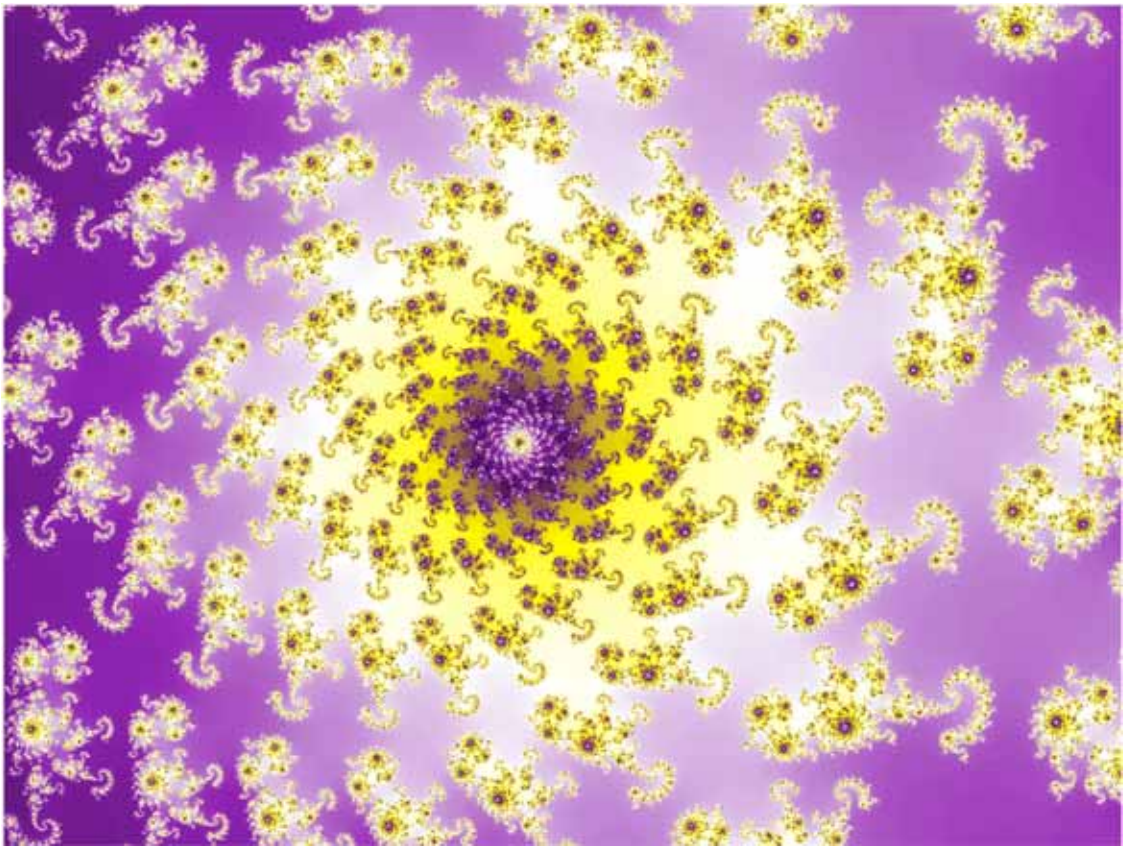

Figura 3. Un conjunto de Julia

Figura 4. Imagen de un helecho obtenida por el método de Barnsley