LAS MATEMÁTICAS: SU HISTORIA, EVOLUCIÓN Y APLICACIONES

José M. Méndez Pérez

Excmo. Sr. Presidente del Gobierno de Canarias,
Excmo. Sr. Rector Magnífico de la Universidad de La Laguna,
Excmo. Sr. Rector Magnífico de la Universidad de Las Palmas de G.C.
Excmas. e Ilmas. Autoridades,
Miembros de la comunidad universitaria,
Compañeros y amigos claustrales,
Señoras y Señores,

1. INTRODUCCIÓN

Decía el matemático alemán Hermann Hankel que “en la mayoría de las ciencias una generación derriba lo que otra ha construido y lo que una ha hecho otra lo deshace. Sólo en matemáticas cada generación añade un nuevo piso a la vieja estructura”. Trataremos en esta primera lección del curso académico 2003-2004 de ver cuánta razón tenía Hankel, mostrando la evolución a través de la historia de la humanidad de unos conocimientos en principio muy rudimentarios y ligados a los problemas cotidianos, que terminarían por convertirse en ciencia, la más antigua de todas, hasta el vertiginoso desarrollo que ha adquirido en nuestros días. Aclararemos a lo largo de esta disertación que los propios matemáticos tienen distintas formas de entender su ciencia, sobre todo cuando se presenta el dilema matemáticas puras o matemáticas aplicadas. Y finalizaremos analizando algunas situaciones que se dan en otras ramas del saber donde se abusa del lenguaje matemático sin que se justifique la necesidad de su utilización.

2. HISTORIA Y EVOLUCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

Las matemáticas son la ciencia más antigua. Habría que remontarse a los albores de la humanidad para encontrar ya los primeros vestigios del número y de las formas geométricas. Ante las necesidades de la vida cotidiana, por ejemplo saber cuántas cabezas de ganado formaban su rebaño, el hombre prehistórico se vio obligado a realizar muescas o marcas en palos, árboles o huesos, como atestiguan los descubrimientos arqueológicos. Estos descubrimientos, algunos de los cuales se fechan en más de 30.000 años, muestran que la idea de número es muy anterior a descubrimientos tecnológicos, como el uso de metales o de vehículos con ruedas, y mucho más antiguo que el arte de la escritura. Las figuras, las formas geométricas, aparecen claramente en los productos que elaboraban en alfarería, cestería y tejidos.

Al pasar del paleolítico al neolítico, se crea una nueva organización familiar, social y económica que demanda una mayor precisión en el contar y el medir. Las civilizaciones que se caracterizan por el uso de los metales surgen en grandes valles fluviales, como los que hay en Egipto, Mesopotamia, China e India. Se dispone de dataciones fiables de la historia de los pueblos que vivieron en los valles del Nilo y del Eufrates y Tigris, no tanto en el caso chino o indio.

El sistema de numeración jeroglífico egipcio data de hace unos 5.000 años y está estructurado en una escala numérica decimal, mostrando las abundantes inscripciones que los egipcios estaban familiarizados con el manejo de números grandes [4].

El desciframiento de la Piedra Roseta, donde un mismo texto aparece en tres escrituras (griego, demótico y jeroglífico), permitió un rápido avance en el conocimiento de las antigua cultura egipcia. Una pequeña parte de los papiros de Rhind (también conocido como papiro de Ahmes, escriba que lo copió hacia el 1650 aC), de Kahum, de Berlín y de Moscú contienen abundante información sobre los conocimientos matemáticos de los egipcios, que se reducen a cuestiones aritméticas (utilizaban fracciones de numerador uno, planteaban problemas prácticos para formar a los alumnos y resolvían ecuaciones algebraicas lineales de primer grado) y geométricas (cálculo de algunas áreas y volúmenes), estando muy interesados en astronomía. Se aprecian algunas huellas de conocimientos trigonométricos y de semejanza de triángulos, con motivo de la construcción de las pirámides. En definitiva, los escribas y los sacerdotes serían unos personajes relevantes en la corte de los faraones. Sus conocimientos primitivos de las matemáticas harían de ellos personajes claves en el funcionamiento del entramado socio-económico de los antiguos egipcios. Podían medir el tamaño de los terrenos, la cantidad de cereales recolectados en las cosechas, los tributos a pagar a los faraones… Para el historiador griego Herodoto, la geometría nace en el valle del Nilo ya que, debido a las periódicas inundaciones que ocasionaba este río, desaparecían los lindes de los campos y había que reconstruirlos. En cambio, Aristóteles sostiene que se debe a los sacerdotes, que disfrutaban del ocio necesario para desarrollar cualquier conocimiento teórico. En todo caso, en las matemáticas egipcias no aparece ningún teorema ni demostración formal.

Otra gran civilización existía en el valle de Mesopotamia cuatro milenios antes de nuestra era, la llamada genéricamente civilización babilónica. El modelo de escritura cuneiforme creado por los sumerios quedó plasmado en tablillas de arcilla blanda que, una vez escritas, se cocían en hornos o se endurecían secándolas al sol. Estas tablillas, de las que se conservan decenas de miles, han soportado el paso del tiempo mucho mejor que los papiros egipcios, de modo que se posee una abundante documentación sobre la civilización babilónica, muy superior a la que se conserva de la tierra de los faraones.

En lo que nos concierne, que son las matemáticas, recordemos que usaban un sistema de numeración posicional, por lo cual no precisaban de muchos signos para representar los números, y que —en terminología moderna— su base era 60. Se desconoce el porqué de esta extraña elección, que da origen a un sistema de numeración sexagesimal y que aún hoy persiste en nuestro mundo decimal para medir ángulos y tiempo. ¿Razones de tipo astronómico? Quizás se adoptase la base 60 de forma consciente, por intereses exclusivamente metrológicos, puesto que esa unidad se puede dividir fácilmente en dos, tres, cuatro, cinco, seis, diez, doce, quince, veinte y treinta partes iguales, esto es, 60 permite diez subdivisiones exactas, mientras que nuestra base decimal sólo posee dos [4].

La superioridad de la aritmética y álgebra babilónicas sobre las egipcias es abrumadora. Dominaban las operaciones elementales, extendieron el principio posicional a las fracciones, idearon algoritmos para calcular raíces cuadradas y cúbicas con aproximaciones asombrosamente precisas, y escribieron tablillas con las potencias sucesivas de un número dado, que es el secreto de los logaritmos. En álgebra pasaron de la resolución de ecuaciones lineales de primer grado a sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado, incluso de grado tres. Se aceptaba que la civilización mesopotámica había alcanzado en aritmética y álgebra un desarrollo superior al de la egipcia —lo cual es evidente a la vista de lo que acabamos de decir— pero que ésta superaba a aquélla en geometría. Sin embargo, a raíz de los últimos descubrimientos, esta afirmación final es discutible, pues los babilonios conocían el teorema de Pitágoras, como se puede ver en una tablilla que contiene al menos quince ternas de números pitagóricos, mientras que dicho teorema no aparece en ningún documento que se conserve de la civilización egipcia.

Incluso en Grecia, los orígenes de las matemáticas están muy apegados a la realidad cotidiana: el comercio, el reparto de las herencias, la agrimensura... Nadie puede discutir este origen empírico de las matemáticas. Algo similar ocurre en la otra gran cultura de la antigüedad, en China. En el libro *Los nueve capítulos del arte de las matemáticas* (siglo I aC), donde se presentan problemas prácticos y sus soluciones, se puede observar el carácter calculista y utilitario de las matemáticas chinas de entonces.

Fue en Grecia, en un contexto cultural propicio, donde las matemáticas iban a experimentar un cambio profundo. Las matemáticas griegas comienzan con Tales de Mileto (640-546, s. VI aC). Fue un filósofo de la naturaleza, de cuya observación llegó a concluir que el universo está sumido en un proceso de transformación continua. Se le considera el primer científico, en el sentido estricto del término, por sus contribuciones astronómicas y matemáticas. Predijo un eclipse de sol que la moderna astronomía fija que tuvo lugar en el año 585 aC, lo que le confirió una gran fama y autoridad. Esta atribución acaso sea cuestionable, pero en lo que sí están de acuerdo todos los estudiosos es que con Tales, uno de los siete sabios de Grecia, termina el periodo precientífico y se entra de lleno en el periodo del saber crítico y objetivo. Tales buscó explicaciones racionales a los fenómenos de la naturaleza y, paralelamente, inventó la demostración matemática. Muchas de sus aportaciones geométricas ya figuraban en los papiros egipcios y en las tablillas babilónicas. Se ha puesto en duda que el famoso teorema que lleva su nombre, teorema de Tales, sea suyo. Como apostilla Felix Klein, si un teorema lleva el nombre de un matemático, es seguro que este matemático no es su inventor. Sean o no suyos, la diferencia trascendental con los egipcios y babilonios es que Tales demostró esos resultados rigurosamente [31].

Así pues, en la antigua Grecia surge un nuevo tipo de saber: la ciencia. ¿Por qué?, ¿milagrosamente? Estudios históricos desvelan el largo camino seguido por la humanidad para llegar a los umbrales de la ciencia. La respuesta está en que en Grecia, por aquella época, se dio un cúmulo de circunstancias culturales, sociales y políticas que propició el advenimiento del conocimiento científico. La privilegiada posición geográfica de Grecia, verdadera encrucijada entre occidente y oriente, puso a este pueblo en contacto con los países orientales, aprendiendo de sus tradiciones y culturas. Mantuvo con ellos relaciones comerciales, cuando no largos enfrentamientos bélicos. Por otra parte, el idioma griego era muy rico y flexible y atesoraba una brillante tradición literaria, con poetas épicos como Homero, y más didácticos como Hesíodo. Otro hecho que influyó mucho fue la especial concepción griega de la religión, con su antropomorfismo: sus mitos, dioses y cultos están relacionados con la naturaleza. Ello les libera de la búsqueda de justificaciones extranaturales y esotéricas, convirtiendo al hombre en el centro de su universo.

Pitágoras vivió en el siglo VI aC y su legendaria escuela es una mezcla de filosofía, religión y matemáticas. No es fácil entender la evolución del misticismo pitagórico a las matemáticas si no se acude al orfismo, es decir, a la relación entre la armonía musical y la armonía reflejada en los números. Pitágoras conocía la relación existente entre las longitudes de las cuerdas de la lira y los acordes de sus sonidos. Cuando la longitud de la cuerda se reducía a la mitad, esto es, en la relación 1:2, se obtenía la octava; cuando estas relaciones eran 3:4 ó 2:3 resultaban la cuarta y la quinta, respectivamente. En estas razones aparecen los cuatro primeros números naturales 1, 2, 3, 4, que si se apilan forman un triángulo equilátero y suman diez, número místico, que coincide con la suma de las caras y aristas de un tetraedro. Para los pitagóricos el número es la esencia de todas las cosas ([4],[28],[31]).

Curiosamente, pese a la mística de los números, las contribuciones aritméticas de la escuela pitagórica no fueron tan importantes si se comparan con las que realizaron en geometría. Quizás ello se deba a un hecho trascendental: el descubrimiento de los números irracionales. Para los griegos los números se reducían a los enteros y a los fraccionarios positivos, de modo que dadas dos cantidades diferentes o la mayor es un múltiplo de la menor o es un múltiplo de una parte de la menor. Pues bien, miembros de esta escuela descubrieron que la diagonal de un cuadrado no es múltiplo entero de ninguna parte de su lado, o dicho de otra forma y más en consonancia con el teorema de Pitágoras, la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es inconmensurable con el cateto. Este hecho supuso un gran desconcierto y un duro golpe a la teoría de la armonía numérica, hasta tal punto que —según la leyenda— los pitagóricos se juramentaron para no dar a conocer ni propagar este hallazgo.

El siglo V aC fue el siglo de oro de la civilización griega, el siglo de Pericles, en el cual la literatura, el teatro, la música, la escultura y la filosofía alcanzaron cotas inigualables. Y también la lógica, la metafísica, la ética, la teoría del conocimiento.., aspectos relacionados con las matemáticas.

Zenón, discípulo de Parménides de Elea, critica acerbamente algunas de las concepciones pitagóricas, por ejemplo, la del movimiento como suma de pequeñas etapas, como hace en la paradoja, entre otras, de Aquiles y la tortuga, donde Aquiles —el de los pies ligeros— no alcanzaría nunca a una tortuga, por escasa que sea la distancia que medie entre este lento animal y el corredor. Quizás contribuyó, sin quererlo, a eliminar toda referencia al infinito de las matemáticas griegas.

Aunque en el siglo V aC todavía las matemáticas griegas no están sistematizadas, ya se plantean los tres problemas clásicos de la geometría: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, y su resolución mediante regla y compás, es decir, efectuando construcciones que sólo involucraran rectas y circunferencias. Algunos de estos problemas tienen su origen en la mitología y las leyendas. Así, el último problema también se conoce como problema de Delfos, porque una delegación ateniense visitó el oráculo de Apolo sito en dicho lugar para que este dios les ayudara a acabar con la peste que se había propagado por Atenas en el año 429 aC. El oráculo les pidió a cambio que deberían duplicar el ara de Apolo, que era de forma cúbica. Inmediatamente los atenienses doblaron el lado del cubo, pero esa no era la solución, pues el volumen del altar no se duplicaba sino que se multiplicaba por ocho.

La influencia de la geometría, como decíamos antes, en el desarrollo de las matemáticas es bien significativa, fundamentalmente debida a Platón y su Academia, fundada el año 387 aC. Podríamos encontrar la justificación en las teorías de las ideas y del conocimiento de Platón, así como en el especial papel desempeñado por las matemáticas en su propia concepción filosófica y del mundo, donde los entes matemáticos aparecen como intermediarios entre el mundo de las ideas y el mundo de las cosas.

Aquí nos interesa subrayar el aspecto formativo y de utilidad del conocimiento matemático para el estudio de otras ciencias. Así, en la *República*, Sócrates razona con Glaucón “¿No has observado también que los que han nacido para calculistas tienen gran facilidad para todas o casi todas las enseñanzas y que hasta los espíritus tardos, cuando se han educado y ejercitado en el cálculo, aunque no deriven de él otra ventaja, sí obtienen, por lo menos, volverse más sutiles de lo que eran antes?”. Ante el asentimiento de Glaucón, prosigue Sócrates “Por tanto, ordenaremos a los ciudadanos de nuestro estado que no desprecien el estudio de la geometría, tanto más cuanto que, además de esta ventaja principal de elevar el alma hacia la verdad, tiene otras que no son despreciables”. Se refería a cómo una buena formación matemática facilita el estudio de otras ciencias. No es de extrañar que en el pórtico de la Academia figurara la frase “Que no entre quien no sepa geometría” ([6],[31]).

La influencia de Aristóteles en las matemáticas es muy inferior a la de Platón, destacando como principal aportación la sistematización de la lógica.

El matemático más importante del siglo IV aC fue, sin lugar a dudas, Eudoxo de Cnido, quien resolvió los dos problemas que impedían el avance de la geometría. Nos referimos a los irracionales y a las equivalencias o proporciones.

Directa o indirectamente relacionados con el ambiente cultural de Alejandría, donde se crearon dos instituciones científicas tan importantes como el Museo y la Biblioteca, aparecen las tres grandes figuras de las matemáticas griegas: Euclides, Arquímedes y Apolonio.

A Euclides (325-265 aC) se le adjudican una docena de obras, pero pasó a la historia y de qué manera, por una sola de ellas, los *Elementos*. Las referencia sobre Euclides son muy difusas y oscuras, y se deben a historiadores como Eudemo y Proclo. Hoy se datan los *Elementos* en el año 300 aC . De ellos dice el especialista en historia de las matemáticas Sir Thomas Heath "Este maravilloso libro, con todas sus imperfecciones, que en verdad son bastante pocas si se tiene en cuenta la fecha en que apareció, es y será sin duda el más grande texto de matemáticas de todos los tiempos..." Los *Elementos* han representado durante más de veinte siglos la norma de rigor en nuestra ciencia y el modelo a imitar para otras especialidades, durante ese largo periodo de tiempo ha sido libro de texto en todos los centros de enseñanza de occidente, se han realizado más de mil ediciones desde que fue impreso por primera vez en 1482 y, después de la Biblia, es el libro más traducido, publicado y estudiado en todo el mundo occidental. ¿Qué tiene esta obra para llegar a estos extremos de popularidad y supervivencia? ¿Por qué ese título? El término "elemento" se reservaba para las compilaciones que reunían ciertos conocimientos básicos. Pero también puede referirse a las proposiciones que juegan un papel fundamental en la obtención o deducción de otros resultados. Por ejemplo, un teorema ya demostrado o un problema resuelto que se utilicen en la verificación de un nuevo aserto son "elementos" de dicho aserto [12].

Según Eudemo, Hipócrates de Quíos (470-400 aC) fue el primero en escribir un libro de "elementos", siguiéndole León (s. IV aC) y Teudio (s. IV aC). Pero los *Elementos* de Euclides no sólo eclipsaron absolutamente a todos los "elementos" escritos anteriormente, sino que se desconoce la existencia de obras análogas posteriores. Es más, con esta colosal obra se desvanece la figura de su propio autor. Porque ¿quién fue Euclides? Algunos coetáneos ya se refieren a él como "el que escribió los *Elementos*", "el elementador" [12]. El escritor inglés del siglo pasado

Edward M. Forster (1879-1970), en su *Alejandría: Historia y Guía*, dice, refiriéndose a Euclides ”... nada sabemos de él. A decir verdad, hoy le consideramos como una rama del saber más que como un hombre”. Se admite que Euclides vivió durante el reinado de Ptolomeo I y que formó escuela en Alejandría.

Los *Elementos* constan de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y 465 proposiciones, todo ello distribuido entre 13 libros, donde se abordan temas relativos a la geometría plana, la teoría general de la proporción, la teoría aritmética, la geometría del espacio, y la inconmensurabilidad y los segmentos irracionales. Se trata del primer tratado que distingue un conjunto de primeros principios que, a su vez, divide en definiciones, postulados y nociones comunes o axiomas. Proclo señala las virtudes que poseen los *Elementos* de Euclides respecto de similares tratados, anteriores o posteriores a él: primero, el acierto en la selección de los teoremas y problemas; segundo, la diversidad de métodos utilizados; y tercero, la organización de las demostraciones. También, según Proclo, en los teoremas euclídeos hay tres pasos que nunca faltan: el enunciado, la demostración y la conclusión, que —sólo por curiosidad— indicamos que finalizaba con un “que era lo que había que hacer”, si se trataba de un problema, o con un “que era lo que había que demostrar”, si concernía a un teorema ([12],[31]).

El gran mérito de Euclides hay que buscarlo en que, con la elaborada construcción de los *Elementos*, instauró *el método axiomático-deductivo*. Básicamente consiste en establecer unas nociones básicas, fijar unos axiomas o postulados y, a partir de aquí, hay que demostrar todos los enunciados matemáticos únicamente con la ayuda de la lógica y del razonamiento.

La influencia platónica y pitagórica es manifiesta en esta obra. Lo prueban la atención que dedica a los poliedros regulares en el último libro y el objetivo de estudiar los teoremas abstractamente, sólo con la inteligencia pura. No figura en los *Elementos* ninguna aplicación práctica, ni siquiera un ejemplo numérico. Tampoco, pese a que se afirma que la euclídea es la geometría de la regla y el compás, no existe ninguna alusión a estos instrumentos a lo largo del tratado. Los *Elementos* son matemáticas puras, sin ningún tipo de contaminación. No es de extrañar la reacción de Euclides cuando un alumno, después de una demostración de un teorema hecha en clase, le preguntó por las ganancias que podía obtener con esos conocimientos. Euclides, molesto, ordenó a un sirviente que le diera tres óbolos, “pues necesita sacar provecho de lo que aprende”. También Ptolomeo I se interesó por si había alguna vía más rápida y no tan dura como la de los *Elementos* para llegar al conocimiento geométrico, a lo que Euclides le replicó que “en geometría no había caminos para reyes”.

Por otra parte, hay que resaltar la solidez que dio al edificio euclídeo la lógica aristotélica.

Es así como los *Elementos* se convirtieron en una referencia común en las investigaciones posteriores y en fuente de autoridad. A mediados del siglo XIX Augustus de Morgan afirmaba que “no había un sistema de geometría digno de tal nombre que se apartara sustancialmente del plan trazado en los *Elementos”*.

Brevemente nos referimos a Arquímedes (287-212 aC) —verdadero precursor del cálculo infinitesimal— prototipo de matemático original y creativo que, sin renunciar al rigor —como queda de manifiesto en las extraordinarias deducciones de algunas áreas y volúmenes que obtuvo— se dedicó también al estudio de la estática, la hidrostática y la óptica. Fue incluso considerado un héroe por su pueblo, ya que aprovechó sus descubrimientos en diferentes ramas de la física para construir artilugios que fueron utilizados para repeler los ataques romanos a su Siracusa natal (en la Magna Grecia, hoy Sicilia).

Retengamos estos dos personajes, Euclides y Arquímedes, en la memoria y veamos si encontramos algún paralelismo con otros más cercanos en el tiempo a nosotros.

Por último, Apolonio de Perga (262-190 aC) escribió el tratado más completo de la antigüedad sobre las cónicas.

Durante la época grecorromana, en los primeros siglos del cristianismo, las matemáticas que se hacen no presentan una gran originalidad, en general son una continuación y comentarios de las obras de los grandes matemáticos helenos. Por citar algunos matemáticos de la época, los más notables son Herón (s. I); Claudio Ptolomeo, célebre por su *Almagesto*, recopilación de toda la astronomía antigua y vigente durante más de catorce siglos como referencia obligada en esa materia; Diofanto (s. III) y Pappus de Alejandría (s. III-IV). Hipatía (350-415), hija de Teón de Alejandría, es la más famosa de las mujeres matemáticas de la antigüedad. Colaboró con su padre en el estudio del *Almagesto* y comentó el *Canon astronómico* de Ptolomeo y las *Secciones cónicas* de Apolonio.

Los romanos se preocuparon sólo por las matemáticas que precisaban para hacer frente a los problemas de la vida cotidiana. Su sistema numérico, de funcionamiento decimal y símbolos literales, restaba agilidad a los cálculos.

En la temprana Edad Media las matemáticas, y todas las ciencias en general, alcanzaron unos niveles bajísimos. Recordemos las admoniciones de San Agustín (354-430) para quien las matemáticas son cosa diabólica. ”Los buenos cristianos deben cuidarse de los matemáticos y de todos los que acostumbran hacer profecías, aún cuando estas profecías se cumplan, pues existe el peligro de que los matemáticos hayan pactado con el diablo para obnubilar el espíritu y hundir a los hombres en el infierno” (*De Genesi ad litteram*, 2, XVII, 37).

Las principales fuentes que abastecen las matemáticas del primer milenio de nuestra era tienen procedencia oriental: china, hindú y árabe, sobre todo —por razones de cercanía— las dos últimas. Las matemáticas de India hacen aportaciones originales, influyen notablemente sobre la cultura árabe y, por medio de ésta, llega al mundo occidental. Los árabes tradujeron a su lengua obras hindúes y gran parte de la producción matemática griega, por lo que asimilaron las matemáticas de estas dos civilizaciones y favorecieron, de paso, la conservación de muchas obras de la época clásica que de otra forma se hubieran perdido irremediablemente.

Con la *Aritmética* de Al-Khuwarizmi (780-846) se difundió en el mundo musulmán el uso de las cifras hindúes y la introducción del cero. Pero su obra más importante es *Hisab al-jabar wa-al-muqabala*. Así, del nombre del autor deriva la palabra algoritmo y del título de su obra, *al-jabar*, nuestra palabra álgebra. Destaquemos también a Tabil B. Qurra (827-901), traductor e investigador de los matemáticos griegos, especialmente de Arquímedes, y a Abu Kamil (850-930), destacado algebrista.

Mientras comienza la decadencia de la ciencia árabe en oriente durante el siglo XII, en la España musulmana alcanza su apogeo. La escuela de traductores de Toledo juega un papel fundamental, poniendo a disposición de los estudiosos y de los investigadores occidentales gran parte de los saberes griego y árabe. Ello contribuyó al renacimiento que experimentaron las matemáticas en el siglo XIII.

El mejor matemático medieval fue, sin duda, Leonardo Pisano, más conocido como Fibonacci (1170-1240). Visitó, por razones familiares, el norte de Africa, donde entró en contacto con las matemáticas árabes. Publicó *Liber Abaci* (*El libro de los ábacos*), en el que desecha el uso del ábaco y fomenta la utilización del sistema decimal y las cifras hindúes sobre el sistema y los números romanos. Todos los esfuerzos de esta época se centran en el perfeccionamiento de la aritmética, del álgebra y de la trigonometría.

El siglo XV viene marcado por un acontecimiento trascendental por su repercusión en la divulgación cultural y científica: el invento de la imprenta con tipos móviles. Así, en 1482, aparece la primera edición —publicada en Venecia por E. Ratdolt a partir de una traducción de Campanus de mediados del siglo XIII— de los *Elementos* en latín.

Por fin, en el siglo XVI se sustituye el cálculo con ábaco por las reglas aritméticas del cálculo con las cifras arábigo-hindúes, siendo las innovaciones más importantes la consideración de los números decimales, los logaritmos y las fracciones continuas.

Parece mentira lo que se tardó en extender las ventajas que el sistema decimal ofrecía en el manejo de los números enteros al caso de los números decimales. Ello se debe al matemático belga Simon Stevin (1548-1620).

Los logaritmos nacieron con la idea de simplificar los cálculos aritméticos, sobre todo en astronomía y navegación. Las calculadoras y los ordenadores han eliminado su uso, pero no debemos olvidar su contribución esencial al desarrollo incluso material de la humanidad. Aunque hay precedentes, se pueden considerar como creadores de los logaritmos al matemático escocés John Napier o Neper (1550-1617) y al suizo Jobst Bürgi (1552-1632). El inglés Henry Briggs (1556-1631), idea que barruntó igualmente el propio Napier, introdujo los logaritmos decimales [4].

Entre los algebristas sobresalen los italianos Niccolo Tartaglia (1499-1557) y Girolamo Cardano (1501-1576), que investigaron las ecuaciones cúbicas y cuárticas, Pero la figura más brillante de esta etapa de transición fue el matemático francés François Viète, o latinizado, Franciscus Vieta (1540-1603), que dio a la trigonometría su forma definitiva. Su obra *Isagoge in artem analyticam* es el primer tratado de álgebra literal.

En las primeras décadas del siglo XVII comienza en Occidente la Revolución Científica. Aclaremos que se daban las condiciones objetivas para que se iniciara este proceso. Por una parte, ya desde el siglo XIII, Occidente —por medio de los árabes— entra en contacto con el saber antiguo, particularmente, con las obras de los grandes matemáticos griegos: Euclides, Arquímedes, Apolonio, Diofanto y Pappus. Por otra, aflora con gran nitidez una de las características de la ciencia moderna: la matematización del mundo. El mundo es inteligible y está sometido a las leyes de la razón y, por consiguiente, a su herramienta natural, las matemáticas. Así, tras el largo paréntesis de la Edad Media, se reabre la esperanza en las ciencias con Galileo Galilei

(1564-1642), fundador de la física moderna, basada en la experimentación y la modelización matemática. Galileo concede a las matemáticas en la física un papel tan lejos de la posición de Platón como de Aristóteles. Platón consideraba que sólo era digno de estudio el mundo de las puras ideas matemáticas: si los objetos físicos no se adecúan a este mundo de las ideas, significa que son defectuosos o imperfectos. Sin embargo, Aristóteles, impresionado por su carácter tan abstracto, alegaba que las matemáticas no tenían nada que ver con la física, pues no se preocupaban por la materia. En cambio, lo que valoraba Galileo de las matemáticas era su utilidad como instrumento y herramienta en el estudio de la física [8]. De ahí su legendaria sentencia: "El gran libro de la naturaleza está siempre abierto delante de nuestros ojos: en él se halla escrita le verdadera filosofía. Pero el libro no puede ser entendido si primero no se aprende a comprender el lenguaje y a leer los caracteres en que está escrito. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin lo cual es humanamente imposible comprender una sola palabra de él; sin ello se deambularía en un laberinto oscuro...". Con Galileo caen las barreras filosóficas impuestas por Platón y Aristóteles y se da paso a un duradero y fructífero entendimiento entre la física y las matemáticas.

¿Cuáles son los hitos matemáticos del siglo XVII? Arranca este siglo con la obra de René Descartes (1596-1650), cuyo pensamiento se caracteriza por su afán cósmico, es decir, por la búsqueda permanente de lo absoluto y de la generalización. Descartes distingue entre "matemáticas" y "matemática". Emplea "matemáticas" al recordar sus estudios escolares, particularmente el álgebra y la geometría. De la geometría dice que está tan ligada siempre a consideraciones sobre las figuras que no puede ejercer el intelecto sin cansar mucho la imaginación, mientras que el álgebra es un arte oscuro y confuso que turba la mente. Por ello toma lo mejor del análisis geométrico y del álgebra, creando la geometría analítica en su obra *Géométrie*. Pero el objetivo de Descartes no son estas "matemáticas", sino el logro de una ciencia única, ciencia que será la "matemática" universal, que ha de explicar todo aquello que se pueda preguntar sobre el orden y la medida, no importando que la medida deba buscarse en números, figuras, astros, sonidos o cualquier cosa; en resumen, la "matemática" —en singular—de la cual las "matemáticas" —en plural— serían la envoltura, lo perceptible.

En el *Discurso del Método,* Descartes presenta su nueva concepción sobre la filosofía y la ciencia, con un planteamiento revolucionario y rupturista con el pasado. Sus principales novedades son: el carácter analítico de la investigación; el empleo de la duda metódica, no como característica del escéptico, sino como vía para liberarnos de toda incertidumbre; la relación entre la intuición o evidencia y el encadenamiento deductivo; y la separación radical de sujeto y objeto. Asegura que las matemáticas tienen invenciones sutilísimas que pueden satisfacer tanto a los curiosos como facilitar todas las artes y disminuir el trabajo humano, asombrándose de que sobre tan sólidos fundamentos no se hubiera edificado nada más importante [31].

Podría sonar a falta de humildad las palabras con las que concluye su *Géométrie:* "Espero que nuestros descendientes me estén agradecidos no sólo por las cosas que aquí expliqué, sino también por aquéllas que voluntariamente omití para proporcionarles el placer de descubrirlas". En realidad esta frase refleja la especial concepción que Descartes tenía de las matemáticas. No sentía ningún interés por el aspecto formal de las mismas: que los demás demuestren lo que él ya había encontrado.

Pierre Fermat (1601-1665) es el creador de la moderna teoría de números. En los márgenes de un ejemplar de la edición latina de la *Aritmética* de Diofanto afirmaba Fermat: "es imposible descomponer un cubo en suma de dos cubos o un bicuadrado en suma de dos bicuadrados, o en general cualquier potencia en suma de dos potencias de igual exponente, con excepción del cuadrado. He encontrado una demostración de esta proposición, realmente maravillosa, pero el margen del libro es demasiado estrecho para contenerla". En otras palabras, lo que aseguraba Fermat es que la ecuación $x^n + y^n = z^n$, donde x, y, z y n han de ser enteros positivos, sólo tiene solución cuando $n = 2$. Este aserto se mantuvo como una conjetura durante más de tres siglos, desafiando a toda la comunidad científica, hasta que recientemente, en el año 1995, el matemático británico Andrew Wiles demostró el teorema, dando la razón a Fermat.

Relacionado con los juegos de azar surge en el siglo XVII el cálculo de probabilidades, cofundado por Fermat y Blaise Pascal (1623-1662). Por cierto, Pascal construyó cuando sólo tenía 18 años de edad una máquina de calcular, por lo que se le considera el iniciador del cálculo mecánico.

Otra línea de estudio e investigación que se abre en este siglo, muy alejada de la realidad, es la geometría proyectiva, gracias a Girard Desargues (1593-1661), ingeniero militar y arquitecto, pese a confesar que no le interesaba la investigación científica sino en cuanto "puede ofrecer al espíritu un medio de lograr algún conocimiento... de las cosas que puedan traducirse en actos para la conservación de la salud o en sus aplicaciones en la práctica de algún arte".

Otro campo que se inicia en este siglo es el cálculo infinitesimal. El infinito está presente en la sucesión indefinida de los números enteros y el infinitésimo en la posibilidad de dividir indefinidamente un segmento dado. Los métodos infinitesimales ya se manejaban en el mismo momento en que las matemáticas nacen como ciencia, en la Grecia clásica, debido a la categoría y rigor que aportan la teoría de las proporciones y el método de exhaución de Eudoxo, que Arquímedes mejora significativamente al añadir el postulado de continuidad. Lamentablemente, el manuscrito *El Método*, donde Arquímedes explicaba su teoría se creyó desaparecido, hasta que fue redescubierto en un palimpsesto en 1906. Todos los historiadores coinciden en que este hecho frenó el desarrollo del cálculo infinitesimal. También hubo circunstancias externas que impulsaron el surgimiento de este nuevo cálculo, como fueros las necesidades de la física y de la astronomía.

Destaquemos en este campo a Luca Valerio (1552-1618), al que Galileo consideraba como “el Arquímedes de nuestro tiempo”; al polifacético astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), del que recordamos como anécdota que en su obra matemática *Nova stereometria doliorum vinariorum* resuelve un problema práctico que le plantearon unos viticultores —ante una cosecha extraordinaria de uvas— sobre qué dimensiones deberían tener los toneles con igual volumen para que el material empleado en su construcción fuera mínimo; Bonaventura Cavalieri (1598-1647), con su método de integración basado en los indivisibles; Giles Personne de Roberval (1602-1675); el jesuita belga Gregorius Saint Vincent (1584-1667); el físico Christian Huygens (1629-1695); James Gregory (1638-1695) y John Wallis (1616-1703).

Después de tantos siglos de estancamiento y parálisis se avanza muy rápidamente, aunque a costa de descuidar el rigor y la fundamentación de las pruebas. Para ilustrar esta falta de rigor característico de esta época, recordemos que Simon Stevin calculó el centro de gravedad de un paraboloide de revolución utilizando el mismo método con el cual Arquímedes dedujo la cuadratura del segmento parabólico. Pero la diferencia es sustancial. En la prueba aparece una sucesión, resultando asombroso que mientras Arquímedes logra una demostración incontestable por su rigor, mediante el método de exhaución, 1800 años después Stevin colige su afirmación del análisis de los tres o cuatro primeros términos de dicha sucesión, sin verificar nada más.

Todos los matemáticos que acabamos de citar actuaron como precursores y prepararon el terreno para que dos genios de la talla de Newton y Leibniz fundaran simultáneamente el cálculo infinitesimal como una rama importante de las matemáticas, que hoy conocemos como análisis matemático, si bien durante mucho tiempo se redujo a un cálculo, es decir, a un conjunto de reglas y algoritmos útiles y eficaces, como lo avalaban las aplicaciones, pero carentes de una seria fundamentación matemática.

Esta nueva disciplina se desarrolla en tres grandes capítulos, prácticamente los mismos que estudiábamos en esta Universidad en la asignatura Cálculo Infinitesimal del Selectivo de Escuelas Técnicas Superiores hace unos 35 años: cálculo diferencial (derivadas, curvaturas y problemas de máximos y mínimos), cálculo integral (determinación de cuadraturas, cubaturas y rectificaciones, en otras palabras, hallar áreas, volúmenes y longitudes, además de centros de gravedad) y algoritmos infinitos (sucesiones y series, productos infinitos, fracciones continuas).

Isaac Newton (1643-1727) entró en el Trinity College de Cambridge en 1661, gracias a las gestiones de un tío suyo que se dio cuenta de la gran inteligencia que poseía. Aunque al principio estaba más interesado por la química, al final Newton se convirtió en uno de los físico-matemáticos más importantes de todos los tiempos. Sin lugar a dudas influyó en ello su lectura de las obras de Descartes, Kepler, Viète y Wallis, amén de las de Galileo, Fermat y Huygens. Se comprende así que escribiera a Hooke en estos términos: "si he conseguido ver más lejos que Descartes ha sido porque me he incorporado sobre los hombros de gigantes". En 1665 ya es bachelor of arts, pero tiene que regresar a su casa porque el Trinity College cierra a causa de la peste. Este corto periodo de descanso obligado se transformó en uno de los más fecundos de la historia del desarrollo científico, pues durante el mismo Newton realizó sus cuatro principales descubrimientos: el teorema de la binomial, el cálculo, la ley de gravitación y la naturaleza de los colores [4].

Sus contribuciones a las matemáticas no se limitan al cálculo infinitesimal. Así, en su *Enumeratio linearum tertii ordinis*, escrito en 1695 y publicado como un apéndice de su *Optica*, estudia la teoría de las curvas algebraicas, mientras que en su *Aritmética universalis*, editada en 1707, investiga la teoría general de las ecuaciones, la resolución algebraica de problemas geométricos, utiliza la nomenclatura raíces afirmativas (positivas), negativas e imposibles (imaginarias o complejas)...

En su obra *De analysi* (*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*), concluida en 1669 e impresa en 1711, da el teorema general del binomio. Muchos matemáticos habían fracasado en el intento de extender este desarrollo de exponentes enteros positivos a exponentes fraccionarios. Newton obtiene desarrollos en serie infinitos, encuentra nuevas series por división larga —procedimiento ya conocido

— y por el método de inversión —original suyo—. Pero la más importante aportación newtoniana en esta obra fue su descubrimiento de que el análisis con series infinitas tiene la misma consistencia interna que el álgebra con cantidades finitas y que cumple las mismas leyes generales. En definitiva, y conviene remarcarlo, con Newton y a partir de su ejemplo, los matemáticos ya no evitarán la utilización de los procesos infinitos como habían hecho los matemáticos griegos, sino que será habitual y legítimo su uso en las demostraciones matemáticas. En pocas palabras, con Newton se perdió el miedo al infinito. También estableció en esta obra, por vez primera, que la determinación de la tangente a una curva y la cuadratura, es decir, la derivación y la integración, son operaciones inversas.

En *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, que no se publicó hasta 1736, figuran las aportaciones más originales de Newton al cálculo infinitesimal. Newton, desde 1664, ya había analizado la velocidad de cambio de magnitudes que varían continuamente, como longitudes, áreas, volúmenes, espacios, temperaturas... A esta clase de magnitudes las llama “fluentes”, a sus velocidades de cambio “fluxiones” —nuestro actual concepto de derivada— y el producto del incremento por la “fluxión” es el “momento”, que viene a ser nuestra diferencial. La notación de Newton, que aún persiste en muchos libros de mecánica, consiste en superponer puntos a las “fluentes” para indicar el orden de las “fluxiones”. De este modo, y con la actual terminología, $\dot{x}(t)$ indica la derivada primera o velocidad y $\ddot{x}(t)$ la derivada segunda o aceleración.

Pero su obra cumbre, y uno de los tratados científicos más admirados de todos los tiempos, es *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, donde se nota claramente la influencia euclídea. Para Von Neumann, este clásico de la física teórica era, tanto en la forma literaria como en la esencia, un libro muy parecido a los *Elementos*, porque presenta los fundamentos de la física y de la astronomía con el lenguaje de la geometría pura. Esta magna obra fue la primera de Newton en ser publicada, pese a que fue la última en ser escrita. Los *Principia* alcanzaron un gran éxito y llevaron a Newton, que ya era miembro de la Royal Society, al Parlamento representando a Cambridge.

Agotado por el estrés que le producía el continuo esfuerzo en la investigación científica, opta por aceptar en 1696 el nombramiento real de Warden of the Mint, algo así como Guardián de la Casa de la Moneda, y poco más tarde, el de Master of the Mint, o Director de la Casa.

Por cierto, la única intervención pública de Newton como parlamentario, y así consta en las actas del Parlamento, fue para pedir que abrieran una ventana [37]. Estaba claro que no era lo suyo.

Rememoramos, por su humanidad y humildad, el momento en que uno de los científicos que más ha escrutado y desentrañado los misterios del Mundo confiesa su ignorancia ante los innumerables secretos que aún esconde el Universo: “No sé qué le pareceré a los demás, pero yo creo que he sido simplemente como un niño que juega a las orillas del mar y que se divierte al encontrar aquí y allí alguna que otra concha o piedrecilla más bonita de lo normal, mientras el gran océano de la verdad se extiende desconocido ante mí”.

Mientras esto ocurría en Inglaterra, en Alemania otro coloso, gran matemático y filósofo, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) investigaba y progresaba paralelamente en los mismos temas, pero con una visión y concepción distintas. Hizo contribuciones en la teoría de números; en cálculo mecánico, mejorando la máquina de calcular de Pascal; en álgebra, introduciendo la teoría de los determinantes. Se le considera además el iniciador de la lógica matemática y de la topología.

Leibniz estudió derecho y ejerció como diplomático al servicio de su país. Viajó mucho, visitando París —donde le recomendaron estudiar a Pascal— y, al menos dos veces, Londres. Aunque no coincidió con Newton, durante estas estancias allí acaso pudo acceder a algunos de sus manuscritos. Los historiadores no consideran este hecho relevante en el agrio debate que enfrentaría a estos dos genios en relación con quien tenía la prioridad en el descubrimiento del cálculo infinitesimal, pues Leibniz no poseía entonces la formación matemática para entender las obras de Newton.

La obra matemática de Newton está condicionada por su carácter de filósofo de la naturaleza, de físico, mientras que la mente de Leibniz se correspondía más con la de un metafísico, un algorítmico, un lógico. Se entiende así que afirmara: “Sin las matemáticas no se puede penetrar a fondo en la filosofía, sin la filosofía no se puede penetrar a fondo en las matemáticas, y sin ambas, no se puede penetrar a fondo en nada”.

El sabio alemán se preocupó mucho en elegir una buena notación, porque era consciente de que ello facilitaba los procesos de pensamiento. Al respecto afirmaba: “Uno de los secretos del análisis radica en el arte de usar magistralmente los signos de que se dispone”. Tras algunos ensayos representó por dx y dy lo que entendía por las diferencias más pequeñas posibles de las variables x e y, nuestras diferenciales. Aunque al principio utilizaba las tres primeras letras omn de la palabra latina omnia (todos) para representar la suma de todas las ordenadas bajo una curva, pronto las reemplazó por el signo actual $\int y$ o $\int ydx$ de la integral, que no es otra cosa que una s, inicial de la palabra suma en tantos idiomas, estilizada. Si bien desde 1673 conoce las principales reglas y fórmulas del cálculo infinitesimal como las conocemos hoy: $d(x+y)=dx+dy$ (diferencial de una suma), $d(xy)=xdy+ydx$ (diferencial de un producto), $d\left(x/y\right)=(ydx-xdy)/y^2$ (diferencial de un cociente), $dx^n=nx^{n-1}dx$ (diferencial de una potencia)... y, por medio del triángulo diferencial, establece —igual que Newton— que la derivación y la integración son operaciones inversas, no fue hasta 1684 en un artículo, de apenas seis páginas, publicado en la revista *Acta Eruditorum* donde expone sus resultados sobre el cálculo.

Se presentía que la rivalidad entre estas dos grandes figuras de las matemáticas iba a terminar en polémica. Leibniz tuvo conocimiento del teorema de la binomial porque se lo pidió a Newton a través de Henry Oldenburg (1626-1678), secretario de la Royal Society, y a su vez informó al físico-matemático inglés de sus descubrimientos sobre el cálculo infinitesimal, pero éste le responde con un anagrama difícil de descifrar sobre su teoría de las "fluxiones". Pese a este extraño comportamiento de Newton, la situación parecía controlada. Newton cita en la primera edición de sus *Principia* al eminente matemático G. W. Leibniz y apunta: "el método de Leibniz no difiere del mío sino en las palabras y la notación". Por otra parte, Leibniz, a la vista de los trabajos de Newton, se admira "de la variedad de caminos por los cuales puede llegarse al mismo resultado". Pero en 1689 Leibniz no hace ninguna referencia a Newton en un trabajo sobre mecánica en el que usa el nuevo cálculo infinitesimal. Leibniz es acusado de plagio por los matemáticos ingleses, Newton retira toda referencia a él de la tercera edición de sus *Principia* y la Royal Society, presidida entonces por Newton, crea una comisión que barre para casa proclamando la prioridad del científico inglés como fundador del moderno cálculo infinitesimal.

Actualmente los historiadores están de acuerdo en que esta lamentable disputa no tiene sentido y llegan a las siguientes conclusiones. Primera, Newton hizo sus descubrimientos unos diez años antes que Leibniz; segundo, Leibniz tiene la prioridad de su edición, pues publicó un resumen de su cálculo en *Acta Eruditorum* en 1684; y tercero, no hubo plagio, ya que Leibniz hizo sus descubrimientos independientemente de los de Newton.

Lo más triste de esta polémica sin sentido fue el muro que se levantó entre los matemáticos británicos y los continentales, lo que se tradujo en una falta de colaboración entre ambos bandos. En este aislamiento la parte inglesa tenía todas las de perder. En efecto, pese a que el razonamiento de Newton estaba más cerca de la fundamentación moderna del cálculo, se impuso la eficacia, elegancia y simplicidad de la notación de Leibniz. Finalmente, los jóvenes matemáticos ingleses, fundadores de la Analytical Society, J. F. W. Herschel, Ch. Babbage y G. Peacock, decidieron aceptar la notación de los matemáticos del continente a principios del siglo XIX [11].

El siglo XVIII ha sido calificado como “el siglo de las luces”, de la “Ilustración”, de la “razón”, pero desde una perspectiva científica es el siglo de Newton. La ley de gravitación universal y las de la mecánica de Newton permitieron expresar mediante ecuaciones diferenciales los movimientos celestes y resolverlas mediante el cálculo infinitesimal, lo que suministraba información sobre el universo impensable siglos antes. La única objeción que se puede poner es que estos avances técnicos y el éxito de las aplicaciones no se reflejan en una buena cimentación de los principios básicos de las matemáticas, que seguían siendo vagos e imprecisos, cuando no contradictorios. Por ello D’Alembert animaba a sus estudiantes diciéndoles “allez en avant et la foi vous viendra”, es decir, “proseguid y confiad, la fe llegará” [31].

Siguiendo con este recorrido histórico destaquemos la familia Bernoulli, suiza de origen holandés, que aporta una docena de matemáticos a lo largo de los siglos XVII, XVIII y XIX, siendo los más famosos de la saga Jacob, su hermano Johann y un hijo de éste, Daniel. Sus contribuciones a las matemáticas son extraordinariamente significativas, siendo los creadores del cálculo de variaciones y del cálculo de probabilidades.

A su vez, Brook Taylor (1685-1731) introduce los desarrollos en serie de su nombre, uno de los mayores inventos de la humanidad, pues permiten reducir cálculos con funciones complicadas a las operaciones aritméticas elementales suma y multiplicación.

Pero la figura representativa del siglo XVIII es, sin discusión alguna, Leonhard Euler (1707-1783). Sus primeras nociones de matemáticas las aprendió de Jacob

Bernoulli y, por complacer a su padre —un pastor calvinista— aceptó estudiar teología a cambio de que le permitiera seguir con sus estudios favoritos ([28],[31]).

Fue Euler un hombre de amplia cultura, versado en literatura y lenguas clásicas, lenguas modernas, medicina, botánica, música y todas las ciencias físicas, tal como se conocían entonces. Su capacidad de trabajo era inmensa, lo que unido a la variedad y extensión de sus investigaciones, le convierten en el autor más prolífico de todos los tiempos en matemáticas. Aproximadamente la tercera parte de las investigaciones sobre matemáticas, física-matemática e ingeniería mecánica publicadas en las últimas tres cuartas partes del siglo XVIII son de Euler. La publicación de todas sus obras, las *Omnia Opera*, comenzada en 1910 y recientemente concluida, necesitó de 72 gruesos volúmenes, que se elevan a 82 volúmenes al recopilarse su copiosa correspondencia, más de tres mil cartas.

Quizás sea Euler el matemático más universal y querido. Ello se debe fundamentalmente a la claridad en la exposición de sus temas y a la variedad de sus obras. Se suele decir que todos los libros de texto de cálculo elemental y superior, desde 1748, son esencialmente copias de los tratados de Euler.

El físico francés Arago, al hablar de la gran facilidad de Euler para las matemáticas, decía: “calculaba sin esfuerzo aparente, como otros hombres respiran o como las águilas se sostienen en el aire”.

Desarrolló su magisterio entre Rusia y Alemania. A los 23 años ya impartía clases en San Petersburgo. En 1741 fue llamado a Berlín por Federico II, que le ofreció una cátedra. La reina madre, persona receptiva con los hombres ilustres y sabios, procuró que Euler se encontrara a gusto en la capital germánica, pero en sus conversaciones con él nunca logró arrancarle más que monosílabos. Cuando le preguntó por qué esta parquedad, Euler le contestó: “Señora, es que acabo de llegar de un país donde se ahorca a todas aquellas personas que hablan”. A pesar de todas estas atenciones, Euler no era feliz en Berlín. El emperador prefería a los intelectuales brillantes antes que a los geómetras (sinónimo entonces de matemático) y se refería a Euler —que era ya tuerto— en broma como el “cíclope matemático”. Pese a la anterior anécdota, regresa a Rusia en 1766, donde se sabía querido y respetado. En sus últimos 17 años padece una ceguera total, lo que no afecta a su capacidad de trabajo. Comentaba a sus allegados, con buen humor: “ahora me distraigo menos”. Y ciertamente, ya no puede publicar obras enciclopédicas, pero sí libros y artículos de investigación. Incluso en esta etapa final, y totalmente invidente, aumenta considerablemente su producción (casi la mitad de sus trabajos vieron la luz en estos años), gracias a su poderosa memoria, a su fértil imaginación y a la asistencia de ayudantes que escribían sus libros y artículos al dictado. Como anécdota y en relación con su prodigiosa memoria, se cuenta que Euler era capaz de recitar *La Eneida* en latín de principio a fin.

De su producción matemática destacan las obras *Introdutio in Analysin Infinitorum*, en el que se encuentra la mayoría de los conocimientos de álgebra, teoría de ecuaciones y trigonometría que hoy se enseñan en los cursos elementales. Sus *Institutiones Calculi Diferentialis* e *Institutiones Calculi Integralis* contienen todos los resultados sobre cálculo diferencial e integral. En su trabajo *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis* resuelve elegentemente el famoso problema de los puentes de Königsberg (en la antigua Prusia, hoy en el enclave ruso de Kaliningrado): el río Pregel a su paso por la ciudad se divide en dos ramas por culpa de una isla situada en su cauce, la isla Kneiphof. Esta isla se comunica con el resto de la ciudad mediante siete puentes. Un ciudadano se propone dar un paseo cruzando cada uno de estos siete puentes una vez solamente. ¿Es posible realizar esta excursión? Este inofensivo problema, que parece puro divertimento matemático, es el origen de la moderna teoría de grafos, de tantas aplicaciones en la actualidad. En este problema, que Euler generaliza a cualquier disposición y división del río en ramas y número de puentes, surge otra nueva área de las matemáticas, en la que únicamente importan las propiedades estructurales de los objetos y no sus medidas. A ello se refiere Euler con la parte del título "Geometriam Situs", que puede ser traducida perfectamente por "topología".

Finalmente señalamos que sus aportaciones originales a la teoría de números, al cálculo variacional... son excelentes, así como la creación de símbolos matemáticos, el mayor creador en esta faceta en la historia de las matemáticas, superando con creces al propio Leibniz.

El desarrollo de las matemáticas en Francia a lo largo del siglo XVIII fue espectacular. Destacan Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), con sus estudios sobre ecuaciones algebraicas, funciones de varias variables y ecuaciones en derivadas parciales. Su obra *Mécanique Analytique* marca un hito al desarrollar la mecánica como una geometría de cuatro dimensiones, siendo la cuarta el tiempo. Otra obra monumental, una referencia obligada en astronomía, es el *Traité de Mécanique Céleste*, de Pierre Simon Laplace (1749-1827), que también crea una obra maestra con *Théorie analytique des probabilités*. Las obras de Laplace son de una gran profundidad matemática, de difícil lectura. Cuando asegura que “il est facile de voir”, esto es, “se ve fácilmente”, es mejor no tomárselo en serio, ponerse en alerta y concentrarse en lo que se lee, pues no se entiende nada [31].

Con Gaspar Monge (1768-1830) vuelve la geometría pura, que ahora cuenta con la poderosa herramiente del análisis matemático, originándose así la geometría diferencial.

Joseph B. J. Fourier (1768-1830) crea una nueva rama de la ciencia, la llamada física-matemática, aplicando los métodos y técnicas del cálculo infinitesimal a problemas físicos. En su celebérrima obra *La Théorie Analytique de la Chaleur* introduce las series trigonométricas, extiende el concepto de función de Euler e intenta probar que una función arbitraria puede representarse mediante una serie de este tipo. El impacto de su trabajo en áreas como las comunicaciones, la medicina, la geofísica...es hoy en día incalculable. El punto débil de esta teoría está en el estudio de la convergencia.

A estas alturas de su historia las matemáticas comienzan a adquirir una unidad y autonomía que habían perdido desde la época griega. Las matemáticas aparecen como un conglomerado de diversas ramas: geometría, álgebra, teoría de números, cálculo infinitesimal, cálculo de probabilidades..., que cada vez se muestran más interconectadas. Si bien el espíritu griego, es decir, el rigor en el razonamiento impregnaba la geometría, no ocurría lo mismo con el cálculo infinitesimal. No se entiende cómo una disciplina de esta importancia descansó durante dos largos siglos sobre premisas y conceptos tan imprecisos y vagos como discutibles. Sólo cabe una explicación: el éxito arrollador del cálculo infinitesimal en el campo de las aplicaciones, que lo convirtió en el instrumento más potente de las matemáticas puras. Para ilustrar esta afirmación, recordemos que el matemático francés Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) produjo un enorme impacto en todos los ambientes intelectuales europeos al predecir, con un error de un mes, el retorno del cometa Halley, lo que ocurrió el 13 de marzo de 1759. Más tarde, los astrónomos John C. Adams y Urbain J. J. Leverrier conjeturaron que las anomalías que se observaban en el movimiento de Urano se debían a la atracción gravitatoria ejercida por otro planeta. Un planteamiento puramente matemático, sugerido por las leyes de la mecánica, condujeron a Leverrier en 1846 a indicar con absoluta precisión dónde estaba ese desconocido planeta que perturbaba la órbita de Urano [1]. Después, con un telescopio, fue confirmada la existencia de Neptuno. Estos dos hechos, y tantos otros, no sólo constituyeron un rotundo triunfo de la mecánica y de la astronomía newtonianas, sino también del cálculo infinitesimal del cual, no lo olvidemos, Newton fue cofundador.

Otra justificación, quizás más seria, radica en que los métodos infinitesimales no surgieron por exigencias internas, intrínsecas a las propias matemáticas, sino que emergieron acuciados por cuestiones externas: la resolución de los problemas de las ciencias naturales, que demandaba —cada vez con mayor fuerza— una sociedad que evolucionaba a gran ritmo. En otras palabras, las matemáticas iban por detrás, desfasadas, respecto de la física y supeditadas a ellas.

Pero ya se necesitaba cimentar las matemáticas sobre unas bases más sólidas. Los avances en los dos siglos precedentes, como hemos visto, fueron tales en cantidad y calidad que se precisaba hacer una revisión crítica y rigurosa de los mismos.

Fue el alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más excepcionales de todos los tiempos y el que más huella ha dejado en nuestra disciplina, quien reintrodujo el rigor en las demostraciones matemáticas [28]. Fue un niño precoz, como Mozart y Pascal. Si se asegura que el genial músico compuso un minueto a los cuatro años de edad, Gauss corrigió a su padre —que fue un comerciante— en unos cálculos con mercancías cuando sólo tenía tres años. Con apenas diez años dejó desconcertado a su maestro Bütner cuando éste propuso, para mantener la clase entretenida, sumar cien términos de una progresión aritmética y la única respuesta acertada, y sobre la marcha, fue la de Karl. A los doce años ya ponía en tela de juicio los fundamentos de la geometría euclídea y a los dieciséis vislumbraba una geometría diferente de aquélla. Cuando, con el paso del tiempo, le llegaron noticias de que el matemático húngaro Janos Bolyai (1802-1860) había descubierto otra clase de geometrías, ni se alteró. El lo sabía desde hacía tiempo y si no lo publicó fue, en palabras textuales suyas, “para evitar el griterío de los beocios”. Tal era el prestigio y la autoridad de los *Elementos* que ni el gran Gauss quería polémica alguna. También el matemático ruso N. I. Lobachevski (1793-1856) descubrió geometrías diferentes de la euclídea.

En su Tesis Doctoral, leída en 1798, Gauss demuestra el teorema fundamental del álgebra (toda ecuación algebraica tiene una raíz). Sus *Disquisitiones Arithmeticae*, por su grado de maduración y perfección, se usó de modelo en ulteriores estudios sobre la teoría de números. Animado por este trabajo llegó a afirmar que “las matemáticas son la reina de todas las ciencias y que la teoría de números es la reina de las matemáticas”.

Su siguiente trabajo, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, es considerado igualmente como la obra maestra de la teoría clásica de la geometría diferencial.

A diferencia de Euler, que explicaba las demostraciones con todo lujo de detalles, Gauss es un escritor difícil de leer, cada página de su obra es un reto para el lector. Para él, “una catedral no es una catedral hasta que no se ha desmontado y ha desaparecido el último andamiaje”. Y esta idea la aplica cuando hace matemáticas. Gauss elaboró sus escritos matemáticos con austeridad, eliminando todos los resultados insustanciales después de interminables correcciones, ajustando todos los detalles a la perfección, con el máximo rigor. Sólo quería legar a la posteridad obras de arte, consumadas, perfectas. En su sello figuraba un árbol con unos pocos frutos y la divisa *“Pauca sed matura”* (“Pocos pero maduros”). Esta búsqueda del rigor y de la perfección, de la obra completa en sí misma, le llevó a dar seis demostraciones diferentes de la ley de la reciprocidad cuadrática y cuatro del ya citado teorema fundamental del álgebra, la última cuando tenía setenta años.

Señalemos que el quinto postulado de Euclides, el de las rectas paralelas, cuya versión más popular —que no la original [31, p. 81]— dice que por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una recta paralela a ella, casi desde su publicación fue motivo de controversias. Se pretendió, sin éxito, demostrar que era una consecuencia de los otros postulados. Incluso el jesuita italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), en su obra *Euclides ab naevo vindicatus*, en la que reivindica la figura de Euclides, tratando de demostrar dicho postulado descubre otros tipos de geometría, pero él no lo ve así, cegado, obnubilado, por la perfección imposible de superar que todavía se le suponía a los *Elementos*.

Tanto Gauss, como Bolyai y Lobachevski, independientemente unos de los otros, llegaron a la conclusión de que se podían crear geometrías que prescindieran del postulado de las paralelas o en las que el referido postulado fuera sustituido por otro radicalmente diferente, no obstante lo cual se originaban geometrías tan válidas como la euclídea.

El nacimiento de las geometrías no euclídeas es un hecho singular en la historia de las matemáticas, pues constituye la declaración de independencia de las matemáticas respecto de las ciencias naturales, de la física y del mundo exterior. Se proclama el derecho a investigar en cualquier tema matemático, aunque sólo tenga aparentemente interés per se y carezca de aplicaciones inmediatas.

En este campo fue asimismo reputada la contribución del matemático alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), discípulo y continuador de la obra de Gauss, con su famosa disertación *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría*. Riemann también generalizó el concepto de integral, estableció los principios de la topología, inició el estudio de las funciones de variable compleja por medio de la ecuación de Laplace y se le debe la brillante idea de las superficies de Riemann, que permiten volver uniformes las funciones multiformes del análisis complejo. De igual forma, investigó la función zeta de Riemann, $\zeta(z)$, que lleva su nombre, y en relación con la cual enunció un resultado que, aún hoy, sigue siendo una de las más difíciles conjeturas pendientes de resolver en matemáticas, a saber, que los ceros no triviales de la z-función poseen parte real igual a 1/2. Al respecto, Hilbert comentó: "si me despertara después de haber estado dormido durante mil años, mi primera pregunta sería ¿ha sido probada ya la hipótesis de Riemann?", lo que da una idea de lo difícil que se presupone su solución.

El proceso de eliminación de todas las oscuridades y vaguedades que acompañaban a los fundamentos del cálculo infinitesimal es imparable. El matemático checo Bernard Bolzano (1781-1848) introdujo el concepto de función continua, de convergencia de series y mostró la existencia de funciones patológicas, como funciones continuas sin derivada. Con Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) el análisis matemático se construye sobre unos cimientos firmes. Sus obras se caracterizan por la precisión de las definiciones, por ejemplo, de función, límite y continuidad, y en la cuidadosa determinación del campo de validez de las fórmulas. Vuelve al concepto de integral como suma, al modo de Arquímedes, no como operación inversa de la derivación. Pero la principal contribución de Cauchy, sin ninguna duda, fue su teoría de las funciones analíticas. Extiende la serie de Taylor a las funciones de variable compleja e introduce la denominada en su honor fórmula integral de Cauchy, que básicamente permite determinar el valor de una función en cada punto interior de un dominio acotado a partir de su valor sobre la curva que lo limita [31].

En esta misma dirección de impregnar a las matemáticas del máximo rigor se aplican el matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) y el matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851).

Conviene que hagamos aquí un inciso. Con motivo de la celebración del bicentenario del nacimiento del insigne matemático noruego, en el año 2002 el gobierno de Noruega ha instituido el Premio Abel, con la intención de que se convierta en el

Premio Nobel de Matemáticas, como ya es considerado popularmente y por la prensa. De esta manera se corrige una manifiesta discriminación histórica, difícil de comprender: la inexistencia de este preciado galardón en nuestra disciplina. Durante mucho tiempo circuló el bulo, que se trasmitía como un hecho verídico de una generación de matemáticos a otra, de que Alfred Nobel (Estocolmo 1833 – San Remo 1896), que fue quien instituyó este honor, odiaba a los matemáticos, ya que su mujer le fue infiel con el notable matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), que sería un serio candidato a recibir este premio por su conocida influencia en la corte sueca. Pero la realidad es tan triste como simple: Nobel, que era soltero, nunca sintió especial interés en nuestra ciencia y jamás pasó por su mente crear un premio en matemáticas ([14],[25]). Este vacío era reemplazado hasta ahora por las Medallas Fields, que se conceden cada cuatro años a entre dos y cuatro matemáticos de reconocido prestigio y de menos de cuarenta años de edad, distinciones que se entregan con ocasión de la celebración de los Congresos Internacionales de Matemáticas, cuya próxima organización en el año 2006 corresponde a España. Esperamos que la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna sea una de las sedes satélite.

También fue destacado el papel del germano Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), que dio una definición general de función, fijó por primera vez condiciones suficientes para garantizar la convergencia de las series de Fourier, hizo incursiones en la teoría de números y planteó el problema que lleva su nombre, que es un problema de valores en la frontera para la ecuación de Laplace y que tiene una enorme importancia en física. De él decía Gauss: “el número total de publicaciones de Dirichlet no es muy grande, pero las joyas no se pesan en la balanza de una tienda de comestibles”. Como es sabido, la correspondencia epistolar era la forma más común de comunicación entre los científicos de aquellas épocas. Pues bien, Dirichlet era reacio a escribir cartas, no le gustaba esa tarea y no mantuvo correspondencia ni siquiera con sus mejores amigos. Pero cuando nació su primer hijo, hizo una excepción y remitió a su suegro el siguiente aritmético y simple mensaje “2+1=3”.

Otro gran y riguroso analista de este siglo fue Karl Weierstrass (1815-1897), que investigó las funciones analíticas desde una perspectiva diferente a Cauchy y Riemann, introdujo criterios de convergencia de series (por ejemplo, para el concepto más sutil de convergencia uniforme) formalizando el concepto de límite, llevó el rigor al cálculo variacional y fundamentó el conjunto de los números reales. En esta última dirección también trabajaron Georg Cantor (nació en Rusia en 1845 y falleció en Alemania en 1918) y el alemán Richard Dedekind (1831-1916).

En definitiva, todo este proceso de fundamentación del análisis acabó a finales del siglo XIX, con unas bases claras y rigurosas. El salto cualitativo fundamental, que liberó a los fundamentos del análisis de todo oscurantismo y de justificaciones metafísicas, tuvo lugar cuando junto a las operaciones aritméticas se consideró la operación de paso al límite. De esta manera los conceptos y métodos del cálculo iniciados por Newton y Leibniz, y continuados por la saga familiar de los Bernoulli, Euler y Lagrange, quedan completamente consolidados, como un campo matemático del todo riguroso. Con el concepto de límite, o el proceso del paso al límite, las acres críticas —por otro lado, más que justificadas— del arzobispo George Berkeley al método de las "fluxiones" de Newton dejan de tener sentido: ya no habrán más cantidades infinitamente pequeñas y que no son cero, pero que se anulan cuando interesa; esos incrementos evanescentes, que aparecen y desaparecen como los fantasmas, como los denominaba con ironía Berkeley.

Es el momento de dedicar unas líneas a dos de los matemáticos que más influencia han tenido en el siglo pasado: el galo Henri Poincaré (1854-1912) y el germano David Hilbert (1862-1943). Poincaré, ingeniero de minas, realizó investigaciones de una gran originalidad en casi todas las ramas de las matemáticas, así como en física-matemática, astronomía y epistemología ([25],[26]). Al igual que Poincaré, Hilbert deja su sello personal en todos los problemas matemáticos que abordó, incluidos los relativos al análisis de sus fundamentos. En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en París en 1900, enunció 23 de los problemas importantes y que estaban pendientes de solución [25]. Una buena parte de las matemáticas del siglo XX ha girado en torno a la investigación de estas cuestiones, la mayoría de las cuales ya han sido resueltas, pero que —a su vez— han generado nuevos problemas.

Dos ideas centrales del pensamiento hilbertiano fueron la unidad de las matemáticas y la importancia de los problemas en la investigación. Dijo al respecto: "en mi opinión las matemáticas son un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada por la conexión de sus partes... Con la extensión de las matemáticas no se pierde su carácter orgánico, sino que se manifiesta con mayor claridad... En la medida en que una rama de la ciencia ofrece abundancia de problemas está viva; la falta de problemas augura la extinción o el final de su desarrollo independiente...". Recordemos que en la primera década del siglo pasado introdujo los hoy denominados espacios de Hilbert, que permitieron geometrizar el análisis, dando origen al moderno análisis funcional.

La teoría de grupos, que surge en el siglo XIX, tendrá fecundas consecuencias en el siglo XX. Esta teoría tiene su origen en la resolución de ecuaciones algebraicas de grado superior a cuatro. Se demostró que era imposible resolver la ecuación de quinto grado —y de grado superior— mediante radicales. Aunque esta cuestión fue tratada por el matemático italiano Paolo Ruffini (1765-1822), la demostración rigurosa se debe a Abel en el año 1826. Empero, el auténtico fundador de la teoría de grupos fue el matemático galo Evariste Galois (1811-1832), matemático precoz y genial, de vida muy agitada y final desgraciado, pues murió muy joven, a los 21 años, en un duelo. Su compatriota Camille Jordan (1838-1922) presentó esta teoría como factor de unificación de diferentes campos de las matemáticas, aspecto en el que insistieron y profundizaron el alemán Felix Klein (1849-1925), que concibió cada geometría como el estudio de las propiedades invariantes frente a determinados grupos de transformaciones, y el noruego Marius Sophus Lie (1842-1899), que investigó los grupos continuos de transformaciones y su aplicación a la teoría de las ecuaciones diferenciales. Mientras tanto, George Boole (1815-1864, Inglaterra), William Rowan Hamilton (1805-1865, Irlanda) y el propio Hilbert ayudaron a consolidar ésta y otras estructuras algebraicas. Por otro lado, Elwin B. Christoffel (1829-1900, Alemania), Gregorio Ricci (1853-1925, Italia) y Tullio Levi-Civita (1873-1941, Italia) divulgaron el cálculo tensorial; Ernst Zermelo (1871-1953, Alemania) y Adolf Fraenkel (1891-1965, Alemania/Israel), formularon una teoría de conjuntos axiomatizada, y los matemáticos franceses Émile Borel (1871-1965), que introdujo una noción de medida, y Henri Lebesgue (1875-1941), que asimismo aportó otro concepto de medida y generalizó la idea de integral en un histórico trabajo aparecido en 1902, del que el pasado año se celebró su centenario, y el longevo Jacques Hadamard (1865-1963), con sus contribuciones en ecuaciones en derivadas parciales. También descuellan, a principios del siglo pasado, las figuras de Emmy Amalie Noether (1882-1935, Alemania) y Emil Artin (1898-1962, Austria).

A mediados del siglo XIX la lógica era casi un campo virgen. Cuando el álgebra penetró en ese campo y se intentó buscar la fundamentación de las matemáticas, de todas las matemáticas como la unidad disciplinar en que ya se entendían, se produjo un cambio espectacular. El trío de matemáticos ingleses George Peacock (1791-1858), Charles Babbage (1792-1871) y J. F. W. Herchel (1792-1871) insistieron en el carácter lógico de los fundamentos de las matemáticas. En el libro *The Laws of Thought*, Boole señala que su objetivo era "investigar las leyes fundamentales de las operaciones de la mente, gracias a las cuales se razona; expresarlas en el lenguaje de un cálculo y sobre tal fundamento establecer la ciencia de la lógica y construir su método...". La influencia booleana en el desarrollo de la lógica matemática fue enorme, lo que justifica la afirmación de Russell de que "la matemática pura fue descubierta por Boole".

Precisamente Bertrand Russell (1872-1970) publicó, en colaboración con Alfred North Whitehead (1861-1947), los *Principia Mathematica*, uno de los tratados más completos sobre la lógica matemática o, de acuerdo con la concepción russelliana, como la expresión mejor lograda de las matemáticas como parte de la lógica.

Anteriormente, el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) propuso expresar en un lenguaje estrictamente simbólico tanto la lógica matemática como los resultados más importantes de las matemáticas [31].

Volviendo a Hilbert, uno de sus objetivos fue liberar al sistema lógico-deductivo de Euclides del menor atisbo de contradicciones. Hilbert, en sus *Grundlagen der Geometrie* (1899), fundamenta la geometría euclídea sobre un conjunto de veintiún axiomas, exigiendo su compatibilidad, es decir, que no presenten contradicciones internas, y que sean independientes, esto es, que unos no sean consecuencias de otros.

Cantor es el creador de la teoría de conjuntos, que al final, es la base y el fundamento de las actuales matemáticas. Sin embargo, los conjuntos infinitos dieron pie a tal cantidad de paradojas como para poner de nuevo en entredicho los fundamentos de las matemáticas, con lo que la teoría conjuntista se enfrentó a la oposición radical de muchos matemáticos alemanes. Ello sumió a Cantor en una profunda depresión, lo que le obligó a abandonar este tema hasta que lo retomó a finales del siglo XIX. Finalmente, gracias al apoyo inestimable de Hilbert, el Primer Congreso Internacional de Matemáticas de Zurich del año 1897 dio el espaldarazo definitivo a la teoría de conjuntos. En opinión de Hilbert, esta teoría es "el producto más refinado del genio matemático y uno de los logros supremos de la actividad humana puramente intelectual". Y agregaba: "Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros".

Para perturbar aún más a nuestra comunidad, el matemático austriaco Kurt Gödel (1906-1978), que ingresó posteriormente en el Institute for Advanced Study en Princeton (USA), estableció que en un sistema formulado de una manera estrictamente lógica —tal como hicieron Russell y Whitehead con los números naturales— hay siempre proposiciones indecidibles a partir de los axiomas del sistema; en otras palabras, existen dentro del sistema ciertas afirmaciones que no pueden ser ni demostradas ni refutadas a partir de los axiomas. De paso Gödel demostró que es imposible asegurar que los axiomas de la aritmética no puedan conducir a una contradicción. Los resultados de Gödel muestran las limitaciones del método axiomático y prueban que la consistencia de un sistema no puede garantizarse desde dentro del mismo sistema. No tiene, pues, sentido la idea de Hilbert de una axiomatización de la geometría euclídea sin contradicciones internas [25].

Por otra parte, la hipótesis del continuo de Cantor afirma que todo subconjunto infinito del conjunto de los números reales (a este conjunto se le suele llamar el continuo) es equipotente (tiene el mismo cardinal) al de los números naturales o al propio de los reales, es decir, no existe un cardinal intermedio entre los de los conjuntos de los números naturales y reales. Gödel estableció en 1938 que la negación de tal hipótesis no puede deducirse del sistema de axiomas de la teoría de conjuntos, pero fracasó en su intento de probar lo mismo para la hipótesis. Esto fue probado por Paul J. Cohen en 1963, lo que le valió ser laureado con la medalla Fields tres años después.

Como consecuencia de estas paradojas y de la crisis de los fundamentos de las matemáticas surgieron tres escuelas: la logicista, la formalista y la intuicionista. La primera, encabezada por Russell, considera las matemáticas como una parte de la lógica; la segunda, liderada por Hilbert, concibe las matemáticas como un juego de signos y símbolos de carácter formal, sin base empírica, que cumplen una serie de reglas y se apoya en un proceso de axiomatización; y la tercera, impulsada por Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966, Holanda), entiende las matemáticas como una actividad constructiva donde prima la intuición como única fuente del conocimiento, razón por la cual se exige una demostración constructiva de las proposiciones matemáticas y se abre paso a la aparición de las lógicas no bivalentes.

A partir de la Segunda Guerra Mundial las matemáticas inician un nuevo camino, por senderos desconocidos. La teoría de conjuntos y la teoría de la medida han impulsado sobremanera la teoría de probabilidades. Esta teoría y la estadística dependen cada vez más del vertiginoso desarrollo de las computadoras electrónicas o de alta velocidad. Vivimos en la era de la electricidad, en la era electrónica, en la era digital. Las computadoras han alcanzado tal grado de complejidad que han superado con creces los sueños de Babbage, que tan sólo vivió un siglo antes. Y ello, sin lugar a dudas, puede modificar, aunque sólo sea en parte, el desarrollo de las matemáticas. Muchos problemas que no se podían abordar por las limitaciones de cálculo de épocas anteriores, se han podido resolver fácilmente con esta nueva tecnología. Paralelamente a estos nuevos avances técnicos, han proliferado nuevas ramas de las matemáticas: programación lineal, teoría de juegos, investigación operativa, matemática financiera, economía matemática, biomatemática...

Acaba de terminar el siglo XX, por lo que todavía no se tiene la perspectiva necesaria para analizar en profundidad cuáles son los logros capitales alcanzados en matemáticas durante esta última centuria. A modo de resumen nos arriesgaríamos a citar de forma concisa según los siguientes apartados ([2],[25]):

(a) En líneas de investigación los avances más significativos se han producido en el estudio de los sistemas dinámicos y, en particular, de los fenómenos no lineales, temas de gran importancia por su aplicaciones en física y otros numerosos campos; en topología; en la teoría de probabilidades, con el proceso de axiomatización de Kolmogorov, y en el análisis estocástico, con las aportaciones de Kiyori Itô, de gran actualidad debido a la componente aleatoria de muchos fenómenos; y en los estudios sobre lógica, computabilidad y complejidad que originaron la computadora, el gran invento del siglo XX, que ha transformado radicalmente nuestra sociedad.

(b) En cuanto a resultados más concretos, señalaríamos: el teorema de incompletitud de Gödel, recogido en su conocido artículo *Sobre las proposiciones formalmente indecidibles en Principia Mathematica y sistemas relacionados* (1931); el teorema de Cohen (1963), que establece que la hipótesis del continuo es independiente de la axiomática de la teoría de conjuntos; el teorema de Carleson (1965) - Hunt (1968), sobre la convergencia de las sumas parciales de las series trigonométricas; la resolución del problema del empaquetamiento de Kepler por Thomas Hales (1998), que abordaremos en detalle más adelante; la fórmula de Black-Scholes para la valoración del mercado de opciones, descubierta por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton (1973); y, quizás el que más repercusión mediática ha tenido, el teorema de Fermat, que vimos anteriormente.

(c) Respecto de matemáticos, por su obra completa y su influencia, nos quedaríamos, por este orden, con Henri Poincaré, David Hilbert y Nicolas Bourbaki, que en realidad no es un matemático sino el seudónimo de un grupo de matemáticos —mayoritariamente franceses— que reescribieron una gran parte de las matemáticas con un exquisito rigor y detalle, partiendo de la lógica, la teoría de conjuntos y las estructuras matemáticas. Su monumental obra, curiosamente, lleva el nombre de

Éléments des mathématiques. Algunos notables miembros de este grupo son André Weil (1906-1998), Jean Delsarte (1903-1968), Jean Dieudonné (1906-1992), Claude Chevalley (1909-1984), Roger Godement... y los laureados con la Medalla Fields Laurent Schwartz, Alexander Grothendieck, Jean Pierre Serre y René Thom. Subrayemos que J. P. Serre se ha convertido además en el primer matemático en recibir el Premio Abel —recientemente instituido como señalábamos anteriormente— correspondiente al año 2003, según la Academia Noruega de Ciencias y Letras, por su papel central en la elaboración de la forma moderna de numerosas partes de las matemáticas, en particular la topología, la geometría algebraica y la teoría de números.

3. LAS MATEMÁTICAS VISTAS POR ALGUNOS CÉLEBRES MATEMÁTICOS

A continuación veremos la opinión, no siempre coincidente, que algunos matemáticos tienen de nuestra ciencia.

Ya hemos visto que Platón confería a las matemáticas un aspecto formativo, educativo, en la formación del buen ciudadano ya que, quienes las conocen, están más dotados para aprender cualquier otra disciplina. Para Claudio Ptolomeo "las matemáticas representan la consecución más noble de la mente humana".

Según el genial Gauss "los descubrimientos matemáticos, como las violetas de los bosques en primavera, tienen su época que ningún hombre puede adelantar o retrasar". Para J. Fourier "el estudio profundo de la naturaleza constituye la fuente más fértil de los descubrimientos matemáticos". De acuerdo con Jacobi, "las matemáticas son la ciencia de lo que es claro por sí mismo".

Galois piensa que "las matemáticas son el trabajo del espíritu humano que está destinado tanto a estudiar como a conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla" [19]. Poincaré las considera como "el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas".

Bertrand Russell ve "las matemáticas como una ciencia en la cual no se sabe ni de qué cosas se habla ni si de lo que de ellas se afirma es verdadero o falso". Hay que interpretar esta sentencia en sus justos términos. Se trata de una ciencia muy abstracta, por lo que no sabemos muy bien de lo que estamos hablando, que es su primera parte. Además, las propias contradicciones lógicas a las que llega Russell y la contundencia del teorema de incompletitud de Gödel justifican su segunda parte.

Einstein asegura que "en la medida en que se refieren a la realidad, las leyes de las matemáticas no son ciertas; y en la medida en que son ciertas, no se refieren a la realidad”. En esta interpretación de Einstein subyace la dualidad de las matemáticas, entre sus dos visiones: puras y aplicadas.

Dirac afirma que “las matemáticas son una herramienta especialmente apta para tratar con conceptos abstractos de cualquier clase y su poder en este campo no tiene límites”.

Hilbert entiende “las matemáticas como un juego que transcurre de acuerdo con unas reglas simples y con unos signos sin significados”. Y añade: “el arte de hacer matemáticas yace en encontrar un ejemplo particular que contenga todos los gérmenes de la generalidad”. En su opinión, “las matemáticas no saben de razas ni fronteras geográficas; para las matemáticas, desde un punto de vista cultural el Mundo es un único país”.

Para John Allen Paulos, magnífico divulgador, “las matemáticas son una disciplina intemporal preocupada por la verdad abstracta” [30].

Con los siguientes matemáticos nos detendremos más tiempo, a fin de comparar dos formas diametralmente diferentes de concebir las matemáticas.

Godfrey Harold Hardy (nació en Inglaterra, 1877-1947) se consideraba un matemático puro: ¡el quinto mejor del Mundo!, según decía de sí mismo. Para él, un matemático es un creador, un inventor, como un poeta o un pintor, pero sus productos perdurarán más que los de éstos, porque se basan en ideas y no en palabras o colores, si bien coincide con ellos en el sentido estético ([18],[25],[28]).

Sus biógrafos concuerdan en que fue una persona rara, extravagante, pero extraordinariamente original y fecunda. Hacía gala de un ateismo que le llevaba a considerar a Dios como su enemigo personal. Se cuenta que cuando viajó a Dinamarca envió una postal a un amigo asegurando que había obtenido una demostración de la hipótesis de Riemann. Si el barco naufragaba y fallecía, pasaría a la posteridad como un matemático legendario, al igual que Fermat. Pero Dios, su enemigo, no iba a consentir que fuera famoso, por lo cual podía viajar con la seguridad de que no pasaría nada y que la travesía sería tranquila.

Otra de sus excentricidades más negativas fue su insistencia exagerada, en negar la utilidad de las matemáticas. Para que, según Hardy, un tema matemático pudiera merecer ese calificativo tenía que ser inservible, inútil. Si era útil, si tenía aplicaciones, era feo; y cuanto más aplicado, más feo…, esto es, chocaba con su sentido estético de las matemáticas. Y lo remataba afirmando: "Estoy interesado en las matemáticas sólo como un arte creativo".

Decía en su obra *Apología de un matemático,* uno de los relatos más clarividentes sobre los procesos creativos del ser humano: "nunca he hecho nada útil. Es probable que ninguno de mis descubrimientos haga, directa o indirectamente, para bien o para mal, el menor cambio en el bienestar del mundo…" Estos comentarios, en palabras de J. R. Newmann , son un disparate, una salida de tono más de Hardy, quien era consciente de ello. La obra de Hardy es muy extensa, más de 300 trabajos sobre distintas partes del análisis matemático y de la teoría de números. Un centenar de ellos son el fruto de la colaboración durante 35 años con otro excepcional matemático, John Littlewood, con el que formó la pareja más famosa de toda la historia de las matemáticas. Resulta difícil explicar cómo congeniaron durante tanto tiempo, dado el especial carácter de Hardy. Parece ser que el secreto del éxito de esta colaboración se basó en que fijaron perfectamente las reglas del juego que, por extraño que parezca, fueron las que siguen (i) Cuando uno escribía al otro, no importaba en absoluto si lo escrito era correcto o no; (ii) cuando uno recibía una carta del otro, no estaba obligado a leerla, ni siquiera a contestarla; (iii) si bien no era imprescindible, no era conveniente que ambos se concentraran en los mismos detalles del problema; y (iv) no era importante si alguno había contribuido lo más mínimo a un artículo conjunto, con lo se evitaba toda suspicacia sobre el grado de contribución de cada cual en la elaboración de sus trabajos [34].

Con Srinivasa Ramanujan (1887-1920), aunque el número de artículos en colaboración fue inferior, sobresale la honestidad y la acogida humana que Hardy le dispensó. Ramanujan, un oficinista del puerto de Madrás (India) de procedencia muy humilde, se cansó de escribir cartas repletas de teoremas a distintos matemáticos occidentales sin recibir contestación alguna. Fortuitamente algunas de estas misivas llegaron a Hardy, que sí supo apreciar el talento de este joven hindú, quedando impresionado por cuanto muchos de los resultados que le comunicaba tenían un gran valor matemático, razón por la cual le consiguió una beca para que viniera a estudiar al Reino Unido. La extrema pobreza en que vivió Ramanujan repercutió negativamente en su salud. En uno de sus ingresos hospitalarios, Hardy lo fue a visitar, pero no sabía cómo iniciar la conversación. Entonces se le ocurrió comentar que el taxi en que se había desplazado tenía matrícula 1.729 y que ese número le parecía anodino, que no le sugería nada, a lo que replicó inmediatamente Ramanujan: "no, Hardy, estás equivocado. Ese número es muy interesante, ya que es el menor número entero positivo que se puede expresar de dos maneras diferentes como suma de dos cubos ($1.729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$)". La intención de esta anécdota no es desvirtuar la imagen de Ramanujan, presentándolo como una calculadora viviente. Por el contrario, dotado de una gran intuición que le ayudó a superar su escasa formación matemática, enumeró resultados de una gran profundidad matemática, tanto en teoría de números como en análisis matemático, que tardaron muchos años en ser entendidos, valorados y demostrados correctamente.

En definitiva, la obra de Hardy constituye una de las contribuciones más importantes a las matemáticas del siglo XX. No sólo sus resultados tienen aplicaciones en otras ramas de las matemáticas, lo cual a Hardy le contentaría, sino que hizo una contribución en genética (la conocida como Ley de Hardy-Weinberg) sobre la transmisión de caracteres mendelianos dominantes y recesivos en una población mixta, que ha resultado fundamental en el estudio de los grupos Rh de la sangre y en el tratamiento de la hemólisis en los recién nacidos, lo que disgustaría totalmente a Hardy [28]. ¿Se revolverá por ello en su tumba? ¿Y si viera que la admirable función $\zeta(s)$, que tan buenos resultados ha dado en la determinación de la cantidad de primos menores que un número dado, en la teoría de números, y que aún guarda tantos secretos por descubrir, como la conjetura de Riemann, se utiliza en pirometría, al investigar la temperatura de los hornos? ¿Quién hubiera aventurado que los números primos tendrían aplicaciones, como comentaremos más adelante?

Janos, Johann o John von Neumann (1903-1957) es otro matemático de primera fila, de origen húngaro, pero formación germana y final estadounidense, como evidencia su cambio de nombre. Su campo de investigación abarca temas muy diversos, desde la lógica matemática, la teoría de conjuntos, la teoría de grupos continuos y la teoría de operadores, pasando por la física cuántica y la física de la energía, hasta participar en la construcción de aparatos computadores ([25],[28]). Notables fueron, igualmente, sus contribuciones sobre la teoría de juegos y la economía, como bien se refleja en su célebre obra, escrita junto al economista Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour* (1944). Incluso llegó a participar en proyectos bélicos, como la construcción de la bomba atómica.

Como se ve por su currículo, trata muchos aspectos de las matemáticas, desde los más abstractos y puros hasta los más aplicados. Un personaje, pues, con autoridad para hablar de matemáticas. Según Von Neumann, el hecho más característico de las matemáticas es su relación tan peculiar con las ciencias naturales. Casi todo el mundo, matemáticos o no, están de acuerdo en que las matemáticas no son una ciencia empírica, pero que ha estado y está muy ligada a la física y a otras ciencias de la naturaleza. Ello queda justificado, de una parte, por el hecho de que muchos de los mejores resultados alcanzados en las matemáticas modernas han sido motivados por las ciencias naturales y, de otra, por la matematización de las partes teóricas de dichas ciencias.

De acuerdo con Von Neumann, las matemáticas poseen una doble naturaleza: las matemáticas como cuerpo científico propio, independientes de otros campos, y las matemáticas relacionadas con las ciencias naturales.

Existen ejemplos que muestran de una forma contundente esta conexión entre matemáticas y realidad, entre matemáticas y ciencias experimentales. Nadie duda, como vimos anteriormente, que en las civilizaciones más antiguas —Babilonia, Egipto y Grecia— la geometría tuvo un origen empírico, como la física. Hasta que como consecuencia de la influencia del pensamiento filosófico griego, se convierte con Euclides —en sus *Elementos*— en una ciencia hipotético-deductiva. Otro ejemplo lo constituye el cálculo, cuyos orígenes también son empíricos. Recordemos los primeros intentos de realizar una integración.

Sería interesante que todos los matemáticos y, en general, todos los científicos, meditaran cómo Von Neumann visiona esa dualidad de las matemáticas (véase una traducción de su breve ensayo *El Matemático* en [28]): "…es una aproximación relativamente buena a la verdad que las ideas matemáticas se originan en lo empírico, aunque su génesis sea larga y oscura. Pero una vez concebidas así, el asunto comienza a vivir una vida peculiar propia, y es mejor compararla a lo creativo, gobernado por motivos casi enteramente estéticos, que a cualquier otra cosa y, en particular, a una ciencia empírica". Pero advierte del peligro de que cualquier parte de las matemáticas se aleje mucho de su fuente empírica, ya que entonces se vuelve más y más en esteticismo puro, convirtiendo a la disciplina en un galimatías de detalles y complejidades. La geometría diferencial y la teoría de conjuntos fueron concebidas como disciplinas abstractas, no aplicadas, y sin embargo, una década después en el primer caso y un siglo más tarde en el segundo, han tenido fecundas aplicaciones en diferentes ramas de la física y en otros campos.

Murió a los 53 años víctima de un cáncer de huesos, pues le gustaba asistir a los ensayos atómicos que los norteamericanos realizaban en Los Alamos.

Resulta asombroso contemplar, más de dos mil años después, el paralelismo existente entre las concepciones matemáticas de Euclides y Hardy, de un lado, y de Arquímedes y Von Neumann, de otro. La primera pareja representa la dimensión estética de las matemáticas, las matemáticas de la razón y de la inteligencia, las matemáticas alejadas y purificadas de cualquier contaminación que pudieran producir las aplicaciones. Hardy sentía una gran veneración por Euclides. Cuando quería ilustrar su teoría sobre el carácter estético de las matemáticas, recurría —por ejemplo— al teorema en que Euclides establece que hay infinitos números primos, cuya prueba es ciertamente bella, donde se utiliza una de las herramientas más sutiles de las matemáticas griegas: el proceso de demostración por reducción al absurdo. Para Hardy, Euclides vivía, lo consideraba como si fuera un respetado colega de otra universidad, seguramente de la de Alejandría. La segunda es el prototipo de matemáticas rigurosas, pero aplicadas en distintos campos, incluso en la producción de armas para la guerra y con un final trágico en ambos casos: Arquímedes fue muerto por un soldado romano mientras resolvía un problema matemático y Von Neumann fue víctima indirectamente de las armas nucleares.

4. PRESENCIA DE LAS MATEMÁTICAS EN DISTINTOS CAMPOS

Hay algunos tópicos y estereotipos sobre los matemáticos que conviene eliminar, porque no son representativos de todo el colectivo y se corresponden a situaciones particulares que también se dan entre otros científicos y en cualquier grupo humano. Así, Roger Ascham (1515-1568), sabio y escritor británico que fue tutor de la reina Isabel I, nos dedica las siguientes lindezas: “Observemos a todos los que tienen una inclinación absoluta por las matemáticas: qué solitarios son, qué incapaces de vivir con los demás, qué inútiles para el mundo” [37]. De Inglaterra también procede la próxima anécdota. Un caballero inglés que paseaba por el campo se acercó a un globo, desde el que un desconocido le hacía señales porque se había perdido. El del globo le preguntó, por favor, ¿dónde estoy? Tras pensarlo un rato, el caballero le respondió: en un globo. Desconcertado pero resignado, el del globo le dice: usted es matemático ¿verdad? Estupefacto, el paseante inquiere ¿y cómo lo ha sabido? Porque me ha dado usted una respuesta absolutamente precisa y perfectamente inútil, responde el viajero del globo.

Como chiste está bien, pero ni el gran Hardy tenía razón cuando defendía la inutilidad de las matemáticas. En el repaso que se acaba de dar a su historia, se ha puesto en evidencia las numerosas aplicaciones de esta ciencia; es más, hasta mediados del siglo XIX las matemáticas estaban a remolque de las ciencias de la naturaleza. Y si no, trataremos de convencerles a continuación, con juicios de personalidades científicas —no matemáticas— todos ellos con mayor autoridad que el conductor del globo. Después ilustraremos su utilidad con unos temas seleccionados.

Si uno abre un libro de física al azar, por ejemplo, de mecánica, seguro que se topa con expresiones y fórmulas matemáticas, cuando no en su parte literal con un lenguaje que nos resulta familiar. Ya lo sentenció Galileo: "nadie sabrá entender el gran libro del universo si ignora su lenguaje, el lenguaje matemático".

Muchos científicos se maravillan de la efectividad ilógica de las matemáticas en las ciencias naturales. ¿Está diseñado el mundo según unos principios matemáticos? Al respecto comentaba Eugene Wigner, Premio Nobel de Física: "Es difícil negar el hecho de que nos encontramos ante un milagro... Las palabras que mejor explican la intrusión de conceptos matemáticos en el ámbito de la física fueron pronunciadas por Einstein, para quien las únicas teorías físicas que aceptamos de buen grado son las más bellas. Ni que decir tiene que los conceptos matemáticos, que tanto invitan al ejercicio del ingenio, poseen esa cualidad de lo bello... El milagro de la idoneidad del lenguaje matemático para la formulación de las leyes de la física es un don maravilloso que no nos merecemos y que no podemos llegar a comprender. Deberíamos estar agradecidos de que nos haya sido concedido y tenemos que confiar en que seguirá siendo válido en las investigaciones futuras indefinidamente, para bien o para mal. Con ello podremos ampliar el saber humano, aunque sea a costa de nuestro anonadamiento..." [37].

Es curioso el final de una polémica entre un grupo de matemáticos franceses. En la Academia de Ciencias de París, Fourier comentó ante Adrien-Marie Legendre (1752-1833) y Simeon Denis Poisson (1781-1840) que no entendía cómo matemáticos tan ilustres como Abel y Jacobi malgastaban el tiempo dedicándose al estudio de cuestiones tan teóricas como las integrales elípticas, en lugar de usarlo en el estudio de problemas de la física-matemática. Por una indiscreción de Poisson, Jacobi se enteró de esta observación de Fourier y, ofendido, escribió a Legendre: "es cierto que el señor Fourier cree que el principal objetivo de las matemáticas es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales, pero un filósofo como él debería haber aprendido hace ya mucho tiempo que el único fin de la ciencia es honrar al espíritu humano y que, a este respecto, una cuestión sobre la teoría de números tiene un valor tan grande como una pregunta acerca del funcionamiento del universo” [10]. Pero, quién lo diría, la teoría de Fourier, que él imaginaba tan aplicada, devino en otra tan pura como el análisis armónico, pudiéndose considerar el teorema de Carleson sobre la convergencia de las series trigonométricas como uno de los resultados fundamentales de las matemáticas en el siglo XX; mientras que algunas de las obras del purista Jacobi versan sobre materias de gran importancia en el campo de las aplicaciones, especialmente en mecánica celeste y mecánica de fluidos.

Las matemáticas como ciencia deductiva en contraposición a las ciencias naturales inductivas fue motivo de una controversia, protagonizada por dos grandes científicos y polemistas: el biólogo T. H. Huxley (1825-1895) y el matemático J. J. Sylvester (1814-1897). Huxley, que no tenía una buena formación matemática, criticó duramente la filosofía positivista de Auguste Comte, quien colocaba las matemáticas en la cima del conocimiento, considerando su método como modelo a imitar por todas las ciencias. Decía Comte: “Es, pues, mediante el estudio de las matemáticas, y sólo a través de él, como se puede adquirir una idea correcta y profunda de lo que es una ciencia”. Este principio era totalmente inaceptable para Huxley, que arguía: “Eso equivale a decir que el único estudio que puede dar una idea adecuada de lo que se entiende por ciencia... y de la investigación científica, es el estudio que no sabe nada de la observación, nada de la experimentación, nada de la inducción, nada de la causación”. Sylvester le responde, en una fastuosa conferencia en la British Association for the Advancement of Science —a la que pertenecían ambos— que, muy por el contrario, la observación siempre ha tenido una gran importancia en el proceso del descubrimiento matemático, sostiene que una buena parte de las grandes ideas matemáticas modernas se sustentan en la realidad e ilustra sus afirmaciones acudiendo a resultados u opiniones de los clásicos. Huxley no replicó a este discurso, pero eso no significa que haya finalizado —por el contrario, sigue vivo— el debate sobre la influencia de la experiencia en la génesis de los conceptos matemáticos abstractos [28]. Huxley fue un destacado estudioso de las estructuras biológicas, pero no se dio cuenta de la importancia que desempeñarían las estructuras en matemáticas, detalle que también pasó inadvertido para Sylvester, a pesar de su condición de algebrista.

Es muy arriesgado afirmar que una teoría matemática no tiene aplicaciones. El físico P. Dirac (1902-1984), a quien se debe la introducción en física de la distribución que lleva su nombre, reconocía que “las geometrías no euclídeas y el álgebra no conmutativa, que en su tiempo fueron consideradas puras ficciones de la mente y pasatiempos de los pensadores de la lógica, se han vuelto ahora muy necesarias para la descripción de hechos generales del mundo físico”. Estas geometrías y la geometría riemanniana son fundamentales en la teoría de la relatividad.

El mismísimo Einstein se preguntaba: “¿Cómo es posible que las matemáticas, siendo después de todo un producto del pensamiento humano independiente de la naturaleza, se hayan adaptado tan admirablemente a los objetos de la realidad?”.

C. N. Yang, Premio Nobel de Física en 1957, opinaba: “Los teoremas matemáticos tienen que ser demostrados —por lo menos, eso es lo que se cree. En física teórica, la forma de investigar se acerca mucho a los juegos de adivinación; no olvidemos que, a menudo, la adivinación nos conduce a conclusiones que resultan equivocadas... Muchos teóricos de la física son, en cierto sentido, antagonistas de las matemáticas o, por lo menos, tienden a minimizar su importancia. No estoy de acuerdo con ellos... Aprecio tanto las matemáticas, sus juicios de valor, su belleza, su poder...hay ingenuidad y complicidad en sus maniobras tácticas; algunos movimientos en campañas estratégicas están tan bien ejecutados que se te corta la respiración. Sin olvidar, ¡milagro entre los milagros!, que algunos conceptos matemáticos sirven para elaborar las estructuras fundamentales del universo físico...” [37].

LA PREVISIÓN METEOROLÓGICA

Cuando un ciudadano ve y oye en los noticiarios de televisión la información del tiempo no piensa ni un instante que está ante un asunto extremadamente delicado, un problema multidisciplinar, en el que intervienen varias ciencias: la química, la física, la informática y también las matemáticas. En la elaboración de la previsión numérica del tiempo se divide la atmósfera en cajas de base cuadrada de ciertas dimensiones, en cuyos centros se determinan los parámetros meteorológicos: presión, velocidad del viento, humedad, nubosidad... Partiendo de un estado inicial de la atmósfera, conocido, se suministran todos los datos posibles a potentes ordenadores que, junto a las leyes de la física, dictaminarán cómo evolucionará el tiempo [24].

Aquí se presenta una primera gran dificultad: no es fácil establecer el estado inicial de la atmósfera. Porque, por una parte, las estaciones meteorológicas están establecidas en tierra y muy mal distribuidas —lo que dificulta la medición de datos en altitud— y, por otra, los satélites —que sería la alternativa— no permiten efectuar la medición de aquellos parámetros en el mismo instante en todos los puntos de la atmósfera.

Además, el célebre meteorólogo norteamericano Edward N. Lorenz demostró que la atmósfera es un sistema caótico, es decir, un error —por pequeño que sea— en el establecimiento de un estado inicial para la atmósfera se amplifica rápidamente en el transcurso del tiempo, abocándonos a cometer grandes errores. Esta dependencia irregular de los sistemas diferenciales no lineales respecto de las condiciones iniciales se conoce con el nombre de "efecto mariposa", pues una mariposa que mueva sus alas en China puede originar, meses después, un huracán en las costas de California, por ejemplo. Por lo tanto, la previsión del tiempo a muy largo plazo se nos antoja imposible.

Afortunadamente, la teoría de los sistemas dinámicos, iniciada precisamente por uno de los matemáticos que hemos citado anteriormente, H. Poincaré, ha producido avances espectaculares, permitiendo dirimir qué regímenes de tiempo son estables y cuáles son inestables. En estos últimos casos se precisa una modelización probabilística, a fin de incorporar el carácter aleatorio de la previsión. Aquí interviene una teoría recién iniciada, la de las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas.

LAS TARJETAS BANCARIAS

Cuando Gauss proclamó que la teoría de números es la reina de las matemáticas o cuando Jacobi, en su contestación a Fourier, afirmaba que una cuestión sobre números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo, ¿quién iba a sospechar que la teoría de números, en particular, la de los números primos, tendría una utilidad práctica?

¿Quién no dispone de una o varias tarjetas bancarias: VISA, 4B, MasterCard, ClaveCard...? Quizás algunos de los usuarios han oído que este tipo de tarjetas constituyen un rectángulo áureo, esto es, que la razón entre sus lados es el número de oro, la razón áurea —que es un aspecto puramente estético— pero la inmensa mayoría ignora que en una cuestión fundamental —como es la seguridad— intervienen los números primos. En efecto, en los años 80 del siglo pasado el secreto de las tarjetas de crédito yacía en un método de encriptación en el que intervenía un número N muy grande, de centenares de cifras, que es el producto de dos inmensos números primos. Así pues, la seguridad de nuestras tarjetas estaba garantizada por un par de números primos grandes, ante la imposibilidad práctica de descomponer N en factores, en aquellos años (en Francia N tenía entonces 97 cifras). Con el espectacular incremento de la potencia de cálculo de los ordenadores, hubo por cuestiones de seguridad que aumentar el número de cifras de N (en 2002 se utilizaban números N con casi el doble de cifras) [24].

La criptografía, la ciencia de la codificación y descodificación, es hoy una parte pujante de las matemáticas. La codificación y descodificación de mensajes, el enviar mensajes que no pudiera interpretar el enemigo o intervenir y descifrar los que enviara el rival, son técnicas muy antiguas, milenarias quizás. Es sabido que el desciframiento de la máquina alemana Enigma por parte de los aliados en el transcurso de la Segunda Guerra Mundial desempeñó un importante papel en el desenlace del conflicto.

El método RSA (Rivest, Shamir y Adleman), basado en una clave de encriptación pública y otra de desencriptación secreta, constituye una notable mejoría del método anterior, si bien se fundamenta en lo mismo: la imposibilidad de descomponer números grandes en sus factores primos en un tiempo razonable o la posibilidad de hallar números primos de centenares, acaso millares, de cifras que permitirían formar números grandes y difíciles de factorizar.

Quizás el único peligro de este método es el aumento de la potencia de cálculo de los ordenadores, lo cual ayudaría a descomponer números de centenares, millares... de cifras rápidamente. Pero existen alternativas. Por ejemplo, la utilización de propiedades algebraicas de las curvas elípticas puede ser útil en este proceso de codificación de la información. O el recurso a la criptografía cuántica, basada en la idea de físicos y matemáticos de construir ordenadores cuánticos, algo que es todavía muy incipiente y que se apoya en las leyes de la física cuántica. Está probado que este ordenador, si finalmente fuera fabricado, descompondría velozmente grandes números en sus factores primos, por lo que el método RSA quedaría obsoleto. Pero los protocolos de criptografía cuántica, donde los métodos de encriptación utilizarían átomos, fotones... —al parecer— tienen una seguridad absoluta [35].

¡Qué diría G. H. Hardy si viera que aquellos campos matemáticos en los que él trabajaba y que consideraba inútiles, ahora resulta que tienen estas aplicaciones en nuestra vida cotidiana!

LA RADIOFONÍA Y LA TELEFONÍA MÓVIL

¿Quién no tiene en su casa uno o varios aparatos de radio? Seguramente alabará las excelencias de los técnicos y de los ingenieros, pero con total seguridad desconocerá que estos aparatos tan comunes en todos los hogares son fruto, fundamentalmente, de deducciones puramente matemáticas ([1],[24]).

Todo comenzó con el descubrimiento de las ondas electromagnéticas. Fue James Clerk Maxwell, físico escocés, quien matematizó las leyes que generalizan los fenómenos electromagnéticos al expresarlas en forma de ecuaciones. A partir de estas ecuaciones demostró, mediante razonamientos estrictamente matemáticos, la existencia de las ondas electromagnéticas y que éstas debían propagarse con la velocidad de la luz. Los resultados de Maxwell permitieron determinar ondas electromagnéticas de origen puramente eléctrico. La existencia de esta clase de ondas fue confirmada experimentalmente por Heinrich R. Hertz y después el científico ruso A. S. Popov y el italiano Guglielmo Marconi —al descubrir el modo de excitar, transmitir y recibir oscilaciones electromagnéticas— las hicieron útiles para un gran número de aplicaciones, estableciendo así las bases de la moderna radiotecnia y de la telegrafía sin hilos.

El teléfono móvil forma parte ya de nuestra vida cotidiana y es un símbolo del progreso tecnológico de la humanidad. Y ha adquirido esta importancia, lo que llama poderosamente la atención, en un lapso de tiempo récord. Pero cuando un usuario emplea un móvil desconoce la cantidad de aportaciones científicas y tecnológicas que hay detrás de este pequeño artilugio: telecomunicaciones, informática, tratamiento de señales y matemáticas. Muchas matemáticas y algoritmia hay detrás de la telefonía móvil. Las primeras constituyen el soporte teórico de todas las etapas en el tratamiento de la información, lo cual posibilita una comunicación telefónica a partir de un móvil. Corresponde a la segunda, la algoritmia, convertir estos resultados en protocolos efectivos y eficaces.

Recordemos que todos los datos transmitidos en una red de radiofonía móvil son numéricos (paquetes de 0 y 1 de cierta longitud, que contienen la información). Y que la gran diferencia con la telefonía clásica radica en que estos paquetes se transmiten por ondas hertzianas, no por cable. En consecuencia, hay que asegurar la confidencialidad, lo que se logra incorporando un protocolo criptográfico. Además, las ondas hertzianas están sometidas a distintas perturbaciones (reflexión y absorción en los edificios, ecos...), por lo que hay que introducir en el paquete códigos correctores para poder recuperar la señal original. Como se puede ver, se trata de un problema complejísimo, que reúne expertos de múltiples especialidades.

¿No resulta sorprendente que desde La Tierra se controlen los movimientos de un pequeño carricoche, en apariencia un juguete de nuestros hijos con mando a distancia —el Pathfinder— sobre la superficie de Marte? ¿Quién no se impresiona contemplando las fotos que una nave espacial remite desde Júpiter o sabiendo que el hombre puede teledirigir satélites artificiales en los confines de nuestro sistema planetario? Confortémonos sabiendo que mucho han tenido que ver las matemáticas en estos adelantos.

UNA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DEL SIDA

Desde el año 1980 se están construyendo modelos matemáticos del virus de inmunodeficiencia humana (VIH), el virus que causa el SIDA (Síndrome de Inmuno-Deficiencia Adquirida). Caben varios enfoques matemáticos en el proceso de modelizar la inmunología del VIH. Tradicionalmente la estadística servía como la mayor herramienta y aún desempeña un importante papel en la comprensión de la dinámica de esta enfermedad a todos los niveles. El reciente descubrimiento y uso de los autómatas celulares y de las redes neuronales ha permitido explorar mucho nuestro sistema inmunológico.

Algunos grupos trabajan con versiones estocásticas de modelos de infección por el VIH, considerando que las poblaciones de células interactúan en un marco probabilístico discreto. Este enfoque es muy especializado. En cambio, también se puede tratar de entender esta enfermedad mediante un planteamiento determinista. Y, a pesar del poco tiempo transcurrido, se puede asegurar que estos sistemas dinámicos continuos, ya sean de ecuaciones diferenciales ordinarias o ya sean de ecuaciones en derivadas parciales, están aportando información sobre esta enfermedad vírica.

Se suelen elegir en esta vía modelos de población y bajo ciertas suposiciones sobre la manera en que interactúan las poblaciones de células, se crean modelos que pueden ser analizados y perfeccionados.

Un posible modelo se traduce matemáticamente en el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dT(t)}{dt} = s(t) - \mu_T T(t) + r\frac{T(t)V(t)}{C+V(t)} - k_V T(t)V(t)$$

$$\frac{dT^i(t)}{dt} = k_V T(t)V(t) - \mu_{T^i} T^i(t) - r\frac{T^i(t)V(t)}{C+V(t)}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = Nr\frac{T^i(t)V(t)}{C+V(t)} - k_T T(t)V(t) + \frac{g_V V(t)}{b+V(t)}$$

con las condiciones iniciales $T(0)=T_0$, $T^i(0)=0$, $V(0)=0$. Aquí las funciones incógnitas representan: T(t) la cantidad de células no infectadas, $T^i(t)$ la población de células infectadas y V(t) la cantidad de virus que viven libremente en la sangre. Además, en el sistema diferencial precedente figuran una serie de parámetros cuyos valores (aproximados) se determinan a partir de los abundantes datos clínicos ya disponibles para los investigadores.

Este modelo se modifica después cuando se inicia un tratamiento a base de alguna droga. Finalmente, el modelo se contrasta con la realidad: los datos clínicos. Incluso las cuestiones relacionadas con estos sistemas y más puramente matemáticas (que si el problema está o no bien planteado, teoremas de existencia, control óptimo...) pueden resultar de interés en esta investigación.

La autora de esta modelización, Denise Kirscher [22], es Profesora Ayudante de Matemáticas en la Universidad de Texas y Profesora Ayudante Adjunta de Medicina en el Centro Médico de la Universidad de Vanderbilt. Uno de sus objetivos fue demostrar que los matemáticos tienen y pueden desempeñar un papel fundamental en la investigación médica de primera fila. Asimismo, subraya que uno de los mayores obstáculos con los que se encuentra esta colaboración entre médicos y matemáticos es la falta por parte de los primeros de algunos rudimentos en matemáticas superiores y, por parte de los segundos, la carencia absoluta de los conocimientos del problema médico que subyace, que está debajo de todo este planteamiento matemático. Puede llevar varios años adaptarse a la jerga médica, especialmente en áreas que están en continua evolución.

LOS ORDENADORES

En un delicioso artículo divulgativo, Gregory J. Chaitin [7] señala como, pese a ser un invento muy reciente, la mayoría de la gente ve en los ordenadores sólo aparatos eminentemente prácticos, habiéndose olvidado ya de que su creación está relacionada con una cuestión puramente filosófica que subyace en los fundamentos de las matemáticas.

Recordemos que la teoría de conjuntos trajo sus paradojas, acaso la más conocida sea la de Russell: “Si consideramos el conjunto de todos los conjuntos que no son un elemento de sí mismo, ¿es este conjunto elemento de sí mismo?”. La respuesta es contradictoria: es un elemento de sí mismo si, y sólo si, no lo es. Para estos problemas de la lógica, Hilbert propuso la formalización completa de todo el razonamiento matemático, para lo que era preciso crear un lenguaje artificial perfecto, de modo que hubiera un procedimiento mecánico que decidiera si una demostración respetaba o no las reglas. De esta forma Hilbert sitúa el problema en el marco de una nueva rama de las matemáticas: la metamatemática, que puede ser considerada como una teoría lógico formal de la demostración en matemáticas. Pero, tal como vimos anteriormente, Gödel demostró paladinamente que Hilbert estaba equivocado. Según Chaitin, el estudio del original del trabajo de Gödel es muy complicado y en su argumentación se detecta algo análogo a la programación en LISP, en una época en que no existían ordenadores. Alan Turing (1912-1954) interpretó que ese procedimiento mecánico al que aludía Hilbert era una máquina, del tipo de la que se denominaría posteriormente máquina de Turing, que formalizó el concepto de algoritmo y fue la precursora de las computadoras digitales. En el artículo original se utiliza lo que llamaríamos hoy un lenguaje de programación, rudimentario pero versátil. Turing afirmó que esta máquina es capaz de efectuar cualquier cómputo que pudiera realizar un ser humano. Pero en seguida encuentra un problema que la máquina no podrá resolver: el de la detención o de la parada, es decir, ¿se puede decidir de antemano si una máquina de Turing obtendrá la solución y, por tanto, se parará? Turing demostró que es imposible crear un verificador de terminación universal. Ningún sistema axiomático formal puede ser completo. Para ciertos problemas bien planteados, no existe ningún procedimiento que, en un número finito de pasos, los resuelva: son los problemas no computables. Así pues, a la indecibilidad de Gödel siguió la incomputabilidad de Turing.

Como decíamos antes, el computador ha transformado completamente nuestra sociedad. Cabría preguntarse si esta poderosa máquina llegará a reemplazar algunas de nuestras capacidades mentales en los procesos de razonamiento, verbigracia, en la prueba de un teorema matemático.

El famoso teorema de los cuatro colores afirma: “En un plano o en una esfera no se necesitan más de cuatro colores para colorear un mapa de manera que dos regiones vecinas, esto es, que tengan frontera común que no se reduzca a un punto, no queden pintadas del mismo color”. Los cartógrafos renacentistas ya intuían que con cuatro colores les bastaba para hacer mapas en los que los países eran clara y fácilmente distinguibles. Pero fue en Inglaterra, en 1850, donde Francis Guthrie, un joven estudiante de derecho, aficionado a dibujar y colorear mapas, creyó que se trataba de un problema matemático que se podía resolver. Entonces se lo planteó a su hermano Frederik, que asistía a las clases de matemáticas del prestigioso profesor Augustus de Morgan, que no fue capaz de ver si era cierta o no esa conjetura. Pronto esta simple cuestión se convirtió en un problema matemático de primera fila, mereciendo la atención de la London Mathematical Society, una de las sociedades matemáticas más reconocidas del mundo. Algunas supuestas demostraciones, la más convincente de las cuales fue debida a A. B. Kempe, se mostraron equivocadas. En 1976, al siglo y cuarto de haber sido propuesto, dos matemáticos de la Universidad de Illinois (Estados Unidos), Kenneth Appel y Wolfgang Haken, dieron una prueba del teorema. Pero en la verificación resultó crucial la utilización de una computadora que, mediante un complicado programa, les permitió analizar 1.900 tipos distintos de mapas. Naturalmente que surgieron objeciones y que muchos matemáticos cuestionaron la prueba. Su aceptación por la comunidad matemática internacional hubiera significado un cambio drástico en la concepción clásicamente aceptada de lo que se entiende por demostración matemática. Afortunadamente, en 1996, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour y Robert Thomas, del Georgia Institute of Technology de EEUU, publicaban una nueva prueba aparentemente correcta y que nadie ha refutado hasta ahora [25].

Cuando la situación parecía calmada, la conjetura de Kepler sobre el empaquetamiento de esferas aviva otra vez la polémica sobre las demostraciones apoyadas en computadoras. ¿Se pueden considerar éstas como auténticas demostraciones matemáticas? [20].

Todo surgió a mediados del siglo XVI, cuando Sir Walter Raleigh le pidió al matemático inglés Thomas Harriot una manera rápida de calcular el número de balas de cañón que se podían apilar en la cubierta de un barco. Harriot le escribió a Kepler, el famoso astrónomo alemán ya citado anteriormente, para quien el procedimiento que permite apilar esferas de modo que el espacio que queda entre ellas sea mínimo no es otro que el que habitualmente utilizan los fruteros para amontonar las naranjas [25].

Supongamos que deseamos llenar una caja con esferas idénticas de modo que la parte vacía sea la menor posible. Se llama densidad de empaquetamiento a la razón entre el volumen que ocupan las esferas y el volumen total de la caja. Por consiguiente, esta densidad debe ser inferior a uno. Interesa lógicamente conocer cuál será el empaquetamiento de densidad máxima. Kepler conjeturó en 1611 que esta densidad es $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0'74$, que es la que corresponde precisamente al amontonamiento utilizado en las fruterías. El genial Gauss probó esta conjetura en casos particulares y Thomas C. Hales parece haberlo demostrado definitivamente en el caso general en el año 1998. Y decimos parece, porque la demostración de Hales se basa en el estudio detallado de unos 5.000 grafos en el plano, lo que le llevó a abordar unos 100.000 problemas de optimización lineal, que involucran cada uno a unas 200 variables, con aproximadamente unas 2.000 restricciones. La prueba es larga, casi abarca 300 páginas, pero naturalmente hubo que recurrir forzosamente a la ayuda de potentes ordenadores. Apenas trascendió la noticia de la solución, un grupo de agricultores norteamericanos envió este mensaje a Hales: “Con las naranjas funciona perfectamente; por favor, díganos cómo lo podemos hacer con las alcachofas”.

Desde luego, para Hardy y para muchos matemáticos, ésta no es una demostración. Sigue, pues, latente un debate casi metafísico: ¿Hasta dónde se pueden incorporar las modernas tecnologías en una demostración matemática? Quizás un día no muy lejano la metamatemática dé una respuesta.

LA ECONOMÍA

Las matemáticas financieras han adquirido un gran auge en los últimos decenios. Fijar el precio de una opción financiera es un problema harto complicado, si se pretenden modelizaciones muy cercanas a la realidad. Entonces es preciso recurrir a teorías matemáticas muy avanzadas, descubiertas a mediados del siglo pasado, como son la teoría de los procesos estocásticos —en los que las cantidades evolucionan aleatoriamente con el paso del tiempo— y la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas —donde aparecen variables aleatorias. En estos modelos se supone una tasa de rendimiento determinista, esto es, no aleatorio, pero se introduce un término aleatorio de medida nula y de amplitud acorde con el activo considerado ([24],[36]). Se prueba que la valoración de estas opciones verifica una ecuación en derivadas parciales. En el caso más simple resulta el famoso modelo de Black-Scholes, que pasa de una ecuación diferencial estocástica —que representa la incertidumbre del azar— a otra ecuación diferencial determinista, que viene a ser la archiconocida ecuación en derivadas parciales de difusión del calor, de gran importancia en física (conviene recordar que F. Black estaba especializado en física cuántica). Se conocen técnicas para resolver esta clase de ecuaciones. Precisamente su solución nos suministra el valor de la opción en función de sus propias características: vencimiento, precio de ejercicio, volatilidad... Este modelo fue investigado independientemente por los estadounidenses, de una parte, Fischer Black y Myron Scholes y, de otra, Robert Merton. Los dos supervivientes, Scholes y Merton, fueron galardonados con el Premio Nobel de Economía en el año 1997.

5. LAS MATEMÁTICAS COMO LENGUAJE

Pero las matemáticas también son un lenguaje. Un lenguaje que utilizamos en la vida cotidiana, porque tenemos necesidad de medir, contar, relacionar y comparar. Para la gente de la calle las matemáticas son sinónimo de exactitud, de rigor y de precisión, como se puede constatar en muchas sentencias populares de uso habitual. Recordemos la anécdota de tres amigos, un ingeniero, un físico y un matemático, que van en un tren por Escocia. Al mirar por la ventana, ven lateralmente una oveja negra. ¡Ajá!, dice el ingeniero, veo que las ovejas escocesas son negras. Medita el físico, querrás decir que algunas ovejas escocesas son negras. No, dice el matemático, todo lo que sabemos es que existe al menos una oveja en Escocia, y que por lo menos uno de sus lados es negro.

Es un lenguaje para las otras ciencias, para todas, incluyendo las ciencias sociales. Y, por supuesto, es también un lenguaje para los matemáticos. Ya lo decía John Kemeny (1926-1992), el matemático húngaro nacionalizado estadounidense que inventó el lenguaje de programación BASIC, que popularizó la informática: “Es hora de que aprendamos, como parte de nuestra educación básica, que las matemáticas son simplemente un lenguaje, que se caracteriza por su capacidad para clarificar y para argumentar lógicamente...” [13]. Pero no es un lenguaje al que se accede, como en el caso del idioma materno, de una forma natural, sino que hay que aprenderlo y saberlo emplear.

Y es aquí donde reside el problema: el mal uso y el abuso de este lenguaje. Nosotros mismos, los propios matemáticos, hemos caído muchas veces en este mal. Recuérdese, si no, el excesivo formalismo que impuso, sobre los años 70 del siglo pasado, la mal llamada “matemática moderna” —producto de una peor interpretación del movimiento bourbakista— y sus consecuencias negativas en la enseñanza de las matemáticas a todos los niveles.

Cuando un científico, por ejemplo, un físico, al plantear un problema a un matemático, le expone una serie de condicionantes o de suposiciones, el matemático —quizás por deformación profesional— tiende a tomarlas literalmente como axiomas y a partir de ellos procede sin preocuparse de lo que ocurriría si se relajasen esas hipótesis, porque en su fuero interno presupone que los axiomas no se tocan, cuando para el físico no son más que puntos de partida de su análisis. Por eso dice Jacob T. Schwartz, en un cáustico artículo titulado *La influencia perniciosa de las matemáticas en las ciencias* [21], que el físico teme con razón una argumentación precisa, ya que una argumentación que únicamente es convincente si es precisa pierde toda su fuerza si las hipótesis en que se basa son modificadas ligeramente. En cambio, una argumentación que sea convincente aunque imprecisa puede muy bien permanecer estable bajo pequeños cambios de tales hipótesis.

Recordemos la historia de la función delta de Dirac o δ-función. Este ente matemático fue manejado con gran habilidad por Oliver Heaviside (1850-1925) a finales del siglo XIX y ha sido usado sistemáticamente por los físicos desde 1920, pero para los matemáticos era una monstruosidad. Hasta mediados del siglo XX, con la teoría de distribuciones o de las funciones generalizadas de Laurent Schwartz (1917-2001) y de la escuela rusa (I. M. Gelfand, G. E. Shilov, S. L. Sobolev) no se logró un entendimiento correcto de este ente: la delta de Dirac no es una función, sino una distribución. Pero los físicos la usaban y siguen usando éxitosamente y Heaviside nunca cometió un error cuando la manipulaba en su cálculo operacional. Sin embargo, Heaviside fue atacado y muchos de sus trabajos no fueron aceptados para su publicación por los editores de revistas alegando falta de rigor matemático, a lo que este científico respondía: “bueno, eso es un problema de ustedes, los matemáticos, ¿o es que tengo que dejar de cenar porque no entiendo el proceso fisiológico de la digestión?”.

Pero, qué duda cabe, como señala Jacob T. Schwartz, “la atracción intelectual de un argumento matemático, así como el considerable esfuerzo mental que hay que realizar para seguirlo, convierte a las matemáticas en una poderosa herramienta de prestidigitación intelectual, un engaño brillante en el que algunos caen atrapados y del que otros se aprovechan”. Y esa es la cuestión. La utilización del lenguaje matemático para revestir un planteamiento mediocre y hacerlo más persuasivo, más convincente. O transformar innecesariamente una exposición en algo oscuro y de difícil comprensión.

Uno de los libros que más nos ha impactado últimamente ha sido *Imposturas Intelectuales*, de Alan Sokal y Jean Bricmont, ambos profesores universitarios de física [33]. Todo comenzó cuando el primero de los autores publicó en solitario un artículo bajo el sugestivo pero sospechoso título de *Transgredir las fronteras: hacia una hermenéutica transformadora de la gravedad cuántica.* En él concluye que la realidad física, al igual que la realidad social, es en el fondo una construcción lingüística y social. A lo largo del trabajo comenta, por ejemplo, que la π de Euclides y la constante de gravitación G de Newton pasan de ser constantes universales a ser percibidas en su ineluctable historicidad... A pesar de estas tonterías el trabajo aparece publicado en *Social Text*, una revista prestigiosa en su campo. El escándalo se destapó cuando pasado un tiempo el autor confesó que había elaborado el artículo refundiendo a conciencia citas de famosos intelectuales franceses y estadounidenses.

Estos dos autores constatan una evolución intelectual de algunos sectores académicos norteamericanos hacia una corriente intelectual caracterizada por el rechazo de la tradición racional de la Ilustración, por la elaboración de teorías sin ninguna base empírica y por un relativismo cognitivo y cultural que considera que la ciencia no es más que una narración, un mito o una construcción social. El objetivo del libro, lejos de una crítica generalizada de las humanidades o de las ciencias sociales, es desentrañar la traslación sin ninguna justificación de ideas procedentes de la filosofía de las ciencias a las ciencias sociales, así como desmitificar el uso de un lenguaje deliberadamente oscuro, la confusión de ideas y la mala utilización de conceptos científicos, particularmente matemáticos. Nuestra meta es mucho más modesta y se restringe a este último punto: el abuso y el empleo innecesario o injustificado de los conceptos y del lenguaje matemáticos.

¿Cuándo se sabe si las matemáticas han sido o no mal utilizadas? Parece evidente que, primeramente, el autor debe poseer un conocimiento suficiente de matemáticas para poder explicar —en términos comprensibles para los lectores— todas las nociones técnicas que introduzca en su investigación; y, segundo, se debe tener muy presente que los conceptos matemáticos tienen significados muy precisos, por lo que las matemáticas funcionarán bien en aquellos campos donde los conceptos sean también más o menos precisos. Dicho de otro modo, las matemáticas encajan muy mal en ambientes donde reine la imprecisión y la indefinición.

Veamos algunos casos, siempre desde el máximo respeto a los autores que se citen y a sus obras, en cuya valoración no entramos, simplemente porque no somos competentes. Nos limitamos a la incorporación de los conceptos y al uso del lenguaje matemáticos. Así, Jacques Lacan (1901-1981), uno de los psicoanalistas más famosos e influyentes del siglo XX, alardea de ser el primero en introducir la topología en sus estudios e investigaciones psicoanalíticas. Advertimos de que la topología es una de las ramas más abstractas de las matemáticas. Tras unos escarceos iniciales con esta materia, en su conferencia *The languages of criticism and the sciences of man (1966)* describe una serie de objetos matemáticos: la superficie de Möbius (cójase una tira larga de papel y péguense los lados más cortos girando previamente uno de ellos 180º: resulta así una superficie de una sola cara, que se conoce con ese nombre), el toro (una idea de esta superficie la da un neumático o un donuts), la botella de Klein... y afirma que “un corte en un toro corresponde a un sujeto neurótico y en una superficie entrecruzada a otro tipo de enfermedad mental” [33]. Y además manifiesta claramente que no se trata de una analogía, sino que es la mismísima realidad. Una afirmación de esta naturaleza necesita una demostración, explicación o justificación, pero no hace nada de esto. Todavía nos estamos preguntando qué tienen que ver estos inofensivos objetos topológicos con algo tan serio como las enfermedades mentales.

Más adelante, y sin que medie ninguna demostración, asegura: “En este espacio de goce, tomar algo acotado o cerrado constituye un lugar, y hablar de ello constituye una topología”. Ahora bien, como insistíamos antes, conjunto abierto, cerrado, acotado o compacto (que también los considera en otros textos suyos) son conceptos matemáticos que tienen una definición muy precisa, al igual que la noción de espacio topológico...

¿Para qué esa referencia al teorema de Stokes —que relaciona la integral curvilínea con la integral de superficie— en su trabajo *Position de l’inconscient* [23, pp. 829-850]? Hemos analizado el texto y creemos que si se suprime esta cita, no afecta para nada al resto del mismo y, desde luego, no contribuye a aclarar nada de lo que allí se afirma.

Quizás Lacan se propuso matematizar el psicoanálisis, pero la mayoría de sus afirmaciones con contenido matemático no son probadas. Y no sólo es que no las verifique en el sentido de lo que se entiende por una demostración matemática, sino que no da la menor justificación conceptual o empírica de tales afirmaciones.

Por otra parte, Julia Kristeva, búlgara de nacimiento y formación francesa, se propuso elaborar una teoría formal del lenguaje poético, basada en la teoría matemática de conjuntos [33]. Para ello utiliza con gran soltura los conceptos más abstractos y abstrusos de esta teoría: potencia del continuo, axioma de elección (si se tiene una colección de conjuntos y cada uno de ellos es no vacío, entonces existe un conjunto que contiene exactamente un elemento elegido de cada uno de los conjuntos de la colección. Este axioma está motivado por el estudio de los conjuntos infinitos o de colecciones infinitas de conjuntos, y permite asegurar la existencia de determinados conjuntos sin construirlos explícitamente —no se dice cómo se hace la elección) y el teorema de Gödel. Desde luego que Kristeva tiene una buena formación matemática, pero nunca justifica o explica cómo extrapola estas nociones tan complicadas, que rara vez se aplican en física y que nunca hemos visto en química o biología, a su campo de investigación en lingüística.

Todas las disciplinas de las ciencias sociales emplean hoy, en mayor o menor medida, las matemáticas. La idea de ciencia social como constatación de que el estudio científico del hombre es posible y abarcando áreas como economía, geografía, historia, ciencias políticas, psicología, sociología, antropología, educación... no tiene más de dos siglos de antigüedad.

Si nos fijamos, por unos instantes, en la utilización de las matemáticas en las ciencias económicas, vemos que Adam Smith (1723-1790) confesaba no tener fe en la "aritmética política", terminología con la que se refiere al uso de las matemáticas al tratar problemas económicos. En cambio, para Sir William Petty (1623-1687), que escribió precisamente un libro con ese título —*Political Arithmetic*— significa el acto de razonar sobre datos y gráficas. Se familiarizó en esta tarea cuando Oliver Cromwell invadió Irlanda en 1650 y le solicitó que investigara y evaluara la riqueza de la isla conquistada, a fin de repartir el botín entre los vencedores. También escribió *A treatise on taxes and contributions.* Se le puede considerar como un precursor de la estadística y de la economía [32].

Las más notable y temprana aplicación de las matemáticas a la economía se debe a un gran matemático, Daniel Bernoulli (1700-1782), en su trabajo *Specimen Novae de Mensua Sortis.*

Pero hasta bien avanzado el siglo XVIII, periodo que algunos historiadores consideran la etapa pre-moderna de las ciencias económicas, y a principios del siglo XIX se evidencia que mientras las matemáticas experimentan un desarrollo impresionante, su utilización en la economía es sólo esporádica y se reduce en general a cuestiones muy elementales. La pregunta de por qué los pensadores de las ciencias sociales no se ayudaron de todo el aparato matemático del que ya se disponía potencialmente para resolver sus problemas, tiene diferentes respuestas. Peter Senn [32] apunta que podría ser que no tuvieran conocimiento de los avances de las matemáticas ya consolidados en esa época; o bien que si los conocían, no percibieran su idoneidad para emplearlas en los problemas que abordaban; o bien que cuando trataron de utilizarlas, quedaron más decepcionados que satisfechos. Incluso aduce razones de índole filosófica o ideológica. Pero se decanta, puesto que le parece más plausible, porque los autores que sí conocían matemáticas no hacían un uso excesivo de ellas pues temían que no serían entendidas por los destinatarios de sus trabajos.

Poco a poco, no sólo los economistas sino los que practican otras ciencias sociales toman conciencia de que las matemáticas contribuyen a universalizar sus disciplinas y a impregnar de racionalidad el análisis de los problemas sociales, sobre todo cuando son muy complejos. Como subraya Peter Senn, son su verdadera "lingua franca" y hay que recurrir a ellas para describir, clarificar e ilustrar los argumentos.

De 1850 hasta aproximadamente mediados de la centuria pasada, la economía matemática experimenta un crecimiento espectacular. En 1838 el gran economista Antoine Augustin Cournot (1801-1877) publicó la obra *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, de la cual se vendieron pocos ejemplares, pues la forma matemática y el contenido económico ahuyentaron a los posibles lectores. Sin embargo, hoy se le considera como uno de los grandes trabajos en la historia de la economía. Léon Walras publicó en 1874 sus *Éléments d'Économie Politique Pure* y Vilfredo Pareto, su sucesor en la cátedra de la Universidad de Lausana (Suiza), entre otros, escribió el artículo *Économie Mathématique* (1911). Curiosamente aparecen también *Elementos* y *Principia Mathematica* en economía [9].

Recordemos, por su interés, lo que decía Walras en el prólogo de la obra citada anteriormente: "Toda esta teoría es una teoría matemática, es decir, si bien la exposición se puede hacer en el lenguaje ordinario, la demostración debe hacerse matemáticamente". Y añadía más adelante: "En el presente es cierto que la economía política es, al igual que la astronomía y la mecánica, una ciencia a la vez experimental y racional... El siglo XX restituirá las ciencias sociales a los hombres de una cultura general, habituados tanto a la inducción como a la deducción, al razonamiento como a la experiencia. Entonces la economía matemática alcanzará su rango al lado de la astronomía y de la mecánica matemática".

Pero también hay críticas a la utilización de las matemáticas en economía. Del extremismo de los que consideran que algunas o todas las ciencias sociales no deben ser estudiadas matemáticamente y que abogan por la restricción, incluso la eliminación, de su uso en las ciencias sociales, al otro extremo de matematizar todo porque viste muy bien. En medio, como casi siempre, surge la crítica más razonable: se acepta el uso de las matemáticas y lo que se critica es cómo se utiliza. Manifestar cuáles son los errores matemáticos que se cometen, cuáles son las matemáticas adecuadas para atacar un determinado problema, qué tamaño deben tener las muestras, las bases de datos... son críticas constructivas que mejoran cualitativamente el papel a desempeñar por las matemáticas en estas ciencias. Así Gordon Tullock [32] se queja del uso de las matemáticas como decoración, como adorno, lo que según él representa un buen porcentaje de la literatura en economía y que repercute negativamente en el proceso de comunicación.

En la misma dirección incide J. M. Keynes en su magna obra *General Theory*: "El gran defecto de los métodos simbólicos pseudomatemáticos en la formalización de un sistema de análisis económico es que se asume expresamente una independencia estricta entre los factores involucrados y pierde toda su eficacia y autoridad si se anula esta hipótesis... Un porcentaje demasiado grande de la economía matemática reciente es una mera mezcolanza tan imprecisa como las suposiciones en que se apoyan, lo cual hace que el autor pierda la visión de las complejidades e interdependencias del mundo real en un laberinto de símbolos pretenciosos e inútiles" [21].

A pesar de su persistencia, las críticas no han ejercido ningún efecto significativo sobre el crecimiento continuo del uso de las matemáticas en economía y, en general, en todas las ciencias sociales. No se puede impedir que los científicos y los estudiosos manejen todas las herramientas que consideren aptas para investigar y estudiar sus problemas. A fin de cuentas, sus compañeros, la comunidad científica y el tiempo juzgarán los resultados y los aceptarán o los rechazarán.

En este punto resulta instructivo relatar cómo nació la revista *Econometrica*. Cuenta C. F. Roos [9] que en el año 1927 envió para su publicación el mismo artículo a una revista de economía, a otra de estadística y a una tercera de matemáticas. De los tres editores recibió una respuesta positiva, el trabajo sería publicado siempre que eliminara las partes relacionadas con los otros dos campos. El editorial del primer ejemplar de esta prestigiosa revista era claro al respecto: ningún trabajo será rechazado únicamente en base a que sea considerado demasiado matemático, no importando el nivel elevado del aparato matemático utilizado.

Y es que no parece aceptable descalificar un artículo tan sólo porque en él se emplean matemáticas no habituales. Resulta asombroso contemplar cómo muchas teorías y resultados matemáticos altamente abstractos han tenido una inmediata aceptación en economía. Así, la topología algebraica permitió a Von Neumann formular un teorema para establecer la existencia de una vía de crecimiento óptimo en un determinado modelo, generalizando el teorema del punto fijo de Brouwer. Nadie discute hoy que la teoría de la medida ocupa un lugar privilegiado en la economía matemática. O que la topología diferencial y el análisis han suministrado técnicas para el estudio de situaciones de equilibrio en algunos modelos económicos. Incluso el sofisticado análisis no estándar, creado por A. Robinson en 1960 y muy discutido al principio en la propia comunidad matemática, ha tenido aplicaciones importantes en economía. También la teoría de los juegos no cooperativos y los conceptos de equilibrio dominante y equilibrio de Nash del matemático y Premio Nobel de Economía en el año 1994, John Forbes Nash. Y qué decir de los procesos y el análisis estocásticos y su utilización en el modelo de Black-Scholes para el mercado de opciones, al que ya nos hemos referido más arriba.

¿Cuáles son los límites de la utilización de las matemáticas en economía, en psicología, en lingüística y, en general, en las ciencias sociales? El razonamiento matemático necesita un alto grado de abstracción y se basa en una estructura axiomático-deductiva. Quizás ahí está el límite: en la necesidad de que la conexión entre las hipótesis y las conclusiones se obtenga en el sentido matemático, con todo lo que ello conlleva, sin forzar las pruebas y demostraciones para llegar a resultados deseados. En otras palabras, esta conexión tiene que estar guiada por los principios de la lógica y del razonamiento matemáticos. No nos podemos limitar a imponer las hipótesis y a enunciar las posibles consecuencias, se precisa probarlas. Porque, como afirmaba Newton: “Yo no pongo las hipótesis”. Pero una vez puestas las hipótesis... el resultado está condicionado por ellas y la conclusión es inapelable, sin ningún tipo de concesiones.

Hay que tener en cuenta que los problemas que se plantean en las ciencias sociales son muy diferentes y, por tanto, requieren matemáticas en distintos grados, y que para algunos bastará con las matemáticas elementales. Después resta por verificar que las conclusiones matemáticas coincidan o se aproximen lo mejor posible a lo que dicta el mundo real.

Si los resultados de Gödel sobre los fundamentos de las matemáticas proclaman su falibilidad, cuánto más podría ocurrir en los diferentes campos de sus aplicaciones. Sobre todo cuando los matemáticos, y los no matemáticos, pretenden llevar este razonamiento absoluto a todos los rincones, incluso a los sentimientos, emociones, gustos, pensamientos, voluntades... de los seres humanos, territorios donde hasta ahora, que sepamos, no gobierna la lógica matemática. ¡Afortunadamente! Ya lo advertía J. Dieudonné en su obra *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*: “muchos matemáticos que quisieron arreglar el Mundo, lo han pagado a sus expensas” [10]. Y lo aclara mejor M. de Guzmán [16] cuando habla de los peligros de la matematización de nuestras vidas cotidianas: “Si las matemáticas son la base de la cultura, aquél que logre situarse en el corazón de ellas y desde allí contemplar nuestro mundo, está en una situación privilegiada para juzgar adecuadamente sobre su destino. Oigámosle y sigámosle... Sería bueno recordar que muy a menudo el matemático, y el científico en general, fuera de su propia esfera de competencia suele ser tan superficial y sesgado como el que más”.

6. LAS MATEMÁTICAS A PRINCIPIOS DEL NUEVO MILENIO

En general, la investigación científica no sólo se basará en la teoría y la experimentación, sino que habrá que incorporar una tercera característica: la computación.

En particular, en matemáticas, emulando lo que ocurrió en 1900 en París, con ocasión de la celebración del segundo Congreso Internacional, en cuyo marco Hilbert formuló 23 problemas pendientes que condicionaron el desarrollo de nuestra ciencia en el siglo XX, durante el mes de mayo de 2000 —transcurrido un siglo de aquella fecha histórica— se dieron a conocer en la misma ciudad los denominados *Siete Problemas del Milenio*. En efecto, el Clay Mathematical Institute de Cambridge, en Massachussets (EEUU), ha instituido siete premios de un millón de dólares cada uno para quienes resuelvan los siguientes problemas, seleccionados por un equipo de expertos ([5],[15],[36]):

1. LA HIPÓTESIS DE RIEMANN. Asegura que los ceros no triviales de la función zeta de Riemann tienen parte real igual a un medio (se ha probado que ya es cierto para los “primeros” mil quinientos millones de ceros).
2. P versus NP. ¿Es cierto que P es igual a NP? La cuestión es si un algoritmo no determinístico en un tiempo polinomial, es también aceptado por algún algoritmo determinístico en tiempo polinomial. P denota la clase de problemas de decisión que son resolubles por algún algoritmo en un número finito de pasos.
3. LA CONJETURA DE HODGE. En una variedad algebraica proyectiva no singular sobre los complejos, toda clase de Hodge es una combinación lineal racional de clases de ciclos algebraicos.
4. LA CONJETURA DE POINCARÉ. Afirma que toda variedad tridimensional cerrada simplemente conexa es homeomorfa a la esfera tridimensional.
5. LA TEORÍA DE YANG-MILLS. Para todo grupo gauge simple compacto, la teoría cuántica de Yang-Mills en el espacio de dimensión cuatro existe y tiene defecto de masa positivo.
6. LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES. ¿Existen soluciones diferenciables, físicamente razonables, para las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones?
7. LA CONJETURA DE BIRCH Y SWINNERTON-DYER. Aunque ya sabemos que no existen métodos generales para resolver las ecuaciones diofánticas, como aseguraba el décimo problema de Hilbert, sin embargo esta conjetura afirma que en el caso de las soluciones de las ecuaciones diofánticas generales, cuando éstas son los puntos de una variedad abeliana, el conjunto de puntos que son soluciones racionales de las mismas depende de una cierta función zeta como la de Riemann, de modo que si la función se anula en 1 entonces hay una infinidad de soluciones, y si no se anula sólo hay un número finito.

No es un programa como el de Hilbert, que alcanzaba a la totalidad de las matemáticas de aquella época. Estos problemas son muy selectivos y están relacionados con aspectos parciales de las matemáticas de nuestros días. Y es que, en el año 2000, no existe un Hilbert con la capacidad de aglutinar y tener una visión global de nuestra ciencia.

En cualquier caso resulta muy aventurado predecir cómo evolucionarán las matemáticas durante un periodo de tiempo tan amplio. Es imposible, ya constituyó un enorme reto la propuesta de Hilbert y sólo abarcaba un siglo.

En España se ha pasado del desafortunado “que investiguen ellos” a un desarrollo científico inimaginable a mediados del siglo pasado. En particular, en nuestra ciencia se puede hablar de una auténtica explosión de las matemáticas españolas. No hay nombres hispanos asociados a descubrimientos significativos en este campo, como hemos visto en el recorrido histórico que hemos realizado, ni hasta la fecha que se ha citado abundaban los trabajos con apellidos nuestros en revistas especializadas y prestigiosas a nivel internacional en esta ciencia. A partir de los años 60 del siglo pasado el cambio ha sido espectacular, apareciendo trabajos de nuestros investigadores en las revistas más importantes, hasta el punto de pasar a ocupar un honroso noveno lugar en el ranking de la producción matemática mundial, con más del 4% del total publicado, y en nuestro país, la tercera posición, por encima de otras disciplinas científicas que nos aventajaban y copaban tradicionalmente los primeros puestos. En particular, Canarias es la quinta Comunidad por su notable crecimiento en la producción matemática, según el estudio realizado por la RSME en el decenio 1990-1999.

Tenemos razones para ser optimistas con el futuro de las matemáticas, aunque no sea con el entusiasmo y la vehemencia de Sylvester [28], que proclamaba:

“El mundo de ideas que descubre o ilumina, la contemplación de la divina belleza y el divino orden que suscita, la armoniosa conexión de sus partes, la infinita jerarquía y la evidencia absoluta de las verdades en que se ocupa, éstos y otros parecidos son los más sólidos motivos del título que da derecho a las matemáticas al respeto humano, y esos motivos seguirían siendo inatacables e inigualables aunque el plan del universo se desplegara como un mapa a nuestros pies y se permitiera a la mente del hombre captar de una mirada todo el esquema de la creación”.

Muchas gracias por su atención.

Bibliografía

[1] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov *et alt.*, *La Matemática, su contenido, método y significado*, Alianza Editorial, Madrid, 1973.

[2] C. Andradas, *Hitos matemáticos del siglo XX*, en http://www.cienciadigital.net /septiembre2001/opinión.html.

[3] R. Apéry *et alt.*, *Pensar la matemática*, Tusquets Editores, Barcelona, 1988.

[4] C. B. Boyer, *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 1996.

[5] M. Castellet, *De Hilbert a los Problemas del Milenio*, La Gaceta de la RSME, 6 (2003), 367-376.

[6] F. del Castillo, *Algunas reflexiones sobre las matemáticas,* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga, Málaga, 1997.

[7] G. J. Chaitin, *Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas,* Investigación y Ciencia, pp. 28-35, julio, 2003.

[8] S. Drake, *Galileo*, Alianza Editorial, Madrid, 1980.

[9] G. Debreu, *Theoretic models: mathematical form and economic content,* Econometrica, 54 (1986), 1259-1270.

[10] J. Dieudonné, *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Alianza Editorial, Madrid, 1989.

[11] A. J. Durán, *Historia con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Editorial, Madrid, 1996.

[12] Euclides, *Elementos*, Editorial Gredos, Madrid; libros I-IV, 1991; libros V-IX, 1994; libros X-XIII, 1996.

[13] J. L. Fernández, *La ciencia abstracta*, UAM Ediciones, Madrid, 2001.

[14] L. Garding and L. Hörmander, *Why is there no Nobel prize in Mathematics?* The Mathematical Intelligencer, 7 (1985), 73-74.

[15] P. A. Griffiths, *Las matemáticas ante el cambio de milenio*, La Gaceta de la RSME, 3 (2000), 23-41.

[16] M. de Guzmán, *El pensamiento matemático, eje de nuestra cultura*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1993.

[17] G. C. Harcourt, *On mathematics and economics*, en Capitalism, socialism and post-Keynesianism: Selected Essays, 1995.

[18] G. H. Hardy, *Autojustificación de un matemático*, Ariel, Barcelona, 1981. Reeditado bajo el título *Apología de un matemático*, por Nivola, Madrid, 1999.

[19] N. Hayek, *Los orígenes de la matemática moderna*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna, La Laguna, 1979.

[20] N. Hayek, *¿Demostraciones matemáticas degeneradas de algunos célebres problemas clásicos?* Homenaje al Prof. D. Rafael Rodríguez Vidal, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 1985 (pp. 259-279).

[21] M. Kac, G. C. Rota, J. T. Schwartz (Eds.), *The pernicious influence of mathematics on sciences*, en Discrete thoughts. Essays on Mathematics, Science and Philosophy, 1985.

[22] D. Kirschner, *Using Mathematics to understand HIV immune dynamics*, Notices of the A.M.S., 43 (1996), 191-202.

[23] J. Lacan, *Écrits,* Éditions du Seuil, Paris, 1966.

[24] M. Martín-Deschamps y Patrick Le Taller (editores), *L'explosion des mathématiques,* S.M.F. y S.M.A., Paris, 2002.

[25] A. Martinón (editor), *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos,* Nivola, Madrid, 2000.

[26] J. L. Montesinos, *Las matemáticas en la historia y la historia de las matemáticas*, Conferencia en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo, Santa Cruz de Tenerife, 1999.

[27] J. L. Montesinos, *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*, Editorial Síntesis, Col. Educación Matemática en Secundaria, 21, Madrid, 2000.

[28] J. R. Newman, *El mundo de las matemáticas*, Sigma, Ediciones Grijalbo, Barcelona, 1976.

[29] J. R. Ockendon, *The changing face of Mathematics-in-Industry* , Boletín SEMA, 9 (1996), 23-30.

[30] J. A. Paulos, *Un matemático lee el periódico,* Tusquets Editores, Metatemas, Barcelona, 1995.

[31] J. Rey Pastor y J. Babini, *Historia de la matemática*, Gedisa Editorial, Barcelona, 1984.

[32] P. Senn, *Mathematics and the social sciences at the time of the modern beginnings of the social sciences*, Journal of Economics Studies, 27 (2000), 271-291.

[33] A. Sokal y J. Bricmont, *Imposturas intelectuales*, Ediciones Paidós Ibérica, Barcelona, 1999.

[34] The MacTutor History of Mathematics Archive. Página web de la Universidad de Saint Andrews http://www-history.mcs.st-and.ac.uk.

[35] L. M. K. Vandersypen *et alt.*, *Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*, Nature, 414 (2001), 883-887.

[36] J. L. Vázquez, *The importance of Mathematics in the development of Science and Technology*, Boletín de la SEMA, 19 (2001), 69-112. Versión española reelaborada de este artículo.

[37] D. Wells, *El curioso mundo de las matemáticas*, Gedisa Editorial, Barcelona, 2000.