



I.E.S. Sant Josep de Calassanç
Departament de Matemàtiques

INAUGURACIÓN DEL CURSO ACADÉMICO 2005/06

Lección inaugural que versará sobre:

MATEMÁTICA Y LENGUAJE
Y
MATEMÁTICA COMO LENGUAJE

a cargo de

Pedro Miguel González Urbaneja

Catedrático de Matemáticas



MATEMÁTICA Y LENGUAJE Y MATEMÁTICA COMO LENGUAJE

El momento en que comienza la comprensión del número y del idioma se caracteriza por una profunda experiencia íntima, verdadero despertar del yo, que de un niño hace un hombre, un miembro de una cultura. [...]. En ese momento se produce un sentimiento súbito y casi metafísico de temor y respeto a lo que significan profundamente las palabras “medir”, “contar”, “dibujar”, “formar”.

O.Spengler (*La decadencia de Occidente*, cap.I.1).

Ante la pulcritud de la demostración del primer teorema quedé deslumbrado por ese mundo perfecto y límpido. Había descubierto el universo platónico, ajeno a los horrores de la condición humana; e intuí que esos teoremas eran como majestuosas catedrales, bellas estatuas en medio de las derruidas torres de mi adolescencia.

Ernesto Sábato.

*Número Celeste! ¡Geometría Dorada!
¡Verso Pitagórico! ¡Clave de Cristal!
¡Canto de Divina boca en llamarada!
¡Verso del Ardiente Pentáculo Astral!
Valle Inclán.*

*Van paralelos Lenguaje y Geometría
Con un punto supremo de armonía
Juntas están Matemática y Poesía.
Gonzalo Sánchez Vázquez (*Matemática y Poesía*).*

*Algunos dicen que la ciencia matemática es prosaica
Pero nada hay tan bello como la fórmula algebraica.
Pareado anónimo.*

Sr. Director, Sres/as. Jefes de Estudios, compañeras, compañeros, alumnas y alumnos:

Con inspiración en un artículo del académico **Lázaro Carreter** y en una frase del filósofo **Alain** sobre **Geometría y Poesía** y tomando como hilo conductor los vínculos entre **Matemática y Lenguaje** os hablaré de la importancia de la Matemática en la forja del entendimiento y la voluntad y las diversas facultades, aptitudes y actitudes, en la formación integral de la persona como ciudadano educado y en particular de la dimensión cultural de la Matemática más allá del carácter instrumental que se le ha asignado en la Enseñanza Secundaria. Incluiré no sólo la relación entre **Matemática y Lenguaje** sino la Matemática como constructora de Lenguaje. Las citas anteriores son un botón de muestra que nos permiten adentrarnos en el tema con el apoyo de grandes expertos en el manejo del lenguaje.

Las palabras que vais a tener la gentileza de escuchar os las dedico a todos los alumnos y alumnas de Bachillerato, y en particular, y porque viene a cuento del tema, se las dedico también:

a mis sobrinos que entre ellos son *primos entre sí*.

Matemática y Lenguaje.

Al acompañar de forma *paralela* a toda civilización, las Matemáticas constituyen una de las grandes manifestaciones del pensamiento con un desarrollo *milenario* estrechamente relacionado con los grandes hitos de la Cultura. Conocida es la implicación de la Matemática con las Ciencias de la Naturaleza y la Tecnología; pero sus vínculos con la Filosofía, la Educación, el Lenguaje, la Poesía, la Literatura, las Artes, la Belleza, la Religión, la Mística, la Política, la Magia, etc., hacen de ella una manifestación de la racionalidad humana que, navegando a lo largo de la Historia en todos los confines del Pensamiento, vertebra la Cultura, desde las más remotas civilizaciones hasta la inexorable informatización del mundo actual. La permanente interacción del desarrollo matemático con cualquier actividad humana hacen de esta ciencia uno de los grandes logros culturales de la humanidad.

De toda esta *poliédrica dimensión* cultural de la Matemática vamos a hablar de los vínculos de la **Matemática** y el **Lenguaje**, sobre todo de la Matemática como creadora de lenguaje. De todo ello deduciremos la trascendental importancia que tiene la Matemática en la formación integral de la persona y en particular en la forja de dos *potencias* esenciales del ser humano: el entendimiento y la voluntad y sus diversas facultades, aptitudes y actitudes.

Ojeando y hojeando un libro del pensador y profesor de Filosofía francés **Alain** (seudónimo de **Emile Chartier**) titulado "**Charlas sobre Educación y Pedagogía infantil**" (Editorial Losada, 2001) encontré una afirmación muy audaz:

«En la Educación infantil bastaría con enseñar Geometría y Poesía»

Este autor se ha puesto de moda ahora con la edición de unos pensamientos a modo de antídoto contra la infelicidad que acaba de publicar RBA Libros con el título **Mira a lo lejos**. En él aparecen frases lapidarias ricas en sabiduría. Por ejemplo:

«Cuanto más sabemos, más somos capaces de aprender».

Pero volviendo a **Poesía** y **Geometría**, para mí

- **La Poesía** es la más refinada manifestación del pensamiento humano para expresar los sentimientos.
- **La Geometría** como ciencia de la forma y la extensión es la más refinada manifestación del pensamiento humano para expresar lo que percibimos por los sentidos.

He aquí, para empezar una primera vinculación entre **Matemática** y **Lenguaje** como instrumentos de expresión de elementos genuinamente humanos: los sentimientos y las percepciones.

El brillante matemático **K.Weierstrass** escribía:

«Un matemático que no tenga también algo de poeta no será nunca un matemático completo».

La Poesía y **la Matemática** comparten no sólo la medida (en el caso de los versos rimados) sino en todo caso armonía, belleza, juego, artificio y creatividad. Por eso muchos poetas y matemáticos han comparado la experiencia de demostrar un teorema con la de construir un poema.

En algunos matemáticos como los pitagóricos –cuya doctrina moral está plasmada en los *Versos Dorados*–, **Platón**, **O.Kayyan**, **Luca Pacioli**, **Descartes**, **Weierstrass**, **L.Carroll**, **F.Hausdorff**, **Poincaré**, **Hardy** y otros, encontramos una gran dosis de poesía; mientras que en poetas como **Dante**, **Novalis**, **Goethe**, **Pessoa**, **P.Valery**, **R.Alberti**, **G.Ferrater**, **W.Szymborska**, hallamos un complaciente acercamiento a la Matemática.

- **Goethe**: «El matemático no es perfecto sino cuando siente la belleza de la verdad».
- **F. Pessoa**: «El binomio de Newton es tan bello como la Venus de Milo.»
- **P. Valery**: «El eterno deseo de encadenar la morfología física y biológica, ... a la ciencia de las formas ... y las fórmulas que sirven en las Artes es el tema que ha explorado este libro [Ghyca. **El número de oro**, Poseidón, Barcelona, 1978, pág.9], ¡Qué poema el análisis del número de oro, Φ .»

Pero decíamos antes que íbamos a hablar sobre todo de la Matemática como creadora de lenguaje. Parte de lo que voy a decir sobre este tema está inspirado en un artículo de **F.Lázaro Carreter** titulado «**Espíritu de**

geometría» (EL PAÍS, 5/12/99), que comienza con estas palabras:

«¿Podríamos hablar sin la Geometría? Se cuele por todas las costuras del idioma, sin casi darnos cuenta ...»

Mencionemos algunas de esta perlas del lenguaje con las que podremos apreciar que el mundo social y sobre todo el mediático, ha entrado a saco, a veces sin ningún respeto, en el santuario de **Pitágoras, Euclides y Descartes**. Como dice el autor del artículo, se trata de expresiones geométricas que a veces son metáforas perfectamente válidas e idiomáticamente bellas pero que en general son ridículas cornadas a la lengua y tópicos tropos geométricos que sirven de muletillas del lenguaje. Vosotros juzgaréis.

- *Girar en torno al eje. Pentágono. Radio de acción. Infinito/a. Proyección. Inconmensurable. Espiral de violencia. Medio. Recta final. Perspectiva. Cerrar el círculo*
 - La política mundial *gira en torno al eje* del *Pentágono* americano cuyo *radio* de acción ha alcanzado una infinita *proyección* que provoca a veces una *inconmensurable espiral* de violencia. Esperemos que la situación en Oriente *Medio* entre en una *recta final* dentro de una *perspectiva* democrática cuando se *cierre el círculo* de negociaciones.

Señalamos frente a la *espiral*, la *recta*; mientras la *espiral* se vuelve y revuelve sin saber hasta dónde, la *recta* lleva como una sombra el adjetivo *final*. Cuando falta ya poco para que algo acabe (el curso, un partido de fútbol, un proceso...), dicen de ese algo que ha entrado *en su recta final*, aunque, paradójicamente, a veces termina en curva, como ocurre con frecuencia en el remate de un curso escolar o de un partido de fútbol que suele estar lleno de sobresalto, y alumnos o futbolistas lo recorren por *curvas sinusoides* durante los últimos días del curso y en prórrogas, respectivamente.

Así que de *recta final*, nada. En sentido matemático estricto está claro la incorrección semántica, porque una *recta final* sería algo tan imposible como un *círculo cuadrado*. Lo correcto sería hablar de *segmento final* y aún así habría de aclarar que nos referimos a la *longitud del segmento* y no al *número de puntos* que hay en él, *infinitos* como en la *recta*, *paradojas del infinito*, con el que también se juega muy incorrectamente en el lenguaje ordinario, llamando infinito a lo que concebimos como muy grande o muy numeroso. A hablar, pues, de *recta final* se comete un grave error de bulto: se confunde *segmento* con *recta*, es decir: «se confunde el todo con la parte» atentando contra el octavo y último axioma de **Los Elementos de Euclides**. Lo mismo sucede con la expresión «*cerrar el círculo*» frase absurda o redundante en sí misma ya que el *círculo* es ya una *curva cerrada*; si acaso habría que decir *cerrar el arco*.

Error similar se comete al llamar *redondo* a lo que es *circular*, como por ejemplo una copa o un vaso.

Más fortuna tiene la frase «*me ha salido redondo*» que implícitamente alude a la perfección mayestática de la *simetría esférica* como superficie cerrada que encierra un *volumen* determinado con la *mínima superficie*, por eso cumple una función esencial en la naturaleza, que sabe muy bien *optimizar* los recursos.

Sigamos:

- *Conducta recta. Trayectoria rectilínea. Comportamiento sinuoso. Salirse por la tangente.*
 - El Profesor A tiene una conducta muy *recta* lo que nos obliga a una *trayectoria* escolar muy *rectilínea*, en cambio, el Profesor B muestra un discurso muy *sinuoso* por eso cuando le preguntamos suele *salirse por la tangente*.
- Ver las cosas bajo un *prisma* de ..., o desde un *ángulo* de Tener una visión *poliédrica* de *Desarrollar. Entorno.*
 - Los prejuicios nos hacen ver las cosas bajo un *prisma* subjetivo que nos condena a una sesgada percepción de la realidad desde un único *ángulo*. Debemos *desarrollar* una visión *poliédrica* (con múltiples matices) de nuestro *entorno*.
- *Altas esferas. Sectores afectados. Segmento de jóvenes.*
 - Tras las decisiones políticas que se toman en las *Altas esferas* siempre hay *Sectores* afectados del que no se libra el *Segmento* de jóvenes.
- *Punto de inflexión, giro de 180º.*
 - La enfermedad ha provocado un *punto de inflexión* en mi vida, casi un *giro de 180º*.

Curiosamente algunos políticos manejan de forma muy ridícula, por incorrecta, la última expresión, cuando en campaña electoral hablan de dar un giro de 360° a tal o cual situación.

- *Círculos* de empresarios. *Polígonos* de desarrollo. *Curvas* de crecimiento.
 - El gobierno ha negociado con los *Círculos* de empresarios nuevos *Polígonos* de desarrollo para hacer *decrecer la curva* del paro.
- Aumento *lineal*. Asunto *central*. Situación *puntual*. *Cero* a la izquierda.
 - La empresa ha concedido un Aumento *lineal* a los trabajadores. Siendo el salario un Asunto *central*, esperamos que sea una Situación *puntual*, ya que el Sindicato ha sido un *Cero* a la izquierda.

Así pues, hemos visto que en el lenguaje ordinario y coloquial se alude a las *Altas esferas*, a los *Sectores* afectados, al *Segmento* de jóvenes, al *Radio* de acción, a la *Proyección*, a lo *infinito* o *Incommensurable*, a la *Espiral* de violencia, a la *Recta* final, a la *Perspectiva* de visión, al *prisma* o el *ángulo* bajo el que se divisa un *entorno* que suele ser *poliédrico*. Y además de *Círculos* de empresarios (o de labradores o de artistas) hay *Polígonos* de desarrollo, *Curvas* de crecimiento, conductas *rectas* o *sinuosas* que determinan *trayectorias rectilíneas* o se salen por la *tangente*. También hay *incrementos lineales*, asuntos *centrales* y situaciones *puntuales* que afectan, aunque uno sea un *cero a la izquierda*, y de vez en cuando nuestra vida hace un *Punto de inflexión* o un *giro de 180°*.

Pero la cosa no queda aquí porque en la vida hay situaciones *semejantes* que se describen como *paralelas*. Incluso también hay vidas *paralelas* en la Literatura clásica, como la famosa obra de **Plutarco**. En cambio otras veces, sobre todo entre algunos partidos del *arco* parlamentario, se habla de *posiciones convergentes*, como indicando que tienden cada vez más a ser *iguales* –tan iguales, tan iguales, que parece imponerse en la Política el Pensamiento *único*–, mientras que si son *divergentes* cada vez *distan* más.

También se indica que algo está *proporcionado* o *dimensionado* como bien *medido* o ajustado para su función. Al situar la sensatez en el *centro*, a partir de **Aristóteles**, se identifica la *mitad* o el *medio* con lo virtuoso. Y cuando se plantea resolver algo imposible se habla de que «es tan difícil como la *cuadratura del círculo*» –uno de los problemas históricos más importantes de la Matemática–, interpretando de forma incorrecta esta quimera matemática, porque la *cuadratura del círculo* no es difícil, sino que simplemente es imposible. A veces, la torcida utilización del lenguaje matemático alcanza el paroxismo, como cuando, según una moda reciente, algunos tertulianos hablan de la *primera derivada* o la *segunda derivada* de esta posición, esa cuestión o aquella situación. Aquí sencillamente el asunto no tiene nada que ver con la *tangente* de una *curva* en un *punto*.

Como broche de oro, a veces se dice, de forma vehemente y enfática, que algo es *matemático al querer* indicar que es absolutamente cierto, indudable, ineludible, inexorable, infalible, incontrovertible, etc. aunque nadie lo haya *demostrado*. En parte, el autoritarismo se basa en arbitrarias *premisas*, que se toman como *postulados*, cuya reiteración mediática redundante convierte en *axiomas* para un amplio público poco crítico.

Parece, pues, que no podríamos hablar sin *Geometría*, pero deberíamos utilizarla para hablar con más precisión y mejorar la comunicación, aunque a veces, como se ha visto, se hace lo contrario. Aún así, comparando estas cornadas a la lengua con las del simple lenguaje de los móviles y los chats de Internet, no hay color.

Por fortuna, algunas frases de origen matemático especialmente ridículas han desaparecido, por ejemplo, en mi niñez algunos cursis decían que fumaban *cilindrines*.

También han desaparecido, en el lenguaje del sexo o del amor algunas frases geométricas de tinte ofensivo. En la literatura erótica de principios del siglo XX se llamaban *horizontales* a las mujeres de *cama fácil* (disculpad la grosera expresión, que no es mía). Sin embargo en la Literatura y en el cine, tanto de calidad como en los bodrios televisivos abundan los *triángulos* amorosos, tal vez porque como decía **Dumas**: «*la cadena del matrimonio pesa tanto que es preciso sean dos para llevarla, y, a veces, tres*». Curiosamente, en el lenguaje ordinario, se habla de *triángulo* como colección de tres elementos, con independencia de su situación o posición relativa. No así en Geometría que se exige que no estén alineados. ¡Cuidado no confundir con alienados! Aunque los puntos alineados bien alienados están por ser ajenos al disfrute de total libertad de movimiento; tienen sólo un grado de libertad.

Pero en el lenguaje del amor parece que no rigen las leyes universales del *Álgebra* y de la *Aritmética*, ya que en el amor $1+1$ es *infinito* mientras que $2-1$ es *cero*, la nada más absoluta, el que ha amado y ha sufrido la pérdida de su amor lo sabe (**Lope de Vega**). Y si hay hijos $1+1=3, 4, 5$. Y es que el amor es inefable y no sólo está más allá del *Álgebra* y de la *Aritmética*, sino que, parafraseando a **Nietzsche** está incluso más allá del bien y del mal.

Procedente del lenguaje matemático también tenemos tanto en la Literatura como en el lenguaje ordinario las expresiones *circulares* (circunloquio [rodeo redundante de palabras], las expresiones *elípticas* (elipsis: hecho sintáctico o estilístico que suprime o elude lo que se sobreentiende), las expresiones *hiperbólicas* (que son exageraciones) y las expresiones *parabólicas* (que ilustran una historia con comparaciones, alegorías y metáforas), aunque justo es reconocer, aludiendo a la Historia de las Matemáticas, en particular a la Historia de las *Secciones Cónicas*, que en este caso, primero fue la semántica de los vocablos en el lenguaje ordinario y después la acuñación –por **Apolonio** «*El Gran Geómetra*», posiblemente a sugerencia de **Arquímedes** «*El Sobrehumano*» – de los términos en el ámbito geométrico. Efectivamente, el nombre dado a las Cónicas por el eximio matemático griego, procede de que el lenguaje pitagórico del *Método de Aplicación de las Áreas* para la solución geométrica de ecuaciones cuadráticas, emulaba el significado lingüístico de *Elíptico* como *deficiencia*, de *hiperbólico* como *excesivo* y de *parabólico* como *equiparable*.

En el espectáculo por excelencia, el fútbol, tal vez para darle prestigio a algo tan trivial como la disputa de un objeto *esférico* por parte de dos grupos de personas, para introducirlo en una red de forma casi prismática, en los medios se dice que el jugador ha perdido la *verticalidad* al disparar el balón que ha pasado precisamente a llamarse de forma ridícula y ñoña como el *Esférico*, aunque en modo alguno sea una *esfera*. Para poner una nota de erudición sobre una afición tan sana cuando se practica y a veces tan demente y alienante cuando sólo se contempla, digamos que según el *Fedón* (110b) de **Platón** los griegos jugaban con balones de doce pieles en forma de dodecaedro que al hincharse se aproximaban a la forma *esférica*, lo que constituía un antecedente de nuestro balón de fútbol. Al principio de los tiempos modernos los balones de fútbol tenían forma de *icosaedro truncado* –poliedro arquimediano formado por 12 pentágonos y 20 hexágonos–, pero en la actualidad el balón oficial es un *poliedro arquimediano* (es decir, un poliedro inscriptible en una *esfera*, cuyas caras son *polígonos regulares* de varios tipos, aunque con la misma *arista*, siendo *iguales* todos los *vértices* del *poliedro*). Se trata del *poliedro* llamado *Rombicosidodecaedro menor* formado por 20 *triángulos*, 30 *cuadrados* y 12 *pentágonos*. En este *poliedro semirregular* el tamaño de las caras está bastante igualado y es la forma *poliédrica* más redondeada, ya que es el que más se aproxima a la *esfera circunscrita* –ocupa más del 94% de esta esfera–.

Pocos sabios han tenido la gloria de ver adjetivado su nombre en el lenguaje coloquial. Los tres filósofos–matemáticos más importantes, **Pitágoras**, **Platón** y **Descartes**, elevan las ciencias matemáticas, cada uno en su época, a un sublime e imperecedero estadio de instrumento de cultura, es más, hacen de la Matemática el principal y más valioso elemento vertebrador de la cultura. *Pitagórico* se atribuye a algo o a alguien donde se advierte una marcada orientación filosófica o una singular capacidad matemática; *Platónico* ha pasado a ser equivalente a la pureza de lo ideal, espiritual o inmaterial, que se acentúan sobre todo cuando el adjetivo califica al amor; y *Cartesiano* ha pasado a ser sinónimo de racional y metódico, en el sentido de analítico y riguroso. Así se habla tanto de una sentencia pitagórica o un intelecto pitagórico, como de un sentimiento platónico, o una mente cartesiana.

La Matemática racional y la Filosofía, como contemplación objetiva (más allá de la poesía) del admirable espectáculo (*Theoria*) del universo entero, tienen un origen común en los albores del siglo VI a.C. con el pronunciamiento pitagórico «*el número es la esencia de todas las cosas*» que conduce en el curso de los siglos al galileano «*la naturaleza está escrita en lenguaje matemático*» y culmina en la actualidad con la *digitalización informática* que reconvierte toda producción del intelecto humano en una sucesión de *ceros* y *unos*. Para **Platón** la Matemática es la imprescindible propedéutica para el ascenso a la Filosofía y para **Descartes** la Matemática es la base racional de todas las ciencias y la fuente de toda certidumbre. En toda época la Matemática es la clave de la explicación de los fenómenos naturales y se arroga una función de dar cuenta –aspira a «*dar razón*» en sentido filosófico– del orden natural, en un proceso que se inicia con **Pitágoras**, se afianza con **Platón**, se consolida con **Descartes** y desemboca en la Física de **Galileo**, **Newton** y **Einstein** (bien está recordarlo en el año de su centenario).

Matemática, Lenguaje y Humor.

Vamos ahora a introducir un *punto* de humor con paradojas lógico-semánticas y expresiones inducidas por términos *matemáticos* aplicados en el lenguaje coloquial. No me atrevería a llamarlos chistes, pero me acercaré a ellos por su carácter sintético, enfático y lapidario, por la ambigüedad de los términos (en este caso matemáticos) y el doble o triple sentido de ellos. También veremos famosos disparates de exámenes de Matemáticas y juegos de palabras a modo de acertijos, enseñanzas, sentencias o citas que juegan con números y elementos matemáticos.

- Como cualquier escolar sabe $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Pues bien, he aquí la «*demostración*» más rigurosa de que «*para tener medios hacen falta cuartos*».

- Decía **B.Franklin**: «*Si el hombre pudiera alcanzar la mitad de sus deseos, duplicaría sus problemas*».
- Entre la clase política que nos gobierna está muy extendida la creencia de que: «*9 de cada 10 políticos están de acuerdo en que 1 de cada 10 políticos es un corrupto*».
- Paradojas en la naturaleza: «*Las bacterias se multiplican dividiéndose*».
- Conversación en clase de Matemáticas: «*Me gustan los polinomios, pero solo hasta cierto grado*».
- Conversación entre matemáticos: «*Hay tres clases de matemáticos, los que ese equivocan al contar y los que no*».
- Un cubo a una esfera: «*Nunca tendrás una esquina donde caerte muerta*».
- ¿Cuál es animal con más de 2 patas y menos de 3?: «*El pollo porque tiene dos y pico*».
- Animal con más de 3 ojos y menos de 4: «*El π -ojo (piojo)*».
- Las cuatro reglas en el matrimonio: «*Suma de obligaciones, resta de libertades, multiplicación de responsabilidades y división de bienes*».
- Las progresiones y la evolución: «*Si todos tenemos 2 padres, 4 abuelos, 8 bisabuelos, 16 tatarabuelos, 32 tata tatarabuelos ... ¿cómo es posible que vengamos sólo de Adán y Eva?*»
- Perlas estadísticas:
 - Todos los políticos prometen antes de salir elegidos subir los sueldos, de forma que nadie cobre por debajo de la media nacional.
 - No tener hijos es hereditario; si tus padres no tuvieron hijos, lo más probable es que tú tampoco los tengas.
 - La tasa de natalidad es doble de la tasa de mortalidad; por lo tanto, una de cada dos personas es inmortal.
 - El 20 por ciento de las personas muere a causa del tabaco. Por lo tanto, el 80 por ciento de las personas muere por no fumar. Así que queda demostrado que no fumar es peor que fumar.
 - La probabilidad de tener un accidente de tráfico aumenta con el tiempo que te pases en la calle. Por tanto, cuanto más rápido circules, menor es la probabilidad de que tengas un accidente.
 - El 33 % de los accidentes mortales involucran a alguien que ha bebido. Por tanto, el 67 % restante ha sido causado por alguien que no había bebido. A la vista de esto, esta claro que la forma más segura de conducir es ir borracho y a toda pastilla.
- Disparates en exámenes:
 - Polígono: «*Hombre que anda con muchas mujeres*».
 - ¿Qué es un círculo? «*Un polígono de dos lados: el de dentro y el de fuera*».
 - Qué es la hipotenusa: «*Lo que está entre los dos paletos*».
 - Área del triángulo: «*Es igual a la cuarta parte de la mitad de su lado por la semisuma de la raíz cuadrada de tres*».
 - Los cuatro evangelistas son tres: San Pedro y San Pablo.
- Refrán: «*Cifra eres y nada más, según donde estés, así valdrás*».

Matemática, Lenguaje y Literatura.

A lo largo de la Historia muchos matemáticos han realizado notables aplicaciones a la Literatura, algunas de ellas de primera categoría. Muchos de los *Diálogos de Platón* (la *República*, el *Timeo*, el *Menón*,...) y varias obras de **Descartes** (*El Discurso del Método*, *Las Reglas para la Dirección del Espíritu*, *La Geometría*) que sitúan a la Matemática en el centro de atención, son auténticas joyas de la Literatura universal.

Según Platón (*República*, 525d–527b).

«La Aritmética fuerza el alma a servirse de la inteligencia pura para alcanzar la verdad en sí. [...] La Geometría conduce a una contemplación más factible de la idea del Bien. Dirigirá el alma hacia la verdad y dispondrá la mente del filósofo para que eleve su mirada hacia arriba.»

Según Descartes (*Discurso del Método*, DM.AT.VI.19).

«Esas largas cadenas trabadas de razones muy simples y fáciles, que los geómetras acostumbran a emplear para llegar a sus más difíciles demostraciones, me habían dado ocasión para imaginar que todas las cosas que entran en la esfera del conocimiento humano se encadenan de la misma manera.»

Pero también en los tiempos modernos excelentes escritores, que también son filósofos y matemáticos, como el famoso político y literato, **José Echegaray** (Premio Nobel de Literatura, 1904), **Bertran Russell** (Premio Nobel de Literatura, 1950) y **O.Spengler**, ponderan el argumento matemático en sus escritos. Las famosas obras: *Historia de la Filosofía Occidental* de **B.Russell** (recientemente reeditaba en 2005, por RBA) y *La decadencia de Occidente* de **O.Spengler** realizan una rigurosa incardinación de la Matemática en la Historia de la Cultura, con profundas reflexiones sobre la incidencia de las Ciencias Matemáticas en la propia forja de la Cultura y el Pensamiento.

Digno es de mencionar, entre otras muchas, interesantes obras literarias escritas por matemáticos, por ejemplo: *De propria vita* de **Cardano**, *Pensamientos* de **B.Pascal**, *Alicia en el País de las Maravillas* de **L.Carroll**, *Una infancia rusa* de **S.Kovaleskaya**, *Apología de un matemático* de **G.H.Hardy**.

También podemos citar obras no escritas por matemáticos donde la Matemática juega un cierto papel como *Planilandia* de **E.Abbott**, *El Aleph* de **J.L.Borges**, *Kepler* de **A.Koestler**, *Congreso en Estocolmo* de **J.L.Sampedro**,

Un paso más allá, en los últimos tiempos, es el ensayo o la novela donde la Matemática es protagonista o al menos un personaje importante, por ejemplo: *El hombre que calculaba* de **M.Tahan**, *El tío Petros y la conjetura de Goldbach* de **A.Doxiadis**, *El teorema del loro* de **D.Guedj**, *El diablo de los números* de **H.M.Enzensberger**, *El enigma de Fermat* de **S.Singh**, *El sueño de Descartes* de **P.J.Davis**, *Érase una vez un número* de **A.Paulos**, *La medida del món* de **D.Guedj**, *Damunt les espatlles dels gegants* de **Josep Pla**, ...

En el ámbito de la cinematografía la Matemática o el matemático es protagonista, entre otras películas, en *Las dos caras del amor*, *Perros de paja* y la reciente *Una mente maravillosa*.

Matemáticas en *El Quijote*.

En un año en que celebramos el cuarto centenario de la publicación de la primera parte del *Quijote*, debemos aludir a las Matemáticas que hay en la obra de Cervantes. Las hay, en efecto, en cuestiones de cálculo, números, medidas y proporciones, problemas e incluso Astronomía, así como alusiones a la utilidad de las diversas ciencias matemáticas. Veamos algunos textos indicativos:

- 2ª Parte, Cap. XVIII. Referente a la ciencia de la Caballería:
 - El caballero andante entre otras muchas cosas «*ha de saber matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad de ellas*».
- 2ª Parte, Cap. XX. Confrontación del Licenciado de Salamanca y el Bachiller Corchuelo:
 - El Bachiller al Licenciado: «*Apearos y usad de vuestro compás de pies, de vuestros círculos y vuestros ángulos y ciencia, que yo espero haceros ver estrellas con mi destreza*».
 - Texto: «*En lo que faltaba del camino les fue contando el licenciado las excelencias de la*

espada con tantas razones demostrativas y con tantas figuras y demostraciones matemáticas, que todos quedaron enterados de la bondad de la ciencia [...].

- 1ª Parte, Cap. XXXIII. Orientaciones metodológicas para la conversión de infieles:
 - «Les han de traer ejemplos palpables, fáciles, inteligibles, demostrativos, indubitables, con demostraciones matemáticas que no se pueden negar, como cuando dicen: “Si de dos partes iguales quitamos partes iguales, las que quedan son iguales” [Euclides, Axioma 3]; y, cuando esto no entiendan de palabra, como en efecto, no lo entienden, háseles de mostrar con las manos [...]».

Lo de «mostrar con las manos» no sabemos si se refiere a la utilización de técnicas docentes más activas, mas prácticas con recursos manuales experimentales y manipulativos, o si más bien tiene que ver con los tradicionales métodos inductivos y deductivos de las Matemáticas, de modo que habría que añadir el “método de demostración por coacción”.

Os voy a obsequiar ahora con un par de fábulas en forma de poesías matemáticas de las que podemos deducir una sagaz moraleja.

EL CERO, EL UNO Y EL DOS

(Cayetano Hernández)

Graves autores contaron
que en la ciudad de los *ceros*
el uno y el dos entraron
y, desde luego, trataron
de medrar y hacer dineros.

Pronto el uno hizo cosecha,
pues a los *ceros* honraba
con amistad muy estrecha
y dándoles la derecha
su valor así aumentaba.

Pero el *dos* es de otra cuerda,
¡todo es orgullo maldito!
y con táctica tan lerda
los *ceros* pone a la izquierda
y así no medraba un pito.

En suma, el humilde *uno*
Llegó a hacerse millonario
mientras el *dos*, importuno,
por su orgullo cual ninguno,
no pasó de un perdulario.

Luego, ved con maravilla
en esta fábula ascética
que el que es humilde más brilla,
y el que se exalta se humilla
hasta en la misma Aritmética.

TIRO AL BLANCO

(Eugeni D’Ors)

Por presumir de certero
un tirador atrevido
se encontró comprometido
en el lance que os refiero:

Y fue, que ante una caseta
de la feria del lugar
presumió de no fallar
ni un tiro con la escopeta,
y el feriante alzando el gallo
un duro ofreció pagarle
por cada acierto y cobrarle
a tres pesetas el fallo.

Dieciséis veces tiró
el tirador afamado
y al fin dijo, despachado
por los tiros que falló:

Mala escopeta fue el cebo
y la causa de mi afrenta,
pero ajustada la cuenta
NI ME DEBES NI TE DEBO.

Y todo el que atentamente
este relato siguió
podrá decir fácilmente
cuántos tiros acertó.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 16 \\ 5x - 3y = 0 \end{array} \right\} x = 6, y = 10 .$$

Matemática, Lenguaje y Educación.

Una de las características del lenguaje matemático es su univocidad y ausencia total de ambigüedad. Toda sintaxis matemática se aplica a objetos y entidades perfectamente definidos sin ningún tipo de duda sobre su esencia ontológica, porque previamente se ha sometido a una férrea definición que precisa, determina, concreta, especifica, delimita, e individualiza las características del objeto en cuestión.

Además, los argumentos matemáticos se establecen con la demostración, que los convierte en incontrovertibles, en verdades eternas y universales. Con la emergencia de la demostración como exigencia intelectual, aparece la Matemática racional en el horizonte del siglo VI a.C., siendo este fenómeno cultural un hito esencial en el tránsito del mito al logos que tiene lugar en la cultura griega, por eso, la demostración se considera la aportación fundamental del **Pitagorismo** a la Matemática, lo que se ha valorado siempre muy por encima de sus magníficas contribuciones particulares en ámbitos concretos de esta ciencia que todavía hoy nutren el currículum de los libros de Matemáticas elementales. La demostración va mucho más allá de la mera persuasión de la Retórica en la que los griegos eran grandes maestros, pues, es posible con persuasión argüir lo falso contra lo verdadero como hacen habitualmente los políticos, que según la coyuntura de gobierno o de oposición se atreven a defender un argumento y su contrario (de ahí los reproches de **Sócrates** hacia los sofistas). La demostración matemática convence por la ilación argumental irrefutable que alcanza algo legítimo mientras no se pongan en entredicho las leyes de la Lógica. Por eso a partir de **Pitágoras** la Matemática es universalmente considerada como un manantial primario de verdad objetiva.

Definición y Demostración caracterizan y singularizan la actividad matemática frente al resto de todas las demás actividades humanas. En ellas se basa la importancia de la Matemática en la Educación y el prestigio general que tiene la ciencia matemática en todo tipo de público frente a la argumentación retórica falaz que desprestigia a la Política, por ejemplo. Por eso, es frecuente, como ya hemos apuntado antes, escuchar la expresión ¡*Esto es matemático!* como una enfática y apasionada afirmación de que es una verdad absoluta e incontestable. Los matemáticos sabemos que ello no se ajusta completamente a la realidad matemática, porque ésta también es relativa. Sí, la realidad matemática también es relativa a las premisas más o menos arbitrarias admitidas *a priori* sobre las que se construye el magnífico edificio de la Matemática.

Para **Platón** (*República*, VII, 521-527) la Matemática es un instrumento esencial para la educación e instrucción de la juventud. Su maestro de Geometría en la Magna Grecia, **Arquitas de Tarento**, como brillante político y audaz reformador, había establecido la Matemática como componente esencial del currículum escolar, instituyendo las cuatro Ciencias (*Artes Liberales*) del *Quadrivium pitagórico* –Aritmética, Geometría, Música y Astronomía–, sancionado por **Platón** en *La República* y de vigencia secular casi hasta nuestros días. Casi dos siglos antes, y en el origen, **Pitágoras**, acuña, como se sabe, el término Filosofía –*amor a la sabiduría*– y también –lo que no se conoce tanto–, el término *Mathema* vinculado al significado de conocer o aprender, pero no a un ámbito específico del saber, sino al *saber en sí* mismo, es decir, *Mathema* es «*lo que se puede aprender*», lo formativo, «*lo enseñable por antonomasia*». A partir de entonces, en el mundo griego, la Matemática es la encarnación del conocimiento, según **Platón** mediante reminiscencia (el aprendizaje es un recuerdo promovido por la Educación, que fructifica cuando el Profesor alumbró el conocimiento en el alumno mediante una serie de cuestiones y preguntas bien hilvanadas [de forma heurística] *Menón*, 82b-85b). Así pues, la Matemática sería una actividad intelectual no vinculada a un espacio cultural concreto y particular del saber, sino al conocimiento en sí mismo, y anterior, como base, a todo otro conocimiento, de ahí los estrechos vínculos primigenios de la Matemática con la Filosofía, como actividades intelectuales que no sólo tendrían un origen común, sino que en el nacimiento de la Matemática racional en Grecia se realiza la condición de la Filosofía de *dar cuenta o razón* de la realidad. Precisamente, *dar cuenta y dar razón*, son términos matemáticos.

A partir de aquí podemos entender la trascendencia que siempre ha tenido y tiene la Educación matemática como materia obligatoria en todos los niveles de todos los sistemas educativos de todos los países con independencia del régimen político. Y nosotros, Profesores de Matemáticas, es decir, profesionales de la transmisión del conocimiento matemático, como herederos del mundo clásico, enfatizamos con vehemencia las cualidades de las Matemáticas:

- La capacidad para manejar la cantidad y la extensión, la lógica y la intuición, la inducción y la deducción, la observación y la imaginación, la curiosidad y la iniciativa, la invención y el descubrimiento, el análisis y la síntesis, la generalidad y la particularidad, la abstracción y la concreción, la precisión y la exactitud, la interpolación y la extrapolación, la estructura y la implicación, la decisión y la construcción, la armonía y la creatividad, la interpretación y la descripción, la belleza y la utilidad, la regularidad y la disposición, ..., siempre bajo la acción del entendimiento y el imperio de la voluntad.

Estas características de las Matemáticas hacen de ella una herramienta básica y esencial en la Educación del ciudadano como instrumento fundamental de forjado no sólo de las estructuras intelectuales del ser humano, sino también de las diversas facultades, aptitudes y actitudes.

La idiosincrasia de la Matemática alimenta su función informativa que permite:

- Adquirir un conjunto de conocimientos que hace posible familiarizarse con el mundo natural circundante, con herramientas para interpretar el mundo físico, natural y social, en términos cuantitativos y abstractos,

pero sobre todo, por imperativo platónico, las Matemáticas tiene una función formativa para:

- Desarrollar el pensamiento crítico y el rigor científico, inculcar una disciplina mental con la que operar sobre cualquier tipo de pensamiento o de situación y a través de la resolución de problemas desarrollar la iniciativa personal y la fortaleza para vencer obstáculos, estimulando la voluntad.

La Matemática incide así decisivamente sobre el binomio entendimiento-voluntad que es la matriz del espíritu humano, de ahí la implicación esencial que como en los tiempos de **Platón** tiene, hoy y siempre, la Matemática en la Educación.

O.Spengler (en su famosa obra *La decadencia de Occidente*, cap.I.1 [*El sentido de los números*], Austral, Madrid, 1998, pp141, 142) define de forma casi apocalíptica el acceso intelectual del niño a la Matemática y al idioma:

«El momento en que comienza la comprensión del número y del idioma se caracteriza por una profunda experiencia íntima, verdadero despertar del yo, que de un niño hace un hombre, un miembro de una cultura. [...] A partir de ese momento existen propiedades bien determinables, conceptos, un nexo causal, un sistema del mundo circundante, una forma del mundo, leyes del mundo, [...]. La ley es lo sometido a números. En ese momento se produce un sentimiento súbito y casi metafísico de temor y respeto a lo que significan profundamente las palabras “medir”, “contar”, “dibujar”, “formar”.»

Ya hemos dicho que Matemática en griego significa «*lo que se puede aprender*». Entonces, ¿por qué hay la conciencia de que son tan difíciles? Por varias razones, consecuencia de la naturaleza y características singulares de esta ciencia.

- Porque aunque se aplica a aspectos muy concretos requiere un alto nivel de abstracción.
- Porque son una ciencia progresiva y acumulativa, un complejo edificio en el que no se puede ascender a un nivel superior sin haber consolidado todos los inferiores.
- Porque tienen un lenguaje propio, preciso, exacto y simbólico.

Estas cuestiones vinculadas a las Matemáticas exigen que para obtener fruto en su cultivo se precise en grado sumo paciencia (que como término es el acrónimo de paz y ciencia, **Paciencia = Paz + Ciencia**), tranquilidad, reflexión, concentración y curiosidad.

Como veis no he mencionado aspectos vinculados a la inteligencia, no es que no sean necesarios o convenientes para estudiar Matemáticas. Una brillante inteligencia es conveniente para hacer cualquier tarea humana con calidad y también para triunfar en Matemáticas, pero no es imprescindible. Por su propia naturaleza, que acabamos de puntualizar, para estudiar con éxito en Matemáticas, son más importantes los aspectos humanos vinculados a la voluntad, como los mencionados: la paciencia, la perseverancia, la constancia, la persistencia, la tenacidad, la firmeza, el tesón, la entereza, la dedicación, el empeño; todos ellos son ineludibles para alcanzar y mantener la concentración, la reflexión y la curiosidad que requiere el estudio de las Matemáticas

Mas aún para triunfar en algo, más allá del azar y la fortuna, se necesita la motivación que proporciona la posibilidad de recoger los frutos enseguida. Pero debido a la propia naturaleza de las Matemáticas que hemos ido describiendo, el fruto no es inmediato, sino que se consigue a largo plazo, es como en la Agricultura. Para tener éxito en Matemáticas tenemos que trabajar asiduamente con esfuerzo, sembrando el campo de la voluntad donde, según **Descartes** (*Reglas para la dirección del espíritu*, Regla IV) se planta la semilla intelectual que tenemos en nuestra mente.

Frente al «*lo quiero todo, ahora y fácilmente*» que plantean los jóvenes, la consecución de logros en Matemáticas requiere tener conciencia de que:

- Frente al «*lo quiero todo*» sólo tendré *lo que puedo alcanzar* con mi dedicación y esfuerzo.
- Frente al «*lo quiero ahora*» sólo obtendré el fruto, poco a poco, y a medida de mi capacidad de asimilar con mi esfuerzo.
- Frente al «*lo quiero fácilmente* » hay que saber que no existe más camino que el del trabajo y el esfuerzo personal.

Cuenta una famosa leyenda, relatada por el matemático y filósofo neoplatónico **Proclo de Alejandría**, una conversación entre el rey **Ptolomeo** de Egipto y su asalariado como Profesor de Matemáticas del **Museo** alejandrino, **Euclides**:

«El rey Ptolomeo preguntó cierto día a Euclides si no había un camino más corto para la Geometría que Los Elementos; obtuvo la siguiente respuesta: "En la Geometría no hay camino para los reyes".»

Como deducimos de esta anécdota real, esfuerzo, más esfuerzo y sólo esfuerzo exige el aprendizaje de las Matemáticas. No se ha inventado otro camino para adquirir el conocimiento inmediato y la formación adecuada.

La formación es incluso más importante que el conocimiento. Sabéis que la formación permanece y es la herramienta con la que nos enfrentamos al mundo, no sólo para comprenderlo, sino ante todo para transformarlo; mientras que el conocimiento puede ser pasajero, es decir, puede que en nuestra vida adulta no nos acordemos de tal o cual teorema, pero si en su momento lo asimilamos, sabremos, donde encontrar la fuente para recordarlo, y sobre todo, y lo más importante, gracias al estudio de ese teorema y las cuestiones vinculadas a él, tendremos a nuestra disposición y para siempre una serie de habilidades mentales y destrezas intelectuales, que las necesitamos para desarrollar con dignidad y calidad otros muchos aspectos de nuestra existencia. Aquí es donde reside la importancia capital de la Educación matemática, en la preparación y formación integral de la persona, a la que contribuye de forma definitiva.

Permitidme, finalmente, recitaros un soneto de versos alejandrinos que compuse en un momento de devoción mística hacia la figura matemática iniciática de **Pitágoras**:

SONETO A PITÁGORAS

**Tu Teorema me enseñó a amar la Geometría
y desde ésta aprendí a adorar la Matemática
quise hacer la existencia menos enigmática
con Platón pensando entrar en la Filosofía.**

**Pitágoras, ayúdame a alcanzar la armonía
a que la vida sea menos problemática
siendo el estudio y el amor nuestra pragmática
concediéndonos parte de tu sabiduría.**

**Apliquemos en todo tu divina proporción
no sintamos temor hacia lo inconmensurable
al transmitir estos valores en la educación.**

**Tu doctrina nos enseña lo que es demostrable
Tus números y poliedros engendran percepción
Por eso tu magisterio ha sido perdurable.**

Muchas gracias a todos por vuestra atención.

Pedro Miguel González Urbaneja
pgonzale@xtec.cat

I.E.S. Sant Josep de Calassanç
Departamento de Matemáticas

Barcelona, 12 y 14 de setiembre de 2005

Referencias.

- ◆ AMSTER,P: *La Matemática como una de las Bellas Artes*. SigloXXI Argentina. Buenos Aires, 2004.
- ◆ ANDRADAS,C.: *Póngame un Kilo de Matemáticas*. Editorial S.M. Madrid, 2000.
- ◆ BALBUENA,L ; GARCÍA JIMÉNEZ,J.E.: *El Quijote y las Matemáticas* (en el *Día Escolar de las Matemáticas*). Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Badajoz, 2005.
- ◆ BALBUENA,L ; García Jiménez,J.E.: *El Quijote y las Matemáticas*. Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha, 2005.
- ◆ BRACHO,R: *El gancho matemático*. Port-Royal Ediciones. Granada, 2000.
- ◆ CHARTIER, E.: *Charlas sobre Educación y Pedagogía infantil*, Editorial Losada, Buenos Aires, 2001.
- ◆ CHARTIER, E (Alain): *Mira a lo lejos*. RBA Libros. Barcelona, 2003.
- ◆ DAVIS, P.J.: *El sueño de Descartes*. Labor. MEC. Madrid, 1989.
- ◆ DESCARTES,R.: *Discurso del Método / Reglas para la dirección de la mente*. Orbis. Barcelona,1983.
- ◆ DIVERSOS AUTORES: *Historia del Pensamiento*. Ediciones Orbis, Barcelona, 1983. Vol.1. Cap.1 ; Vol.2. Cap.3
- ◆ EGGERS,C.: *El nacimiento de la Matemática en Grecia*. Eudeba, B. Aires, 1995. Caps. 1, 2.
- ◆ GÓMEZ,J.: *L'altra cara de les Matemàtiques*: Biblioteca de l'Ateneu. Ketres Editora. Vilanova i la Geltrú, 2000.
- ◆ GONZÁLEZ URBANEJA, P: *Experiencias en el Aula*. Comunidad Escolar. nº 197, p.14. Ministerio de Educación y Ciencia. Junio 1988.
- ◆ GONZÁLEZ URBANEJA, P: *Taller de Matemática recreativa*. Cuadernos de Pedagogía, nº 166, Enero 1989, pp. 65-66.
- ◆ GONZÁLEZ URBANEJA, P.:2001. *La implicació de la matemàtica en l'educació, segons Plató*. *Bulletí* 09/2001 ABEAM, pp.13-15, 2001.
- ◆ GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *La Matemática de la Revolución Francesa* (en *Seminario Orotava de Historia de la Ciencia*, Actas, año III, pp.93-132). Las Palmas, 1997.
- ◆ GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Prefacio.
- ◆ GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, Tenerife, 2003. Cap.8.
- ◆ GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego* (en *El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton*). pp.24-75.Universidad de Sevilla, 2000. Cap.1.
- ◆ GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Pitágoras, el filósofo del número*. Nivola, Madrid, 2001. Caps.1, 2, 8.
- ◆ GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Platón y a Academia de Atenas*. Nivola. Madrid. En imprenta. Caps. 3, 6, 7, 9.
- ◆ GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Legado y herencia de Pitágoras*. Apuntes de CPR, núm.10. pp. 16-21.CPR Palencia. Consejería de Educación y Cultura. Junta de Castilla y León. Mayo de 2003.
- ◆ GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*. Revista SUMA, núm.45, pp.17-28, 02/04.
- ◆ GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Platón. Matemática en la Filosofía y Filosofía en la Matemática*.
<http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Platon.asp>. 09/04.
- ◆ GONZALEZ URBANEJA, P.M.: *Pitágoras*.
<http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Pitagoras.asp>. 04/05.
- ◆ HARDY,G.: *Apología de un matemático*. Nivola. Madrid, 1999. Ariel. Barcelona. 1981.
- ◆ **LÁZARO CARRETER,F.: *Espíritu de Geometría* (en **EL DARDO EN LA PALABRA**). EL PAÍS, 5/12/99.**
- ◆ LEVI.B.: *Leyendo a Euclides*. Zorzal, Buenos Aires, 2001. Cap.1
- ◆ MANKIEWICZ,R.: *Historia de las Matemáticas*. Barcelona, 2000. Caps. 3 ,4.
- ◆ MONTESINOS,J. (Coordinador): *Historia de la Geometría griega*. Actas del Seminario Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992.
- ◆ MONTESINOS,J.: *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Síntesis. Madrid, 2000. Cap. 1.3.
- ◆ MORENO,L.F.: Crítica de la obra de CHARTIER, E (Alain), *Mira a lo lejos*, (en Babelia, EL PAÍS, 12 de abril de 2003).
- ◆ PLATÓN: *Diálogos: Menón, República, Timeo*, (en *Obras Completas*). Introd. de J.A. Míguez. Aguilar, Madrid, 1969.
- ◆ RODRÍGUEZ,R.: *Cuentos y cuentas de los matemáticos*. Editorial Reverté. Barcelona, 1987.
- ◆ RUSSELL,B.: *Historia de la Filosofía Occidental*. Austral.Madrid,1995. Vol.1. Lib.1. Caps. 3, 25.
- ◆ SANTALÓ,L.: *La matemàtica: una filosofia i una tècnica*. Eumo, Vic- Girona, 1993. Caps.1, 2.
- ◆ SPENGLER,O.: *El sentido de los números* (en *La decadencia de Occidente*. Cap.I.1). Austral, Madrid, 1998. pp.129-193.
- ◆ VALERY P.: *Carta al Autor* (en *El número de oro*, Poseidón, Barcelona, 1978, pág.9).
- ◆ VITRAC,B.: *La odisea de la razón* (en *Viaje al país de las Matemáticas*. El Correo de la Unesco, Año XLII, 11/1989).
- ◆ WARUSFEL, A: *Los números y sus misterios*. Editorial Martínez Roca. Barcelona, 1968.