

El infinito en Matemáticas

Carlos Benítez Rodríguez
Catedrático de Análisis Matemático
Universidad de Extremadura

*A Esperanza, mi mujer,
y a mis hijos Elena, Esperanza, Carlos y Pablo*

Excmo. Sr. Presidente de la Junta de Extremadura, Magfco. y Excmo. Sr Rector de la Universidad, Excmas. e Ilmas. Autoridades, Compañeros de la Universidad, Señoras y Señores,

Lo que acabo de decir, igual que esta sotana preconiliar con la que me adorno, es lo que manda el protocolo, pero lo que verdaderamente quería decir era “queridas buenas gentes que nos acompañáis”. Incluso el ordenador con el que escribí estas letras parecía estar de acuerdo conmigo, porque algunas de aquellas palabras no estaban en el diccionario que esos chismes llevan incorporado, sino que aparecían en rojo de puro rancias.

Acabo de cumplir los primeros cuarenta y dos años de docencia en la Universidad (veintiocho en la de Extremadura) y he tenido la suerte (ustedes alguna menos) de que, ya cerca de la jubilación, me tocara dar esta lección inaugural del curso académico 2007-08 en nuestra Universidad. Soy matemático y lo mío es árido (pero hermoso), por lo que mi mayor miedo es el de no desperdiciar la ocasión para aburrirles soberanamente. Pero seré breve (más vale comprometerse al principio).

Aunque hablaré de Matemáticas porque creo que es mi obligación (y mi devoción), también creo que la ocasión me exige comenzar dedicando unas palabras a algunas otras cuestiones.

En primer lugar, dos palabras a los que yo considero mis maestros y a resumir en otras dos palabras las razones por las que creo eso. Además de mis padres, que fueron los esenciales, el primer nombre que siempre aparece en mi memoria es el de Antonio Magariños, que fue catedrático de Latín, jefe de estudios y unas cuantas cosas más (fundador del Estudiantes club de baloncesto, por ejemplo) del Instituto Ramiro de Maeztu de Madrid, donde estudié la primaria y el bachillerato. Era un hombre severo, sabio y bueno que siempre nos trató de enseñar (a lo prusiano, tal vez), además de las declinaciones, las conjugaciones y cosas raras como el ablativo absoluto, a ser responsables de nuestros actos. El segundo es Eduardo Granda, un cura jesuita buen amigo del anterior y también severo, sabio, bueno y buen prusiano, que supo abundar muy bien en aquello de que la propia responsabilidad (“cada cuál vea”, le gustaba decir) es una cosa muy seria. Contaba este hombre que le preguntaron una vez cómo conseguía que los jóvenes le quisieran si los trataba a patadas, a lo que él respondió que es que tenía el corazón en la bota. Los dos murieron hace ya bastantes años.

Ya en la Universidad, mi maestro, sin duda (además de profesores como Abellanas, Morán, San Juan, Dou, o Ancochea), fue Antonio Valle, primero profesor adjunto en la Complutense de Madrid, donde yo fui ayudante, y luego catedrático en Santiago, a donde fui siguiéndole como adjunto.

Sobre cómo enseñar

Entrando ya en materia, y dejando las añoranzas para otro día, Valle (ahora jubilado en su tierra malagueña) sabía como nadie traer a los alumnos constantemente al tema del que estuviera tratando. Si en sus clases tenía que sumar quebrados o dividir polinomios (hablo de cursos como el tercero de la licenciatura en Matemáticas), recordaba a los presentes, con la mayor naturalidad, en menos de un minuto, cómo se hacían esas cosas. Es decir, no se escandalizaba, como tantos hacemos a diario, de que los alumnos no supieran esto o aquello, sino que sabía ponerse en su pellejo sin el menor aspaviento. Los alumnos, que, digámoslo así, ya sabíamos esas cosas aunque las hubiéramos medio olvidado (digámoslo así, también), teníamos de esa forma la oportunidad de reciclar nuestros presuntos conocimientos y, lo que es más importante, de engancharnos al carro de los nuevos.

En otras palabras, el tiempo es oro y Valle no lo dedicaba a decir tonterías como las que voy a leerles. La primera está tomada de una tablilla cuneiforme babilónica de hace unos miles de años y dice:

La juventud de hoy está podrida hasta la médula y es mala, irreverente y perezosa. Nunca será como la juventud del pasado y será incapaz de conservar nuestra civilización.

El segundo texto, atribuido a Sócrates por sus discípulos, es más prolijo y, por tanto, más divertido:

La juventud de ahora ama el lujo, tiene pésimos modales y desdeña la autoridad. Muestran poco respeto por sus superiores y prefieren insulsas conversaciones al ejercicio. Son ahora los tiranos y no los siervos de sus hogares. Ya no se levantan cuando alguien entra en su casa. No respetan a sus padres, conversan entre sí cuando están en compañía de sus mayores, devoran la comida y tiranizan a sus maestros.

Francamente yo no me creo que eso lo dijera Sócrates, pero simplezas como éstas (dígalas Agamenón o su porquero) bien sé que se repiten, generación

tras generación. Éstas en concreto las tomé hace años de la introducción a unos apuntes de la asignatura de Pediatría de esta Universidad que le tocó estudiar a una hija mía. Lamento no recordar quién fue el autor de esos apuntes para rendirle homenaje.

No obstante, soy el primero en reconocer que si tanto se repiten textos como éstos alguna verdad encerrarán. Para tratar de encontrarla, lo primero que sería necesario, si no queremos que la eterna repetición lleve implícita una flagrante contradicción, sería quitar de los textos leídos los pequeños incisos “de hoy” (la juventud de hoy) y “de ahora” (la juventud de ahora). Incluso puede que fuera suficiente con eso.

En relación con lo anterior, tiene gracia lo que a tantos del oficio nos ha pasado alguna vez cuando nos encontramos a algún joven ex-alumno nuestro, recién licenciado, que, porque acaba de estrenarse como profesor, parece como si se sintiera obligado a hablar, muy puesto en su lugar, de “cómo son los jóvenes de hoy en día”. En algún caso me he bajado las gafas como para verlo mejor y le he respondido “andá si yo creía que tú eras uno de ellos”. En fin, bien está que ellos lo digan porque quieren hacerse mayores, pero que sepan, si alguno me escucha, que corren el peligro de que la tonta idea se les fosilice en la cabeza.

Los estudios de Matemáticas

Otro asunto al que quería aludir es a los estudios de Matemáticas en la Universidad y para hacerlo brevemente voy a leer, sin comentarios, lo que escribí hace unos meses a unos colegas que andan esforzándose, con muy buen criterio, en crear una especie de Instituto de Matemáticas a nivel nacional.

Queridos amigos:

No me cabe duda de que serán muchas, y mejores que las que yo pudiera dar, las opiniones que recibiréis sobre lo que debe ser y hacer el “Instituto Español de Matemáticas” que estáis proyectando. Un Instituto cuya finalidad entiendo que debe ser esencialmente investigadora (básica y aplicada). Más o menos como ese Instituto de Química de Valencia del que hablaba El País hace unos días. Un Instituto que no conozco pero que, tal como lo presentaba el citado diario, considero ejemplar y muy digno de tener en cuenta.

Habida cuenta de lo anterior, centraré mi respuesta a vuestra amable consulta en un solo punto. Un punto que considero urgente y, en cierto modo,

“cuestión previa” a todo planteamiento sobre el desarrollo de las Matemáticas en España.

La situación en Extremadura, que creo que no difiere demasiado de la que se da en muchas otras comunidades, es, en números redondos, la siguiente:

- 1. En los últimos años se vienen licenciando en Matemáticas unas 10 personas por curso.*
- 2. Cada dos años la Junta de Extremadura convoca unas 70 plazas de profesores de Matemáticas para la enseñanza secundaria. Además, en los próximos años va a crecer notablemente el número de profesores de secundaria que se jubilen.*
- 3. Como las cifras dadas en los apartados anteriores no van a cambiar significativamente en los años venideros (son unos 20 los matriculados este año en primer curso de Matemáticas), la responsabilidad de la enseñanza de las Matemáticas en secundaria irá recayendo más y más en no matemáticos (ni siquiera físicos, que tampoco hay), lo cual es, a mi entender, francamente grave. Tan grave, por lo menos, como verme a mí enseñando lo que no sé (Biología, por ejemplo).*
- 4. La sociedad no solo parece ignorar que en Matemáticas sí hay trabajo sino que, para colmo, parece que tiende a dar la razón a los no pocos que “creen”, sin matices, que es un derroche mantener abiertas las titulaciones con pocos alumnos, en lugar de escuchar a los que “piensan” que hay estudios que es imprescindible potenciar porque son esenciales para la buena marcha de la sociedad.*
- 5. Importa insistir en que lo señalado en los puntos anteriores no son “proyecciones” más o menos fiables de lo que puede suceder, sino que son cosas (número de matriculados o próximas jubilaciones) ciertas (ya sucedidas).*

Por consiguiente, sin perjuicio de que la finalidad de un Instituto Español de Matemáticas sea esencialmente investigadora, dicho Instituto debería implicarse seriamente, desde sus comienzos, en la promoción entre los jóvenes de los estudios de Matemáticas. ¿Convendría que abrierais un turno de consultas sobre cómo lograrlo?

Espero que estas cuatro ideas (datos, más bien) os puedan ser útiles. Son fruto de comentarios y discusiones con compañeros del Departamento que manifiestan su acuerdo con ellas.

Un saludo y muchas gracias por vuestro trabajo.

Badajoz, 10 de noviembre de 2006.

Solo añadiré que la persona a la que dirigía esta carta era María Jesús Carro, badajocense y antigua alumna nuestra, que es ahora una magnífica investigadora en Matemáticas, catedrática de Análisis Matemático de la Universidad Central de Barcelona y coordinadora del área de Matemáticas de la ANEP (Agencia Nacional de Evaluación y Prospectiva del Ministerio de Educación y Ciencia).

En fin, tiempo es ya de hablar de Matemáticas y, para ello, nada mejor que empezar por Euclides.

Euclides

No cabe ninguna duda de que los números naturales, los que sirven para contar, 1, 2, 3, 4, ... (los llamaran como los llamaran y los denotaran como los denotaran, si es que escribían), son, no solo anteriores al inicio de lo que llamamos Matemática, sino también a lo que conocemos como Historia. Igualmente anteriores son las nociones de punto, recta, plano, triángulo, cuadrado, círculo, ..., incluso pirámide.

Precisamente, en el lugar de las pirámides más famosas, en el antiguo Egipto, parece que ya usaban una cuerda con trece nudos igualmente separados que les permitía trazar ángulos rectos, pues sabían que si con ella formaban un triángulo con tres de los tramos iguales de la cuerda en un lado, cuatro en el otro y cinco en el tercero, entonces el ángulo más grande de los que resultaban era recto. De esto se ayudaban, parece ser, para asuntos como el de volver a trazar las lindes de las parcelas que las inundaciones del Nilo borraban.

Es decir, los antiguos egipcios ya sabían que el triángulo de lados 3, 4 y 5 es rectángulo y conocían, por tanto, al menos este caso particular de lo que hoy llamamos teorema de Pitágoras, que dice que es rectángulo porque (y solo porque) $3^2 + 4^2 = 5^2$, o sea $9 + 16 = 25$.

Sus aventajados discípulos los griegos, con Pitágoras y otros (el más grande, sin duda, fue Arquímedes) empezaron entonces a armar aquí en occidente (China o India son, posiblemente, otra canción) lo que hoy conocemos como Matemáticas. El genial compilador de los conocimientos matemáticos de la época fue Euclides, el cual partía de unos pocos “objetos primeros” como punto, recta, plano, circunferencia, etc., de unas pocas “propiedades primeras” relativas a ellos, a las que llamaba “postulados”, y de otras pocas “nociones comunes”.

Los muy famosos cinco postulados de los Elementos de Euclides dicen cosas tan simples como:

1. *Dos puntos determinan una recta.*
2. *Se puede prolongar una línea recta indefinidamente.*
3. *Se puede trazar una circunferencia con centro y radio dados.*
4. *Todos los ángulos rectos son iguales.*
5. *Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela a ella.*

Los “nociones comunes” son, a su vez:

1. *Las cosas iguales a una dada son iguales entre sí.*
2. *Si se añaden cosas iguales a cosas iguales, las resultantes son iguales.*
3. *Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, las resultantes son iguales.*
4. *Las cosas que pueden superponerse son iguales.*
5. *El todo es mayor que la parte.*

Dichos objetos primeros, postulados y nociones comunes, son unas pocas “evidencias” con las que empezar a trabajar. Es decir, a demostrar, a partir de ellas, un respetable número de proposiciones y teoremas que ocupan los trece libros más estudiados de la historia.

Todo lo que hizo Euclides, que fue, esencialmente, relativo a la geometría de puntos, rectas, planos, círculos, etc., aunque también a la aritmética, sigue en pie hasta el día de hoy. Este es, quizá, el rasgo distintivo de las Matemáticas frente a las Ciencias de la Naturaleza. ¿Podríamos atrevernos a decir,

parafraseando de alguna forma Platón, que la “naturaleza” de los objetos matemáticos es inmutable?

Fijémonos un momento en el muy famoso postulado quinto de Euclides, que dice (tiene varios enunciados equivalentes) que por un punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela a ella. Ningún matemático a lo largo de la historia dudó de la veracidad (oportunidad) de dicho postulado, pero muchos se esforzaron en demostrar que eso no era un verdadero postulado, o punto de partida necesario como tal, sino que era consecuencia de los anteriores, es decir, un teorema en lugar de un postulado.

Nadie lo consiguió hasta que, a mediados del siglo XIX, Bolyai, Lobachevski y Riemann probaron a construir una geometría sin ese postulado (pero con los otros) y encontraron otras geometrías en las que no había ninguna paralela o en las que había más de una. Fue un buen escándalo y, aparentemente, un mero juego. Fue, además, el día que podríamos señalar como el de la separación definitiva de la Matemática (mundo de las ideas) y la Física (mundo de la realidad). Años más tarde, sin embargo, las dos viejas hermanas volvieron a encontrarse (su amor es indeleble), cuando aquel “juego” de la geometría sin paralelas fue fundamental para el establecimiento de la teoría de la relatividad.

El asunto de la relatividad es difícil de comprender, pero el de la geometría sin paralelas es sumamente fácil para cualquiera que tenga los pies en la tierra. Imaginen que vivimos no sobre un plano sino sobre una superficie esférica (no es mucho imaginar porque eso es, aproximadamente, nuestra Tierra). En dicha superficie la distancia más corta entre dos puntos no se mide sobre la recta que los une, pues no existen rectas sobre la superficie esférica, sino sobre la única circunferencia de radio máximo que pasa por ellos (recuérdese el primer postulado de Euclides, que dice que dos puntos determinan una recta). Así, las circunferencias máximas (las que son como el ecuador o los meridianos) pasan a ser las “rectas” de la superficie esférica y, obviamente, no hay circunferencias máximas que no se corten, que sean paralelas (los meridianos, por ejemplo, se cortan en los polos).

Pueden creer que lamento que ese modelo tan tonto de geometría sin paralelas quite el evidente morbo (intriga) que lleva aparejada la negación de la existencia de paralelas.

Dejemos por un momento la Geometría y volvamos a los números. Los números naturales, 1, 2, 3, ..., ya estaban ahí, como dijimos antes, milenios

antes de que naciera el primer matemático. Decía Kronecker, un matemático alemán de finales del siglo XIX, que los números naturales los había hecho Dios, los demás los hombres. Lo mismo, naturalmente, cabría decir de los objetos primeros de Euclides (punto recta, plano, etc.)

Dos mil años después de Euclides, a finales del siglo XIX, a Giuseppe Peano y otros se les ocurrió establecer, al modo de Euclides para la Geometría, un sencillo sistema de postulados (evidencias) para los números naturales y, por tanto, para la Aritmética. Dicen así:

1. *1 es un número.*
2. *El sucesor inmediato de un número también es un número.*
3. *1 no es el sucesor inmediato de ningún número.*
4. *Dos números distintos no tienen el mismo sucesor inmediato.*
5. *Toda propiedad perteneciente a 1 y al sucesor inmediato de todo número que también tenga esa propiedad pertenece a todos los números.*

Esos números naturales cuya existencia y propiedades básicas acabamos de postular son una maravillosa idea, pero llena de limitaciones (también podríamos decir de posibilidades, o desafíos). Sirven para contar conjuntos finitos (43 ovejas, 7 botijos, etc.) pero no para expresar el “saldo” de un balance. Si el balance es “haber: 17, debe: 5”, el saldo es 12, es decir, sí sirven, pero si es “haber: 5, debe: 17”, ya no. Para eso aparecen, como ampliación de aquellos (sin perder nada y ganando ésto), los números enteros, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

Los números enteros sirven, pues, para contar conjuntos finitos y para expresar el saldo de un balance, pero no para expresar la “ración” de un reparto. Para ello es necesaria una nueva ampliación del concepto de número: los números racionales, $1/3$ (la tercera parte de una tarta), $-7/4$ (la cuarta parte de una deuda de 7 pesetas), $71/5$, Racionales más bien por ración que por razón, aunque esto todavía nadie me lo ha confirmado.

Los números racionales sirven para lo ya dicho, contar, saldar, racionar, pero no para “medir”. Ya Pitágoras sabía que no existe ningún número racional (ningún cociente de números enteros) que sirva para expresar la longitud de la diagonal del cuadrado de lado 1, o, lo que es lo mismo, vía teorema de Pitágoras, que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2.

En los Elementos de Euclides aparece una demostración sorprendentemente sencilla de este hecho. Dice así:

Si hubiera un número racional cuyo cuadrado es 2, dicho número racional (como cualquier otro) podría escribirse como cociente de dos números primos entre sí, $\frac{p}{q}$. De donde se sigue que $(\frac{p}{q})^2 = 2$ y, por tanto, $p^2 = 2q^2$, es decir, p^2 es par. Luego p es par y p^2 es múltiplo de 4. Por tanto, también q^2 y q son pares, lo cual contradice el hecho de que p y q son primos entre sí.

Hubo que esperar, sin embargo, a finales del siglo XVIII para saber que el área del círculo de radio 1 (o la longitud de la circunferencia de diámetro 1), eso que acostumbramos a llamar π , tampoco podía expresarse con un número racional, y a finales del XIX para saber que π tampoco es un número algebraico, es decir, que tampoco es la raíz de ningún polinomio de coeficientes racionales, como sí lo es el número anterior, $\sqrt{2}$, que es raíz del polinomio $x^2 - 2$. Este problema de la naturaleza de π , conocido como el de la cuadratura (medida) del círculo, fue el más famoso problema matemático de todos los tiempos.

Para dar respuesta al problema de medir se crean (los matemáticos, habitualmente platónicos, creen más en el descubrir que en el crear) los números reales, que son los que, en nuestro sistema habitual de numeración, tienen expresiones decimales finitas o infinitas (ilimitadas). Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, $\pi = 3,141592\dots$. Es decir, si el diámetro de la circunferencia mide 1 metro, entonces ésta mide 3m., 1 dm., 4 cm., 1mm., etc.. Infinitas (o ilimitadas) aproximaciones, no periódicas (las periódicas corresponden a los números racionales), porque la circunferencia es “incommensurable” con su diámetro (π no es racional).

Cantor

En este ir y venir de la Geometría a la Aritmética, o de los números más complicados a los más sencillos en que andamos embarcados, volvamos nuevamente a éstos, los números naturales. Aunque para lo que sirven es para contar conjuntos finitos (con finitos elementos), es precisamente con ellos con los que hace su aparición el infinito, que, lo mismo que la geometría sin paralelas, no es una cosa demasiado misteriosa, sino que significa, simplemente, que, cualquiera que sea el número natural que tomemos, siempre hay otro más grande. Esta forma de entender el infinito, tan poco esotérica, la pobre,

forma parte de la esencia de la Matemática. (De algo como esto hablaba Euclides en su segundo postulado, a propósito de la recta que se puede prolongar indefinidamente, y, por supuesto, también Peano cuando decía, en su segundo postulado, que el sucesor inmediato de cualquier número también es un número).

Una cosa es, sin embargo, el infinito potencial al que se refiere lo que acabamos de decir, y otra un poquito distinta es el infinito actual o existencial que resulta de postular la existencia de conjuntos con infinitos elementos, como el de los números naturales. (Los filósofos, lógicos y bizantinos de cualquier especie disfrutaban mucho, y con razón, con estos asuntos de los infinitos potenciales y actuales). Pues bien, la mera admisión de la existencia de conjuntos con infinitos elementos (infinitos actuales) enseguida empieza a hacer que cuestiones que eran evidentes dejen de serlo.

Por ejemplo, sabemos bien (es evidente) que un conjunto finito no se puede poner en correspondencia 1-1 con ninguna de sus partes (el todo es mayor que la parte, que decía Euclides), pero la inexistencia de correspondencias 1-1 entre el todo y la parte deja de ser cierta cuando con lo que tratamos es con conjuntos supuestamente infinitos. Así, el conjunto formado por los números pares es una parte de los naturales, pero se pueden establecer correspondencias 1-1 entre ellos. Basta pensar en la siguiente (de la que ya hablaba Galileo y, seguro que otros antes que él):

<i>Naturales</i>		<i>Pares</i>
1	→	2
2	→	4
3	→	6
4	→	8
5	→	10
...

Los números naturales, a su vez, son una parte de los enteros, y también es sumamente fácil establecer una correspondencia 1-1 entre ambos conjuntos. Por ejemplo la siguiente,

<i>Naturales</i>	→	<i>Enteros</i>
1	→	0
2	→	1
3	→	-1
4	→	2
5	→	-2
...

Algo más sorprendente, y sin embargo muy sencillo de ver, es que incluso puede establecerse una correspondencia 1-1 entre los naturales y los racionales. Un esquema de la forma en la que puede establecerse dicha correspondencia la da el diagrama (llamado diagonal de Cantor),

1/1		1/2		1/3		1/4	...
	↙		↙		↙		
2/1		2/2		2/3		2/4	...
	↙		↙		↙		
3/1		3/2		3/3		3/4	...
	↙		↙		↙		
4/1		4/2		4/3		4/4	...
	↙		↙		↙		
...	

que debe “leerse” de la siguiente forma:

<i>Naturales</i>	→	<i>Racionales</i>
1	→	0
2	→	1/1
3	→	-1/1
4	→	1/2
5	→	-1/2
6	→	2/1
7	→	-2/1
8	→	1/3
...

Nótese que incluso cada racional aparece a la derecha infinitas veces, 1/1, 2/2, 3/3, ..., ó, 1/2, 2/4, 3/6, ..., por lo que, para que la correspondencia sea verdaderamente 1-1, bastará considerar solo la primera aparición de cada uno. Es decir, en vez de $10 \rightarrow 2/2$, $10 \rightarrow 3/1$, etc.

Como conviene que esta idea de la correspondencia 1-1 entre naturales y racionales repugne como Dios manda a esa pobre intuición nuestra que alcanza poco más allá de lo finito (limitado), llamo la atención sobre el hecho de que, cuando representamos los números sobre una recta (una cinta métrica), en cada segmento de ella, por grande que sea, solo hay finitos naturales y en cada segmento, por pequeño que sea, hay nada menos que infinitos racionales. Pese a ello, es sumamente sencillo, como acabamos de ver, establecer una correspondencia 1-1 entre naturales y racionales.

Nótese que, en vez de decir que en cada segmento hay finitos naturales e “infinitos” racionales, podríamos haber utilizado la argucia del infinito potencial y decir que los racionales del segmento son “ilimitados”.

Lo que ya no es posible es establecer una correspondencia 1-1 entre los números naturales y los reales y, por consiguiente, entre los números racionales y los reales. Lo cual significa que, dada una correspondencia cualquiera entre naturales y reales

<i>Naturales</i>		<i>Reales</i>
1	→	$a_1 'b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}...$
2	→	$a_2 'b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}...$
3	→	$a_3 'b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}...$
4	→	$a_4 'b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}...$
...

siempre hay números reales que no están a la derecha. Por ejemplo, no está el

$$c' d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$$

donde

$$\begin{array}{llll}
 d_1 = 3 & \text{si } b_{11} \neq 3, & d_1 = 5 & \text{si } b_{11} = 3 \\
 d_2 = 3 & \text{si } b_{22} \neq 3, & d_2 = 5 & \text{si } b_{22} = 3 \\
 d_3 = 3 & \text{si } b_{33} \neq 3, & d_3 = 5 & \text{si } b_{33} = 3 \\
 d_4 = 3 & \text{si } b_{44} \neq 3, & d_4 = 5 & \text{si } b_{44} = 3
 \end{array}$$

.....

ya que se diferencia del primero en la primera cifra decimal, del segundo en la segunda, del tercero en la tercera y así sucesivamente.

Podríamos decir, y así decimos los matemáticos, aunque con palabras un poco más técnicas o abstrusas, que el infinito de los reales es más grande que los infinitos, equiparables entre sí, de los conjuntos anteriores: pares, naturales, enteros, racionales.

Este fue el trabajo del gran Georg Cantor a finales del siglo XIX. Trabajo al que se opuso airadamente (cosa que no suele ocurrir en nuestra ciencia) su viejo maestro Kronecker, bizantinista de pro.

Como esta charla avanza (enseguida acabará) y parece que se nos quieren complicar un poco las cosas, trataré de hacer lo que dije antes que hacía mi maestro, que siempre se esforzaba, a lo largo de sus clases, por traer a la cuestión a los oyentes.

A tal fin, creo que conviene recordar que los números naturales, enteros, racionales o reales, de los que estamos hablando, están ahí y son sobradamente conocidos por cualquiera que haya contado, saldado un balance, repartido lo que sea, o medido cualquier cosa, que es como decir por el común de los mortales. En otras palabras, no son invento de los matemáticos, sino que éstos se han limitado a ordenar y estudiar sistemáticamente ideas (números) que estaban ahí. Estableciendo, si se quiere ver así (a lo formalista), como punto “formal” de partida los sencillos postulados de Peano que citamos antes.

Sí podríamos hablar, sin embargo, de los descubrimientos de que $\sqrt{2}$ o π no son racionales, o de lo que hemos dicho sobre la existencia, o no, de correspondencias 1-1 entre distintos conjuntos de números, sin que perdamos tampoco la idea de que todo esto es algo que también está ahí, en la esencia de los números. Al margen, desde luego, de la voluntad de cualquier matemático. Matemático que suponga, claro está, la infinitud del conjunto de los números naturales, cosa a la que, por supuesto, nadie puede obligar.

En otras palabras, el trabajo de descubrir (ahora jugando con los infinitos existenciales) no diferencia a los matemáticos de los científicos de la naturaleza (químicos, físicos, biólogos, etc.), sino que la diferencia está, como ya dijimos antes, en la “naturaleza” de los objetos sobre los que los matemáticos trabajan. Podríamos añadir que son objetos abstractos, pero cualquiera podría objetar, y entraríamos en polémica (¡viva la polémica!), que también resulta un poco abstracto llamar abstractos a los números nuestros de cada día.

Gödel y Cohen

Enseguida volveremos sobre lo que acabamos de decir acerca de los infinitos de distintos tamaños y con ello terminaremos esta charla, pero antes vamos a volver a recordar lo que hizo Euclides cuando, sobre unos pocos objetos primeros (punto, recta, plano, ...) unos pocas relaciones primeras (postulados) y otras pocas nociones comunes, sentó las bases del edificio que hoy llamamos Matemáticas. Del todo análogo a lo que luego hizo Peano con los números naturales.

A principios del siglo XX, y de resultas del trabajo de Cantor y otros, hubo una gran crisis relativa a eso de los objetos primeros, postulados y nociones comunes. Es decir, relativa a la fundamentación de las Matemáticas: la inicial y francamente maravillosa de Euclides, y cualesquiera otras. Por ejemplo, la de la Aritmética de Peano. Lo que ocurrió es que las paradojas, que siempre habían sido conocidas y disfrutadas, volvieron, como ratones, a asomar su impertinente hocico por los sótanos del ya magnífico edificio. Dije volvieron porque ya los filósofos y matemáticos griegos habían toreado con ellas, pero los infinitos “existenciales” de Cantor las dieron nuevos bríos.

Por ejemplo, se crea una situación paradójica cuando alguien pone una horca a la salida de un puente con el fin de ejecutar en ella al que no diga la verdad sobre el destino al que se dirige. Y viene uno y dice que a lo que va es a que le ahorquen. (Ver capítulo LI de la segunda parte del Quijote, donde Cervantes, por boca de Sancho y otros, habla de esto con mucha gracia, para llegar a la conclusión, claramente caritativa pero poco matemática, de que in dubio pro reo).

Igualmente paradójico es hablar del menor de los números naturales que, en nuestro idioma, no se pueden definir con menos de treinta palabras. Es paradójico porque lo acabamos de definir con diecinueve: “el-menor-de-los-números-...”.

O bien, considerar un pueblo en el que hay un único barbero que, por ley, afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al susodicho barbero? ¿Cómo cumple la ley el pobre hombre?.

En los años treinta del siglo pasado (a los que ya somos viejos se nos hace arduo llamar siglo pasado al que fue nuestro siglo), Kurt Gödel, más adelante compañero y buen amigo en Princeton de Albert Einstein, investigó profundamente (a sus veintipocos años) sobre los fundamentos, no ya de

la Matemática en su conjunto, sino de algo tan modesto como la Aritmética (la ciencia de los números) y llegó a demostrar que es imposible establecer un sistema “finito” de postulados (“evidencias” como las de Peano) que permitan desarrollar la Aritmética en su presunta totalidad.

En otras palabras, que, hasta donde sabemos, la fundamentemos como la fundamentemos, siempre aparecerán “indecidibles”, que son problemas bien planteados sobre los que no podremos (ojo, no digo “no sabemos”, que de eso hay mucho, sino “no podremos”) encontrar ninguna respuesta.

En los años sesenta, Paul Cohen, fallecido en marzo de este mismo año, atendiendo a la predicción (mejor dicho, a la demostración aunque todavía sin ejemplos concretos) de Gödel, encontró un indecidible cuyo enunciado (no la demostración de que es indecidible, que es muy difícil) podemos comprender perfectamente con lo que llevamos visto en este rato.

Ya vimos que era muy fácil probar que el infinito de los números reales es más grande que el infinito de los números racionales, que es, a su vez, el mismo que el de los números naturales. Eso significa que no se puede establecer una correspondencia 1-1 entre “la parte”, que es el conjunto de los números racionales, y “el todo” que es el conjunto de los números reales.

Como consecuencia de ello, en el tránsito del siglo XIX al XX se había planteado, de forma completamente natural, la cuestión de si existe algún conjunto de números reales más grande que el de los racionales y más pequeño que el de todos los reales, que tenga, digámoslo así, una infinidad de elementos intermedia de las anteriores. En palabras más precisas, un conjunto de números reales tal que no se pueda establecer un correspondencia 1-1 entre él y los racionales, ni entre él y el de todos los reales. También este problema, como le había sucedido durante dos milenios al quinto postulado de Euclides, fue famoso, aunque resistió abierto menos de un siglo.

La sorprendente respuesta de Cohen (fue Gödel quien, como acabamos de decir, anunció que aparecerían estas cosas) es que ni sí ni no. Es decir, que es imposible encontrar un ejemplo, que sería la demostración de su existencia, y es igualmente imposible demostrar que no existe tal ejemplo. En otras palabras, que si suponemos que el ejemplo existe no llegamos a contradicción, y si suponemos que no existe tampoco llegamos a contradicción.

Ocurrió, una vez más, lo que ya había sucedido con el quinto postulado de Euclides, que era indecidible con los cuatro primeros postulados. Es decir,

si se admite como postulado la existencia de una única paralela por todo punto exterior a una recta se obtiene la Geometría de Euclides y, si no, otras geometrías que ya han demostrado su validez incluso en el innegablemente real mundo de la Física.

Respecto a la cuestión en la que ahora estamos (existencia, o no, de conjuntos intermedios entre los números racionales y los reales), podríamos añadir de alguna forma a los cinco postulados de Peano la existencia, o la inexistencia, de tales conjuntos intermedios y estaríamos, simplemente, como cuando lo del quinto postulado de Euclides. (Concretamente, la admisión de la inexistencia de tal conjunto es lo que los matemáticos llaman con el extraño nombre de “hipótesis del continuo”).

Hay, sin embargo, una diferencia esencial entre lo de Gödel y Cohen, por una parte, y lo de Bolyai, Lobachewski y Riemann, por otra. Nada menos que la demostración por parte de Gödel de que siempre que partamos de un número finito de postulados aparecerán problemas indecidibles. El de Cohen no fue sino el primer, profundo e inesperado ejemplo tras el trabajo de Gödel.

Son cuestiones que tocan en la línea de flotación, no ya de la Aritmética y, por tanto, de la Matemática en su conjunto, sino, posiblemente, de toda la teoría del conocimiento. Pero esto ya tendría que comentarlo algún filósofo y no un simple matemático. Xavier Zubiri, entre otros, dedicó a este asunto buena parte de su trabajo. Citemos, a modo de ejemplo, un pequeño párrafo de Zubiri extraído de su obra *Inteligencia y Logos*:

Los objetos matemáticos tienen sus propiedades “de suyo” es decir son reales. Es que el objeto real postuladamente realizado según conceptos tiene, por estar realizado, más notas o propiedades de las definidas en su postulación. Por esto y sólo por eso es por lo que plantea problemas que pueden no ser resolubles con el sistema finito de axiomas que han definido su realización. Lo construido en “la” realidad es, por estar realizado, algo más que lo postulado al realizarse. Es a mi modo de ver el alcance del teorema de Gödel [...]. Los juicios matemáticos son pues juicios de algo real, juicios de lo “real postulado”. No son juicios acerca del “ser posible” sino juicios acerca de la “realidad postulada”.

Como verán, dicho sea con respeto por el arduo trabajo realizado por Zubiri, a cualquiera puede pasarle como a mí, que le resulta más difícil entender a los filósofos que a los matemáticos, que ya es decir.

En cuanto a los matemáticos, cabe decir que estamos encantados de que uno de los tales haya logrado demostrar (demostrar, decimos) que, hasta donde hoy sabemos, nos pongamos como nos pongamos, no todo lo que está bien planteado y es inteligible se puede demostrar. Es decir, que, lejos de considerar errada la vía de la admisión de los infinitos actuales (tan “evidentes” cuando miramos a los simples números naturales), consideramos que su admisión (a la que nada ni nadie obliga o impide) nos lleva a poder admirar resultados tan profundos como los de Cantor, Gödel y Cohen.

En otras palabras, que la cuestión de la existencia o no de conjuntos con infinitos elementos, cuya apariencia es tan rabiosamente bizantina, puede que no lo sea tanto, pues da lugar a verdaderas y profundas demostraciones. (Entiéndase el bizantinismo como pura opinión y nula demostración. Algo así como el mero vacío).

Epílogo

(Nota: Epílogo no es, aunque lo parezca, el nombre de otro matemático griego, sino que significa que, gracias a Dios, esto toca a su fin).

Me gustaría poder acabar esta charla con los últimos versos del romance del infante Arnaldos que dicen:

*Allí habló el infante Arnaldos,
bien oiréis lo que dirá:
– Por tu vida, el marinero,
dígame ora ese cantar.
Respondióle el marinero,
tal respuesta le fue a dar:
– Yo no digo mi canción
sino a quien conmigo va.*

Pero la inefable respuesta del marinero va más allá de las pretensiones, mucho más humildes, de la Matemática. Así que me conformo con terminar diciendo, también a lo romancesco pero sin la infinita (¿ilimitada?) poesía que rezuman aquellos versos, que:

La Matemática es una hermosa y arisca dama que solo muestra sus encantos a quienes porfían con ella.

Muchas gracias por su atención.

Badajoz, 28 de septiembre de 2007