Espacios métricos y geometría Riemanniana

por

Juan Monterde, Universitat de València

Introducción

En cualquier primer curso de topología conjuntista que pueda seguir un estudiante de matemáticas uno de los primeros ejemplos que se ofrecen es el de la topología asociada a un espacio métrico. El concepto de espacio topológico es bastante abstracto, por ello, desde un punto de vista pedagógico, tomar como ejemplo un espacio en el que se conservan algunas de las propiedades intuitivas resulta ser una ayuda inestimable.

Sin embargo, mi propia experiencia docente me ha indicado que los mismos espacios métricos pueden ser tan extraños que, a pesar de las propiedades que conservan, la intuición puede conducir a conclusiones equivocadas. El caso particular de la métrica euclidiana está demasiado presente. Determinar, por ejemplo, cuáles son las bolas abiertas de un espacio métrico distinto del euclidiano, que precisamente da origen al nombre de estos conjuntos, puede resultar complicado. Este hecho me impulsó a ayudarme en las tareas docentes con un programa informático del que hablaré más adelante. El programa permite representar estos conjuntos, y otros similares, en una serie de espacios métricos definidos todos en el plano. El objetivo consistía en intentar que los estudiantes se quedaran con aquellas propiedades intuitivas que realmente sí que se conservan en los espacios métricos y rechazar aquellas que son propias del espacio métrico euclidiano.

El siguiente paso fue el preguntarme por la relación que existe entre los espacios métricos, básicamente un conjunto de puntos y una función distancia, y la teoría que se conoce con el nombre de geometría axiomática, básicamente también, un conjunto de puntos y una familia de subconjuntos llamados líneas o rectas. ¿Es posible definir en cualquier espacio métrico el concepto de línea que pasa por dos puntos? La respuesta es afirmativa y el programa informático antes mencionado dibuja también estos subconjuntos, así como los segmentos comprendidos entre dos puntos. Ahora bien, si la intuición ayuda bien poco en el caso de las bolas abiertas, para estos otros dos tipos de subconjuntos, los segmentos y las líneas, los resultados pueden ser muy extraños. Líneas con interior no vacío, segmentos disjuntos, líneas que son subconjuntos acotados, etc. A pesar de esto, sí que hay muchas propiedades que formalmente al menos se conservan. La Sección 3 está dedicada a esta pregunta y al estudio formal de los segmentos y las líneas.

Por otra parte, los espacios métricos vuelven a aparecer también en geometría Riemanniana. Esto no es de extrañar. Cuando B. Riemann, en su memoria de habilitación "Sobre los axiomas en los que se basa la geometría", pone los fundamentos de la teoría que ahora conocemos por su nombre, también plantea una noción inicial de espacio topológico. La relación entre el concepto de variedad Riemanniana, de espacio métrico y de espacio topológico fue clarificada mucho después y ahora se enuncia mediante el llamado teorema de Hopf-Rinow. De manera resumida, este teorema afirma que dada una variedad Riemanniana, se puede definir un espacio métrico tomando como conjunto base la propia variedad. Además la topología asociada al espacio métrico coincide con la topología inducida por la estructura diferenciable. El enunciado del teorema se completa con la existencia, dados dos puntos distintos de la variedad, de una curva con propiedades especiales: la geodésica minimizante. Estas curvas pueden considerarse como las correspondientes líneas de la variedad Riemanniana desde el punto de vista de la geometría axiomática.

Ahora bien, gran parte del teorema de Hopf-Rinow se basa en propiedades de espacios métricos. Recientemente, M. Gromov, delimitó exactamente la clase de espacios métricos en los cuáles un enunciado similar es válido. La última sección está dedicada a un estudio introductorio de esta clase de espacios métricos, llamados por Gromov espacios métricos de caminos. Los ejemplos que aparecen en esta sección están tomados de las secciones anteriores.

Resumiendo, puntos, líneas, rectas, ángulos, distancias, longitudes, ... Todas son nociones que se relacionan con la geometría, pero con diferentes aproximaciones a la geometría. El objetivo de estas notas es repasar algunas de estas aproximaciones a la geometría y revisar las relaciones entre ellas.

Por un lado encontramos la aproximación histórica de la geometría axiomática de los "Elementos" de Euclides. Se habla en este caso de geometrías abstractas y de geometrías de incidencia. Por otro lado, tenemos el concepto de espacio métrico, con el uso de números reales, de una función distancia. Es lo que se llama geometría métrica o geometría de la distancia. Y por último, nos aparece la geometría Riemanniana, el golpe de timón con el que Riemann contribuyó al estudio de la geometría. Tres aproximaciones muy diferentes a la geometría pero que están íntimamente relacionadas.

1. Geometrías abstractas y de incidencia

Recordemos la definición de geometría abstracta ([MP], pág 15):

Definición 1 Una *geometría abstracta* es un par formado por un conjunto X, cuyos elementos se denominan puntos, y una familia, $\mathcal{L}$, de subconjuntos no vacíos de X, cuyos elementos se llaman líneas, tal que

1) para todo par de puntos $x, y \in X$, existe una línea $L \in \mathcal{L}$ tal que $x, y \in L$.
2) toda línea tiene al menos dos puntos.

Las geometrías abstractas interesantes son aquellas que conservan algunas de las propiedades intuitivas de la geometría euclídea, en particular la propiedad que permite asegurar que si dos rectas distintas se cortan, entonces se cortan en un único punto.

Definición 2 Una geometría abstracta se dice que es una *geometría de incidencia* si

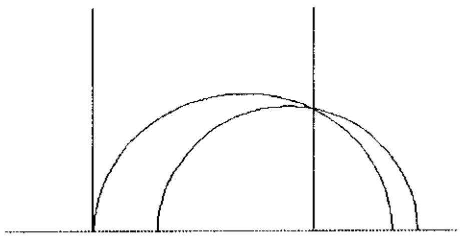
1) Cada par de puntos pertenece a una única línea.
2) Existen al menos tres puntos que no están todos en una misma línea.

Ejemplos de geometrías abstractas y de incidencia. Hay tres modelos sobradamente conocidos de geometrías abstractas, el plano cartesiano, el plano de Poincaré y la esfera Riemann

(1) **El plano cartesiano.** Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente familia de líneas. Las

líneas verticales $L_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = a\}$ donde $a \in \mathbb{R}$, y las líneas no verticales $L_{b,m} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx + b\}$, donde m y b son números reales.

(2) **El plano de Poincaré.** El conjunto de puntos es el semiplano de segunda coordenada positiva, $\mathcal{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$. Las líneas también son de dos tipos: $L_a := \{(x, y) \in \mathcal{H} | x = a\}$ o $L_{c,r} := \{(x, y) \in \mathcal{H} | (x - c)^2 + y^2 = r^2\}$, donde a, c y $r > 0$ son números reales.



(3) **La esfera de Riemann.** El conjunto de puntos es la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$, $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Las líneas son los círculos máximos incluidos en la esfera. Estos círculos son también la intersección de la esfera con los planos que pasan por el origen.

Estos tres modelos son geometrías abstractas. Los dos primeros son también geometrías de incidencia. No así la esfera de Riemann. Dados dos puntos de la esfera que sean antipodales, existen una infinidad de círculos máximos diferentes que pasan por ellos dos.

Nótese que hasta ahora no hemos hablado de distancia entre puntos. Los ingredientes de las geometrías abstractas sólo son puntos y líneas. En los tres modelos anteriores se podrá introducir una función distancia, pero esto no siempre es posible.

2. Espacios métricos

Recordemos primero la definición de espacio métrico.

Definición 3 Un *espacio métrico* es un par (X, d) donde X es un conjunto, cuyos elementos se llamarán puntos, y una función, que se llamará aplicación distancia o métrica, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

1) (positividad) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ y (definida positiva) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

2) (simetría de la función distancia) $d(x, y) = d(x, y)$, $\forall x, y \in X$.

3) (desigualdad triangular) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, x)$, $\forall x, y, z \in X$.

Observación 1 En algunos textos la terminología es un poco diferente. El término función distancia se reserva a aquellas aplicaciones que sólo verifican las dos primeras condiciones. Así, una métrica es una función distancia que verifica la desigualdad triangular. Nosotros, sin embargo, consideraremos ambos términos como sinónimos ya que, a lo largo de este texto no consideraremos aplicaciones que no verifiquen la desigualdad triangular. Además, como después introduciremos también el término "métrica riemanniana", utilizaremos con más frecuencia la expresión "función distancia" para evitar las confusiones que se producirían entre "métrica (del espacio métrico)" y "métrica riemanniana".

Un tipo de conjuntos que pueden definirse en cualquier espacio métrico, son las llamadas bolas abiertas, o simplemente bolas, del mismo.

Definición 4 Sea (X, d) un espacio métrico. Dado un punto $x \in X$ y un número real $r > 0$, se define la bola abierta de centro x y de radio r como el conjunto $B(x; r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

La topología asociada a un espacio métrico se define como sigue:

Definición 5 Un subconjunto $A \subset X$ se dice que es abierto si $\forall x \in X$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x; r) \subset A$. La familia de todos los subconjuntos abiertos se llama topología asociada a la métrica.

Una consecuencia de la desigualdad triangular es que las bolas abiertas son subconjuntos abiertos de esta topología.

Ejemplos de espacios métricos. A continuación veremos una serie de ejemplos de espacios métricos junto con sus características esenciales. Todos tienen a $\mathbb{R}^2$, o a un subconjunto de él, como conjunto subyacente. Una buena experiencia consiste en trabajar con todos ellos gracias a un programa denominado "MétricasR2" elaborado por Ángel Montesinos y que puede encontrarse en

http://topologia.geomet.uv.es/monterde/metriques/topologia.htm

o también en *ftp://topologia.geomet.uv.es/pub/montesin/MetricasR2_folder*

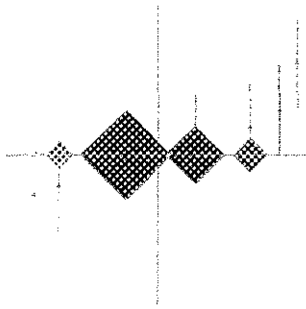
Las figuras de este texto han sido capturadas directamente del programa.

(1) **Métrica discreta.** La distancia entre dos puntos distintos es siempre igual a 1. Las bolas se reducen al centro si el radio es menor o igual a 1 y es todo el espacio

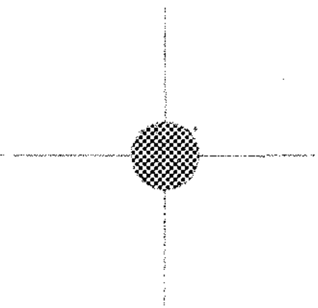
cuando el radio es mayor que 1.

(2) **Métrica euclídea**. Llamada también métrica usual. La distancia entre dos puntos es la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de las coordenadas. De otra forma, es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo definido por los dos puntos. Las bolas corresponden a círculos usuales del radio indicado.

(3) **Métrica del ascensor**. Si pensamos en el plano como la unión de todas las rectas verticales y a su vez, pensamos en estas como si se tratara de edificios, entonces la distancia entre dos puntos que estan en la misma recta vertical es sólo el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas verticales. Esto puede interpretarse como el recorrido de un ascensor que va desde una planta a otra en el mismo edificio. Si están en verticales diferentes, entonces la distancia es la suma $|y_1|+|x_1-x_2|+|y_2|$, lo que puede interpretarse como el recorrido que consiste en bajar con el ascensor del primer edificio hasta la planta baja (recta de abcisas), ir por la calle hasta el segundo edificio y subir con el ascensor del segundo edificio hasta la planta que indica la segunda coordenada del segundo punto.



Métrica del ascensor



Métrica de correos

(4) **Métrica de correos**. La distancia entre dos puntos distintos es la suma de las distancias euclídeas de ambos puntos al origen. Es como si se midiese el camino que recorre una carta que sale desde el primer punto, pasa por la oficina de correos, situada en el origen, y de allí va al segundo punto, en el que está el destinatario de la carta. Las bolas para esta métrica centradas en un punto x y de radio r consisten en el centro unión la bola euclídea centrada en el origen y de radio r menos la distancia de x al origen. Si el radio r es menor o igual que esa distancia, entonces la bola se reduce al centro. En otros casos la bola puede ser disconexa.

(5) **Métrica del taxi**. Llamada también métrica de Manhattan. La distancia

entre dos puntos es la suma de los valores absolutos de las diferencias entre las coordenadas $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. El nombre se debe a que la distancia se puede interpretar como la longitud del recorrido de un taxi, que en una ciudad cuadriculada, al estilo de Manhattan, que va desde un punto al otro con un solo giro de volante.

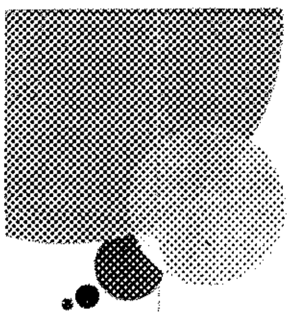
(6) **Métrica del ajedrez**. Llamada también métrica del máximo. La distancia entre dos puntos es el máximo de los valores absolutos de las diferencias ente las coordenadas $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$. El nombre se debe a que la distancia se puede interpretar de la siguiente manera: pensemos en un tablero de ajedrez y en él una sola pieza, el rey. El rey puede alcanzar en un solo movimiento las ocho casillas que le rodean. Pues bien, la distancia entre dos casillas es el mínimo número de movimientos que debe hacer el rey para ir de una casilla a la otra.

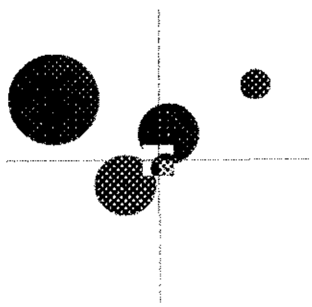
(7) **Métrica plano hiperbólico**. Es la métrica que corresponde al conocido modelo hiperbólico, también llamado **plano de Poincaré**. Está definida sólo en el semiplano $y > 0$.

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |\ln(\frac{y_2}{y_1})| & \text{si } x_1 = x_2 \\ \left|\ln\left(\dfrac{\frac{x_1 - c + r}{y_1}}{\frac{x_2 - c + r}{y_2}}\right)\right| & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $(c, 0)$ y r son el centro y el radio de la única circunferencia que, con centro en el eje de abcisas, pasa por ambos puntos.

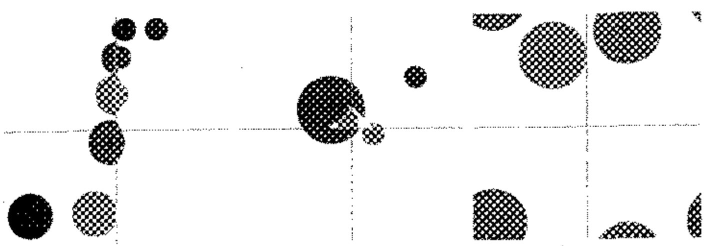
(8) **Métrica cuadrado alejado**. Es una variación de la métrica euclídea. Consideremos un cuadrado de lado 2 centrado en el origen de coordenades. La distancia entre dos puntos que estén, ambos, dentro del cuadrado o ambos fuera de él, es la misma que la distancia euclídea. En otro caso, es decir, uno dentro del cuadrado y el otro fuera, entonces la distancia es el máximo entre la distancia euclídea y la constante 4.


Métrica hiperbòlica


Cuadrado alejado

(9) **Métrica tierra-mar**. La mayor parte de las métricas anteriores se interpretan como la longitud de un cierto recorrido que va de un punto a otro. En este caso también hay un recorrido, pero la distancia se interpreta como el tiempo que se tarda en hacerlo a unas velocidades determinadas. Consideremos el plano dividido en dos partes, la de puntos con primera coordenada positiva o nula, y la de puntos con primera coordenada negativa. Supongamos que son medios diferentes en los cuales la velocidad a la cual se puede ir es distinta. En concreto, se supone que en la parte de primera coordenada negativa la velocidad es doble que en la otra. De ahí el nombre de la métrica. La velocidad en tierra es el doble que la que se puede desarrollar en la mar. La distancia entre dos puntos es el mínimo tiempo que se emplea para ir de un punto a otro. Es decir, entre todos los caminos que unen ambos puntos, se toma el más rápido. Si ambos puntos están en tierra, entonces el camino más rápido es el segmento usual que los une. Si uno de ellos está en tierra y el otro está en el mar, entonces el camino recuerda el proceso de refracción de un rayo de luz que pasa de un medio a otro. Si ambos están en el mar, entonces, el camino más rápido puede ser el segmento que los une, pero, si alguno de los puntos está relativamente cerca de tierra, entonces puede resultar más rápido acercarse a la costa, hacer un trozo de camino por la costa (al doble de velocidad) y en un punto determinado volver al mar.

(10) **Métrica región en meseta**. Otra variante de la métrica euclídea. La región en este caso es un triángulo, pero puede ser cualquier otra, y se dice que está en meseta porque es como si se hubiera levantado la región a una altura constante. Así, la distancia entre dos puntos que están dentro de la región, o ambos fuera, es la misma que la euclídea. Si uno de ellos está dentro y el otro fuera, entonces la distancia es la euclída más la constante 2.



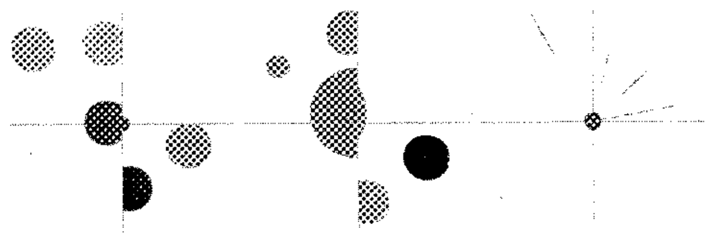
Tierra-mar Meseta Toro llano

(11) **Métrica toro llano**. Es la métrica inducida por la métrica euclídea en $\mathbb{R}^2$ en el cociente que define el toro llano (con lados de longitud 20), es decir, el conjunto

cociente de la relación $(x, y) \sim (x+10, y) \sim (x-10, y) \sim (x, y+10) \sim (x, y-10)$.

(12) **Métrica puerta**. La interpretación de esta métrica es la siguiente: consideremos el plano dividido en dos partes, la de puntos con primera coordenada positiva o nula, y la de puntos con primera coordenada negativa. Una barrera separa estas dos partes y sólo puede franquearse por una puerta situada en el origen de coordenadas. La distancia entre dos puntos situados en la misma parte es su distancia euclídea. Si estan en pares distintas, entonces la distancia es la misma que la distancia de correos, es decir, la suma de las distancias euclídeas de cada punto al origen.

(13) **Métrica tira perdida**. Supongamos que tenemos dividido el plano como en la métrica anterior. La distancia entre dos puntos (x_1, y_1) con $x_1 < 0$ y (x_2, y_2) con $x_2 \geq 0$, es la distancia euclídea entre (x_1, y_1) y $(x_2 + 1, y_2)$. Es decir, es como si hubiéramos suprimido la tira de puntos (x, y) con $0 \leq x < 1$ y después hubiéramos vuelto a juntar los trozos restantes mediante una traslación.



Puerta Tira perdida Radial

(14) **Métrica radial.** Recibe también el nombre de métrica de los ferrocarriles franceses, aunque también podría llamarse métrica del cartero inteligente, ya que, siguiendo la interpretación de la métrica de correos, la distancia entre dos puntos es la que recorre una carta que va desde un punto a otro con la salvedad de que si el cartero pasa por el punto del destinatario en su camino hacia la central de correos, entonces, inteligentemente, entrega la carta sin necesidad de llevarla a la central.

3. De un espacio métrico a una geometría abstracta

3.1 Segmentos asociados a un espacio métrico. Sea (X, d) un espacio métrico. Vamos a asociar a este espacio métrico una geometría abstracta. El primer paso para definir esta geometría abstracta es definir el concepto de segmento.

Definición 6 Sea (X, d) un espacio métrico y sean $x, z \in X$. El conjunto de puntos del espacio métrico para los cuales se cumple con respecto a x, z, no la desigualdad triangular, que ya sabemos es cierta, sino la igualdad triangular, se llama segmento de extremos x, z y se denota por $C_{xz} = \{y \in X / d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)\}$.

Algunos ejemplos:

(1) $(\mathbb{R}, |\ |)$. El segmento de extremos x, z es el intervalo $[x, z]$.

(2) $(\mathbb{R}^2, d_2)$. El segmento de extremos x, z es $\{tx + (1-t)z / t \in [0, 1]\}$.

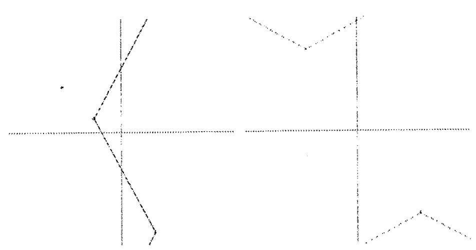
(3) $(\mathbb{R}^2, d_1)$. El segmento de extremos x, z es el rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados y que tiene por vértices los puntos x, z. El rectángulo puede ser degenerado, es decir, tener área nula. Por ejemplo $C_{(0,0),(1,0)} = [0, 1] \times \{0\}$. Este ejemplo sirve para ilustrar el hecho de que pares de puntos diferentes definen el mismo segmento. Dados cualquier par de puntos de coordenadas $(x_1, x_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $C_{(x_1,x_2)(z_1,z_2)} = C_{(x_1,z_2)(z_1,x_2)}$.

(4) $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. El segmento de extremos x, z es el rombo de lados paralelos a las bisectrices de los ejes coordenados y que tiene por vértices los puntos x, z. Igual que antes, el rombo puede ser degenerado. $C_{(0,0)(1,1)} = \{(t, t)/t \in [0, 1]\}$.

(5) En el espacio métrico discreto, los segmentos sólo constan de sus extremos. $C_{xz} = \{x, z\}$.

(6) En la esfera S^2 con la métrica esférica (o sea, el espacio métrico asociado a la esfera como variedad riemanniana), los segmentos son trozos de círculo máximo. Dados dos puntos no antipodales, existe un único círculo máximo que pasa por ellos. El segmento es entonces el trozo de menor longitud de los dos en que el círculo queda dividido por los dos puntos. Cuando los extremos son antipodales el segmento es toda la esfera. Este es un ejemplo que ilustra el hecho de que puede existir una cantidad infinita de pares de puntos que definen el mismo segmento. Todo par de puntos antipodales define el mismo segmento.

(7) En el toro plano se pueden encontrar, entre otros más comunes, los siguientes tipos de segmentos



3.2 Propiedades de los segmentos. Vamos a estudiar algunas de las propiedades que verifican los segmentos asociados a un espacio métrico.

Proposición 1 *Los extremos de un segmento son puntos del segmento, es decir,* $x, z \in C_{xz}$.

Proposición 2 *Simetría respecto a los extremos,* $C_{xz} = C_{zx}$.

Proposición 3 *Los segmentos son subconjuntos cerrados respecto a la topología asociada al espacio métrico.*

Demostración: Dados dos puntos $x, z \in X$, definimos la función $f_{xz} : X \to \mathbb{R}$ por $f_{xz}(y) = d(x,y)+d(y,z)-d(x,z)$. Esta función es continua por serlo la aplicación distancia. El segmento $C_{xz} = (f_{xz})^{-1}(\{0\})$ y por lo tanto es cerrado. ∎

Proposición 4 *Transitividad. Las condiciones* $w \in C_{xz}, y \in C_{xw}$ *son equivalentes a* $w \in C_{yz}, y \in C_{xz}$.

Demostración: Supongamos que $w \in C_{xz}, y \in C_{xw}$. Esto quiere decir que

$$d(x,w) + d(w,z) = d(x,z), \qquad d(x,y) + d(y,w) = d(x,w).$$

Substituyendo la segunda ecuación en la primera tenemos que

$$d(x,y) + d(y,w) + d(w,z) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Por lo tanto, $d(y,w) + d(w,z) \leq d(y,z)$. Por la desigualdad triangular, se tiene que $w \in C_{y,z}$, y de aquí se deduce que $y \in C_{xz}$. El recíproco es análogo. ∎

Proposición 5 *El diámetro del segmento definido por dos puntos es la distancia entre esos dos puntos.*

Demostración: Sean $x, z \in X$ y sean $y, w \in C_{xz}$. Por la desigualdad triangular sabemos que $d(y,w) \leq d(w,z) + d(z,y)$ y $vd(y,w) \leq d(y,x) + d(x,w)v$. Sumando y ordenando convenientemente los términos,

$$2d(y,w) \leq d(z,w) + d(w,x) + d(z,y) + d(y,x).$$

Ahora bien, como $y, w \in C_{xz}$, entonces $2d(y,w) \leq d(x,z) + d(x,z) = 2d(x,z)$. Por lo tanto el diámetro es menor o igual que $d(x,z)$. Como $x, z \in C_{xz}$, entonces el diámetro es igual a $d(x,z)$. ∎

Además el punto más alejado de un extremo es el otro extremo.

Proposición 6 *Si $y \in C_{xz}$ es tal que $d(x,y) = d(x,z)$, entonces $y = z$.*

Demostración: Como $y \in C_{xz}$, entonces $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$ y como $d(x,y) = d(x,z)$, entonces $d(y,z) = 0$. ∎

La intersección de dos segmentos que tienen un extremo común no siempre es otro segmento. Un contraejemplo a esta afirmación es la siguiente métrica en el plano, que llamaremos métrica con el origen alejado, $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$d(x,y) = \begin{cases} d_1(x,y) & \text{si } x \neq (0,0) \neq y \\ \max\{2, d_1(x,y)\} & \text{si } (x \neq (0,0) = y) \text{ ó } (x = (0,0) \neq y) \\ 0 & \text{si } x = (0,0) = y \end{cases} .$$

Para esta métrica se tiene que si $x = (-1,-1), y = (\frac{1}{2}, 2)$ y $z = (2, \frac{1}{2})$ entonces $C^d_{xy} = C^{d_1}_{xy}, C^d_{xz} = C^{d_1}_{xz}$. La intersección de estos dos segmentos es $C^d_{xy} \cap C^d_{xz} = C^{d_1}_{xw}$, donde $w = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sin embargo, es fácil comprobar que $(0,0) \notin C^d_{xw}$, luego $C^d_{xy} \cap C^d_{xz} \neq C^d_{xw}$.

Proposición 7 *Si $y \in C_{xz}$, entonces $C_{xy} \cup C_{yz} \subseteq C_{xz}$.*

Demostración: Sea $w \in C_{xy}$, entonces $d(x,w) + d(w,y) = d(x,y)$. La desigualdad triangular implica que $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z) \leq d(x,w) + d(w,z)$. Luego $d(x,w) + d(w,y) + d(y,z) \leq d(x,w) + d(w,z)$. Por lo tanto, $d(w,y) + d(y,z) \leq d(w,z)$. Esto implica que $d(w,y) + d(y,z) = d(w,z)$. Esto permite comprobar que $d(x,w) + d(w,z) = d(x,w) + d(w,y) + d(y,z) = d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$. Es decir, $w \in C_{xz}$. ∎

La igualdad no es cierta en general. Por ejemplo, no se cumple en el plano con la métrica del taxi. Pero lo que sí que es cierto es que la igualdad implica la inyectividad de la función distancia a uno de los extremos.

Proposición 8 *La condición 1) implica la condición 2).*

1) Para todo $x, z \in X$ y para todo $y \in C_{xz}$ se tiene que $C_{xy} \cup C_{yz} = C_{xz}$.

2) Para todo $x, z \in X$ la aplicación $d(x, \ ) : C_{xz} \to \mathbb{R}$ es inyectiva.

Demostración: $1) \Rightarrow 2)$. Supongamos que $y_1, y_2 \in C_{xz}$ son tales que $d(x, y_1) = d(x, y_2)$. Como $C_{xy_1} \cup C_{y_1z} = C_{xz}$, entonces $y_2 \in C_{xy_1}$ o $y_2 \in C_{y_1z}$. En el primer caso tendríamos que $d(x,y_2) + d(y_2,y_1) = d(x,y_1)$, luego $y_1 = y_2$. Análogo en el otro caso. ∎

La equivalencia no es cierta. Basta considerar la métrica de la recta real con el cero alejado. Pero si tenemos una métrica para la cual todos los segmentos son conjuntos conexos, en este caso sí que las dos condiciones son equivalentes.

Proposición 9 *Sea (X, d) un espacio métrico para el cual todos los segmentos son conjuntos conexos, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) Para todo $x, z \in X$ y para todo $y \in C_{xz}$ se tiene que $C_{xy} \cup C_{yz} = C_{xz}$.

2) Para todo $x, z \in X$ la aplicación $d(x, \ ) : C_{xz} \to \mathbb{R}$ es inyectiva.

Demostración: Sólo tenemos que probar que 2) implica 1). Si C_{xz} es conexo, entonces $d(x, \ ) : C_{xz} \to [0, d(x, z)]$ es una biyección. Sea $w \in C_{xz}$ y supongamos primero que $d(x, w) < d(x, y)$, vamos a demostrar que $w \in C_{xy}$. Como también la aplicación $d(x, \ ) : C_{xy} \to [0, d(x, y)]$ es una biyección entonces existe $t \in C_{xy}$ tal que $d(x, t) = d(x, w)$. Como resulta que $t \in C_{xz}$, entonces se tiene $t = w$ aplicando la Proposición 6. ∎

Proposición 10 *Si $y \in C_{xz}$, entonces $C_{xy} \cap C_{yz} = \{y\}$.*

Demostración: Obviamente $y \in C_{xy} \cap C_{yz}$. Sea $t \in C_{xy} \cap C_{yz} \subseteq C_{xz}$, entonces se tienen las siguientes igualdades

$$d(x, t) + d(t, y) = d(x, y) \text{ y } d(y, t) + d(t, z) = d(y, z).$$

Sumando todas estas expresiones, y teniendo en cuenta que $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$ se tiene que $d(x, t) + 2d(t, y) + d(t, z) = d(x, z)$, y como $t \in C_{xz}$, entonces $2d(t, y) = 0$, luego $t = y$. ∎

Una última propiedad que respeta la intuición.

Proposición 11 $C_{xy} = C_{xz} \iff y = z$.

Demostración: Si $C_{xy} = C_{xz}$ entonces $y \in C_{xz}$ y $z \in C_{xy}$. Pero también $z \in C_{yz}$, luego $z \in C_{xy} \cap C_{yz}$. Por la propiedad anterior, esta intersección se reduce a un punto, y, luego $z = y$. ∎

3.3 Líneas asociadas a un espacio métrico Después de la definición y del estudio de los segmentos asociados a un espacio métrico, podemos ya definir la geometría abstracta asociada al mismo.

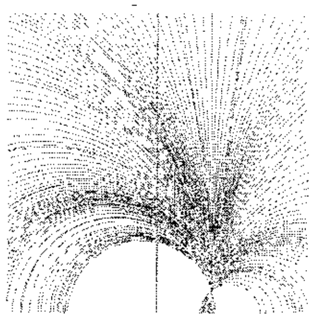
Proposición 12 *Sea* (X, d) *un espacio métrico y sean* $x, z \in X$. *Definimos* L_{xz} *como* $L_{xz} = C_{xz} \cup \{y \in X / x \in C_{yz}\} \cup \{y \in X / z \in C_{xy}\}$. L_{xz} *se dirá línea que pasa por* x *y* z.

La familia de líneas de la geometría abstracta es $\mathcal{L} = \{L_{xz}/x, z \in X, x \neq z\}$. Consecuencia de la propia definición es que $y \in L_{xz} \iff x \in L_{yz} \iff z \in L_{xy}$. Es en efecto una geometría abstracta ya que cumple, por su propia definición, que $x, z \in C_{xz} \subset L_{xz}$.

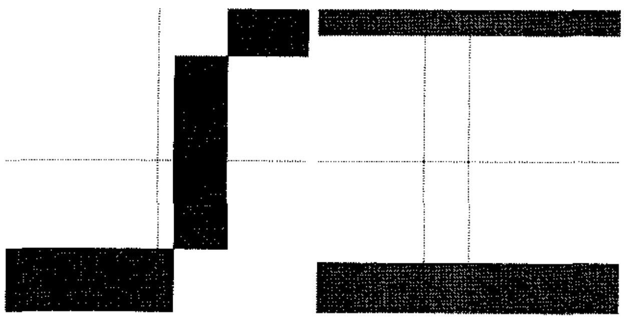
Algunos ejemplos:

(1) $(\mathbb{R}^2, d_2)$. La línea definida por x, z coincide con la línea recta que pasa por esos dos puntos. Recuperamos, por lo tanto, la geometría euclídea.

(2) En el plano de Poincaré la línea definida por x, z es la semicircunferencia que pasa por esos dos puntos y que está centrada en el eje de abcisas. Recuperamos, por lo tanto, la geometría hiperbólica. En la figura siguiente podemos observar el haz de líneas del plano de Poincaré que pasan por un mismo punto.

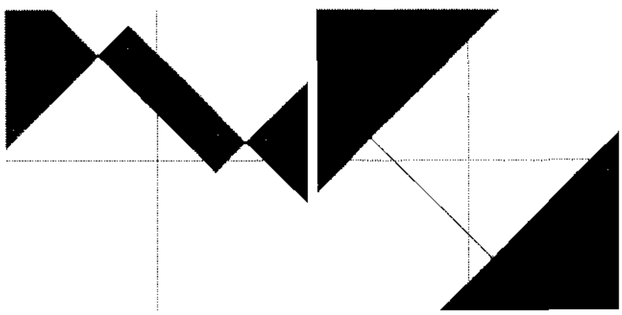


(3) $(\mathbb{R}^2, d_1)$. Las líneas son diferentes según el segmento entre x y z sea o no un rectángulo degenerado. En la siguiente figura se representan los dos casos posibles.



Este ejemplo ilustra el hecho de que la geometría abstracta asociada a un espacio métrico no es, en general, una geometría de incidencia.

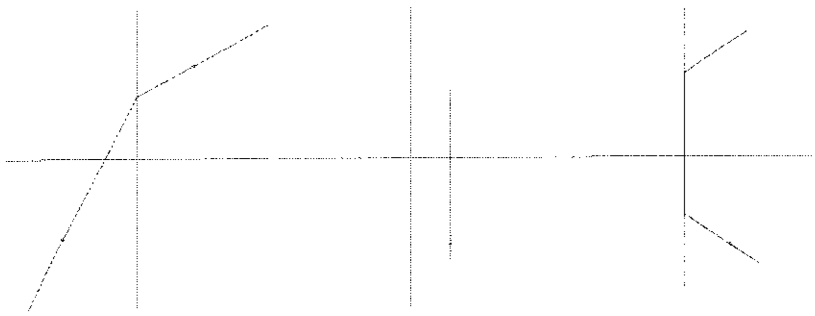
(4) $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. La situación es similar a la anterior.



(5) En el espacio métrico discreto, las líneas sólo constan de los dos puntos que las definen. $L_{xz} = \{x, z\}$.

(6) En la esfera S^2 con la métrica esférica, las líneas son círculos máximos cuando los dos puntos no son antipodales. Cuando los puntos son antipodales la línea es toda la esfera.

(7) En $\mathbb{R}^2$ con la métrica que hemos denominado tierra-mar, las líneas que unen dos puntos pueden ser de los tipos siguientes:



Nótese que cuando los dos puntos que definen la línea están ambos en el "mar", entonces la línea es siempre un subconjunto acotado.

La pregunta que se puede ahora formular es la siguiente: ¿Para qué espacios métricos se cumple que la geometría abstracta es de incidencia?

Podemos dar la siguiente condición necesaria que tienen que cumplir los espacios métricos que tienen asociadas geometrías abstractas que son de incidencia. Esta condición se expresa en términos de los segmentos asociados.

Proposición 13 *Si la geometría asociada es de incidencia entonces para todo $x, z \in X$ y para todo $y \in C_{xz}$ se tiene que $C_{xy} \cup C_{yz} = C_{xz}$.*

Demostración: Sean $x, z \in X$ y $y, w \in C_{xz}$. Vamos a demostrar que $w \in C_{xy} \cup C_{yz}$. Las líneas L_{xy} y L_{xw} se cortan en z. En efecto, $z \in L_{xy}$ ya que $y \in C_{xz}$. De la misma forma $z \in L_{xw}$. Luego las líneas L_{xy} y L_{xw} se cortan en x y en z. Como la geometría es de incidencia, entonces las dos líneas son la misma. Por lo tanto, $w \in L_{xy}$. Esto quiere decir que o bien $w \in C_{xy}$, con lo que ya habríamos acabado la demostración, o bien $y \in C_{xw}$ o bien $x \in C_{wy}$. En el segundo caso, tendríamos $w \in C_{xz}, y \in C_{xw}$. Por la propiedad transitiva, es equivalente a que $w \in C_{yz}, y \in C_{xz}$, con lo que hemos acabado la demostración. El tercer caso lo dejamos aparcado por el momento. Por otra parte, también podemos afirmar que las líneas L_{yz} y L_{wz} se cortan en x. Como la geometría es de incidencia,entonces las dos líneas son la misma. Por lo tanto, $w \in L_{yz}$. Esto quiere decir que o bien $w \in C_{yz}$, con lo que ya habríamos acabado la demostración, o bien $z \in C_{yw}$, que se resuelve otra vez por simetría, o bien $y \in C_{wz}$. Por lo tanto sólo nos queda estudiar el caso $x \in C_{wy}$ y $y \in C_{wz}$. Para este caso tenemos que se cumplen las siguientes igualdades $d(w,x)+d(x,y) = d(w,y)$, $d(w,y)+d(y,z) = d(w,z), d(x,y)+d(y,z) = d(x,z), d(x,w)+d(w,z) = d(x,z)$. Con la primera y la segunda se deduce que $d(w,x) + d(x,y) + d(y,z) = d(w,z)$, o lo que es lo mismo, aplicando la tercera, que $d(w,x)+d(x,z) = d(w,z)$. Aplicando ahora la cuarta, se llega a que $d(w,x) + d(x,w) + d(w,z) = d(w,z)$, o sea, que $d(x,w) = 0$. Por lo tanto $w = x$ y así, $w \in C_{xy} \cup C_{yz}$. ∎

Un contraejemplo que demuestra que la condición es sólo necesaria es la métrica del ascensor. La geometría asociada no es de incidencia pero sí que cumple la condición anterior. Volveremos más adelante a este contraejemplo.

4. De una variedad Riemanniana a un espacio métrico

En la teoría de variedades riemannianas hay un resultado que se suele contar en cualquier curso introductorio que relaciona la métrica de Riemann con una función distancia. Este resultado es uno de los apartados de lo que se conoce como teorema de Hopf-Rinow. Veamos cómo se construye la función distancia.

Si g es una métrica Riemanniana y denotamos por $||v||$ la norma del vector tangente, entonces se puede definir la longitud de curvas en la variedad mediante un proceso de integración: $\ell(\sigma) = \int_a^b ||\sigma'(t)||dt$. Una vez sabemos calcular la longitud de una curva, ya podemos definir la distancia entre puntos.

Dados dos puntos $p, q \in M$, consideremos todas las curvas diferenciables a trozos que unen p y q y denotemos este conjunto por $\Omega(p,q)$. Sabemos calcular las longitudes de estas curvas: $\ell(\sigma) := \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\sigma'(t)||dt$, donde $[t_i, t_{i+1}]$ es un segmento diferenciable de la curva. Pues bien, definimos la distancia entre los dos puntos como el ínfimo de todas esas longitudes: $d_g(p,q) := \inf_{\sigma\in\Omega(p,q)} (\ell(\sigma))$.

4.1 Teorema de Hopf-Rinow. El primero de los resultados que probaron Hopf y Rinow enuncia que

Proposición 14 *d_g es una función distancia en M.*

Una demostración completa puede encontrarse en [dC] página 146.

Como consecuencia se tiene que en una variedad Riemanniana podríamos definir dos topologías distintas. La primera es la definida por su estructura de variedad diferenciable, la topología inducida por las cartas, es decir por ser un conjunto tal que todo punto tiene un entorno que puede modelarse con un trozo de $\mathbb{R}^n$. La topología usual en $\mathbb{R}^n$ se "traslada" de esta manera a la variedad.

Por otra parte, acabamos de demostrar que la métrica Riemanniana induce una función distancia en M. Podemos considerar, por lo tanto, el espacio métrico (M, d_g) y como espacio métrico, tiene una topología asociada.

Pues bien, el segundo de los resultados que afirma el teorema de Hopf-Rinow es que ambas topologías coinciden.

Proposición 15 *La topología asociada a la métrica d_g es la misma que la topología inicial de la variedad diferenciable M.*

Entre otros resultados el teorema también afirma que las siguientes condiciones son equivalentes

- El espacio métrico (M, d_g) es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy en él es convergente.
- Cualquier geodésica en (M, g) puede ser extendida arbitrariamente, es decir, el conjunto de argumentos t puede ser extendido a todo $\mathbb{R}$.

Nota: en el enunciado anterior se supone que las geodésicas están parametrizadas por la longitud de arco.

El último de los resultados nos será también de interés: Si el espacio métrico (M, d_g) es completo entonces, cualquier par de puntos arbitrarios $p, q \in M$, puede ser unido por una geodésica σ tal que $\ell(\sigma) = d_g(p, q)$.

Esto quiere decir que el ínfimo que se utiliza en la definición de la distancia d_g es realmente un mínimo, es decir, que la distancia se realiza como longitud de una curva y que esta curva es una geodésica. Es por esto que a la distancia d_g se le llama también la distancia geodésica de (M, g).

Después de todo lo visto cabría preguntarse también cuándo un espacio métrico (M, d), sobre una variedad diferenciable, M, es el espacio métrico definido por una métrica Riemanniana, g. Es decir, si existe una métrica Riemanniana tal que $d = d_g$.

Una de las primeras condiciones que debe cumplir la distancia d es que la topología asociada sea la misma que la topología de la variedad.

Otra, es que esa distancia pueda definirse como ínfimo de longitudes de curvas. Esta condición es la que ha dado pie a definir una subclase de espacios métricos: los espacios métricos de caminos.

4.2 Espacios métricos de caminos. Sea (X, d) un espacio métrico y consideremos el conjunto de todas las curvas continuas en X, es decir $\mathcal{C} := \{\sigma : [a, b] \to X\}$. Dada cualquiera de estas curvas podemos definir su longitud de la siguiente manera:

$$\ell(\sigma) := \sup(\sum_{i=0}^{n} d(\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1})) : a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n+1} = b\}.$$

Como ejemplo podemos calcular la longitud de $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, una circunferencia, en diferentes métricas. Es un buen ejercicio comprobar que en la métrica del taxi su longitud es 8. Podríamos indicar, por lo tanto, que si en lugar de utilizar la distancia euclídea, aquella en la que para ir de un punto a otro por el camino más corto vamos andando en línea recta, utilizásemos un taxi para ir de un punto a otro, entonces la humanidad no hubiera inventado el número π.

En la métrica del ajedrez la longitud es $4\sqrt{2}$. En la del ascensor o en la de correos, la longitud es infinita.

Bromas aparte, algunas propiedades fundamentales de esta definición son las siguientes:

• la longitud de cualquier curva es siempre ≥ 0 y $\ell(\sigma) = 0$ si y sólo si σ es una curva constante.

• Si σ y τ son dos curvas que se pueden unir en otra curva α, entonces $\ell(\alpha) = \ell(\sigma) + \ell(\tau)$.

• Esta definición no depende de la parametrización de σ sino de su conjunto imagen. Si ϕ es un homeomorfismo de un intervalo I' sobre $I = [a, b]$, entonces $\ell(\sigma \circ \phi) = \ell(\sigma)$ ya que ϕ es estrictamente monótona y transforma particiones finitas de I' en particiones finitas de I.

Una vez ya tenemos cómo definir longitudes de curvas, podemos hacer lo mismo que se hizo para definir la función distancia asociada a una métrica Riemanniana, para definir una nueva función distancia, que denotaremos por d_ℓ con el subíndice ℓ por ser una distancia que proviene de la noción de longitud de curvas:

$$d_\ell(p, q) := \inf_{\sigma \in \Omega(p,q)} (\ell(\sigma)),$$

donde ahora $\Omega(p, q)$ es el subconjunto de $\mathcal{C}$ de curvas que unen p con q.

¿Es realmente d_ℓ una métrica? En general no lo es, pero por muy poco. Demostrar que d_ℓ verifica los axiomas de la simetría de la distancia y la desigualdad triangular es análogo a demostrar lo mismo para la función distancia, d_g, asociada a una métrica Riemanniana, g. La única diferencia es el llamado axioma de unicidad, que es el que afirma que si la distancia entre dos puntos es 0, entonces los dos puntos son el mismo. En el caso de la distancia d_g, esto se demostraba aplicando resultados previos propios de variedades Riemannianas. En este caso, el axioma de unicidad se deduce directamente de la definición de d_ℓ.

En efecto, si $d_\ell(p, q) = 0$ esto quiere decir que para todo $\epsilon > 0$ existe una curva que une x con y tal que su longitud es menor que ϵ. Ahora bien, dada cualquier curva continua que una dos puntos p, q, su longitud es mayor que $d(p, q)$. Esto es así porque si tomamos la partición trivial $a = t_0 < t_1 = b$, entonces la longitud de la curva, que es el supremo para todas las particiones, será mayor que $d(p, q)$. Por lo tanto, $d(p, q) \leq d_\ell(p, q)$. Luego, tenemos que para todo $\epsilon > 0$, $d(p, q) < \epsilon$, es decir $d(p, q) = 0$ y como d sí que es una función distancia, entonces, $p = q$.

El único problema que tiene la función d_ℓ es que puede no estar definida para algunos pares de puntos. Puede ocurrir que para toda curva, σ, que una dos puntos determinados, p, q,

$$\sup\{(\sum_{i=0}^{n} d(\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1})) : a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n+1} = b\}$$

no exista. Es decir que la longitud de toda curva que una p con q sea infinita y por lo tanto la distancia entre p y q sería también infinita. Más adelante veremos un ejemplo en que esto ocurre.

Es por esto que diremos que d_ℓ es una pseudométrica, en lugar de decir que es una métrica. Esta pega que tiene d_ℓ no impide definir también la noción de bola abierta, de subconjunto abierto y de topología asociada.

Nótese que siempre tenemos la desigualdad $d \leq d_\ell$. Sin embargo, la igualdad no siempre es cierta. Más adelante veremos un ejemplo de esta situación.

Definición 7 Un espacio métrico (X, d) se dice que es un espacio métrico de caminos (*path metric space*) si la distancia entre cualquier par de puntos es igual al ínfimo de las longitudes de la curvas que unen los puntos, es decir, si $d = d_\ell$.

Ejemplos

(1) El plano euclídeo es un espacio métrico de caminos. La distancia entre dos puntos es efectivamente la longitud del segmento de recta comprendido entre los dos puntos, y esta longitud es la mínima. De la misma manera, $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea, la del taxi o la del ajedrez son espacios métricos de caminos.

(2) También lo es $\mathbb{R}^2$ con la métrica del ascensor.

(3) Si le quitamos ahora un segmento al plano euclídeo, el subespacio métrico resultante ya no es un espacio métrico de caminos. El subespacio de $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea, $\mathbb{R}^2 - 0 \times [-1, 1]$ no es un espacio métrico de caminos. El ínfimo de las longitudes de las curvas entre $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ es$2\sqrt{2}$.

(4) La esfera como subespacio métrico del espacio euclídeo tridimensional no es un espacio métrico de caminos. Sí que lo es con la métrica inducida por su estructura riemanniana, es decir, por la primera forma fundamental.

Una caracterización de los espacios métricos de caminos que es bastante intuitiva:

Proposición 16 *Sea (X, d) un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) Para cualquier par de puntos arbitrarios $x, y \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, existe *un z tal que* $\max(d(x,z), d(z,y)) \leq \frac{1}{2}d(x,y) + \epsilon$.

2) Para cualquier par de puntos arbitrarios $x, y \in X$ y para todo $r_1, r_2 > 0$ con $r_1 + r_2 \leq d(x,y)$ se tiene que $d(B(x;r_1), B(y;r_2)) \leq d(x,y) - r_1 - r_2$, donde $d(B_1, B_2) = \inf_{x' \in B_1, y' \in B_2} d(x', y')$.

Todo espacio métrico de caminos tiene estas propiedades, y recíprocamente, si (X,d) es un espacio métrico completo y satisface (1) o (2), entonces es un espacio métrico de caminos.

Esta caracterización tiene implicaciones sobre los segmentos del espacio métrico:

Proposición 17 *Sea (X,d) un espacio métrico de caminos completo, entonces todos los segmentos son subconjuntos conexos.*

4.3 Espacios métricos de caminos y métricas equivalentes. La propiedad de ser un espacio métrico de caminos no es una característica de la clase de métricas equivalentes. Un ejemplo sencillo es el siguiente: La recta real con la métrica usual, $d_u(x,y) = |x-y|$, es un espacio métrico de caminos.

Consideremos ahora la siguiente función distancia $d(x,y) := |x-y|^{\frac{1}{2}}$.

Es bien fácil demostrar que en efecto verifica los axiomas de espacio métrico. Veamos por ejemplo la desigualdad triangular: Por una parte sabemos que

$$\begin{aligned} |x-z| &\leq |x-y| + |y-z| \\ &= (|x-z|^{\frac{1}{2}})^2 + (|x-y|^{\frac{1}{2}})^2 \\ &\leq (|x-z|^{\frac{1}{2}})^2 + (|x-y|^{\frac{1}{2}})^2 + 2|x-z|^{\frac{1}{2}}|x-y|^{\frac{1}{2}} \\ &= (|x-z|^{\frac{1}{2}} + |x-y|^{\frac{1}{2}})^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|x-z|^{\frac{1}{2}} \leq |x-y|^{\frac{1}{2}} + |y-z|^{\frac{1}{2}}$.

La bolas para esta métrica son las siguientes $B(x;\epsilon) =]x - \epsilon^{\frac{1}{2}}, x + \epsilon^{\frac{1}{2}}[$. Por lo tanto la topología es la misma que la topología usual, luego d y d_u son métricas equivalentes. Sin embargo esta nueva métrica no es una métrica de caminos, cosa que se puede comprobar porque no verifica la condición (1) de la propiedad anterior.

En efecto, tomemos $x = 0, y = 1$. La distancia entre estos puntos es $|0-1|^{\frac{1}{2}} = 1$. No existe z tal que $\max(\sqrt{z}, \sqrt{1-z}) \leq \frac{1}{2} + \epsilon$ si ϵ es suficientemente pequeño, por ejemplo menor que $\frac{1}{4}$.

La pseudométrica d_ℓ asociada a esta nueva métrica es la pseudométrica discreta: la distancia entre dos puntos distintos es infinita. La topología asociada a la pseudométrica d_ℓ es la topología discreta que no es la misma que la topología usual. Luego este ejemplo indica que el proceso que a partir de una métrica d pasa a la pseudométrica d_ℓ puede cambiar la topología.

Como ejemplo vamos a calcular la longitud de la curva $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\sigma(t) = t$. Este ejemplo nos indicará cuál es el problema de la métrica. Si tomamos la partición $\{0 = t_0 < t_1 = 1\}$ entonces la expresión

$$(\sum_{i=0}^{n} d(\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1})) : a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n+1} = b\},$$

se reduce a $d(0,1) = \sqrt{1} = 1$.

Si tomamos ahora la partición $\{0 < \frac{1}{2} < 1\}$, ahora la expresión se traduce en $\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$. Si tomamos ahora la partición $\{0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1\}$, ahora la expresión se traduce en $4\sqrt{\dfrac{1}{4}} = 2 > \sqrt{2} > 1$.

En general, si tomamos una partición regular de norma $\dfrac{1}{2^{2n}}$, entonces la expresión resulta ser $2^{2n}\dfrac{1}{2^n} = 2^n$. Cuando hacemos tender n a infinito, es decir, cuando hacemos tender a cero la norma de la partición, el valor 2^n tiende a infinito. Luego no existe el supremo buscado. La longitud de σ es infinita.

4.4 Espacios métricos de caminos y teorema de Hopf-Rinow. Para poder enunciar el teorema necesitamos primero definir el concepto de curva geodésica en un espacio métrico.

Definición 8 Una curva $\sigma : I \to X$ se llama *geodésica minimizante* si para todo $t, t' \in I$ es $d(\sigma(t), \sigma(t')) = |t - t'|$.

Una geodésica en X es una curva cuya restricción a cualquier intervalo suficientemente pequeño es una geodésica minimizante.

El siguiente resultado es el que demuestra que los resultados obtenidos por Hopf-Rinow en variedades Riemannianas son en realidad propios de una clase de espacios métricos más que de las variedades riemannianas.

Teorema 18 [Gr] Teorema de Hopf-Rinow para espacios métricos de caminos. *Sea* (X, d) *un espacio métrico de caminos, completo y localmente compacto. Entonces*

1) La bolas cerradas son compactas, o equivalentemente todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.

2) Todo par de puntos puede ser unido por una geodésica minimizante (es decir, (X, d) *es un espacio de longitud).*

Notas: La geodésica minimizante no necesariamente es única. Por ejemplo, en la métrica del taxi, cualquier curva que una los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ y cuyas funciones coordenadas sean crecientes es una geodésica minimizante.

Otro ejemplo clásico es la esfera. Dos puntos antipodales pueden unirse por infinitas geodésicas minimizantes: todos los semicírculos máximos que los unen.

Una consecuencia de este teorema de Hopf-Rinow es que en los espacios métricos de caminos completos y localmente compactos dados dos puntos, x, y, el segmento que definen C_{xy} es un subconjunto conexo. En efecto, el segmento es la unión de todas las geodésicas minimizantes que unen x con y. Éstas forman una familia de subconjuntos conexos con intersección no vacía, luego su unión es también un subconjunto conexo.

Es tal vez más importante que la propia demostración del resultado el hecho de comprobar que las hipótesis son exactamente las necesarias, es decir, que no sobra ninguna de ellas.

Por ejemplo, no sobra la hipótesis de completitud porque el plano excepto el origen, con la topología usual, es un espacio métrico de caminos, localmente compacto, pero no hay ninguna geodésica minimizante que una los puntos $(-1, 0)$ y el $(1, 0)$.

No sobra tampoco la hipótesis de ser localmente compacto porque se puede comprobar que $\mathbb{R}^2$ con la mètrica del ascensor es un espacio métrico de caminos, completo, pero en el que las bolas cerradas centradas en el eje de abcisas no son compactas.

Por último, no sobra tampoco la hipótesis de ser espacio métrico de caminos porque $\mathbb{R}$ con la métrica $d(x, y) := |x - y|^{\frac{1}{2}}$, equivalente a la usual, es decir, induce la misma topología, es localmente compacto, es completo, pero, como hemos visto en el apartado de espacios métricos de caminos y métricas equivalentes, la longitud de cualquier curva no trivial es infinita. Por lo tanto no hay geodésicas minimizantes que unan dos puntos distintos.

Bibiografía

[Bl] L.M. Blumenthal, *Theory and applications of Distance Geometry*, Chelsea Pub. Company, 1970.

[Bh] M.R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Comprehensive Studies in Mathematics, vol. 319, Springer, 1999.

[dC] M.P. doCarmo, *Geometria riemanniana*, Segunda edición, IMPA, 1988.

[Gr] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1999.

[Ma] K. Maurin, *The Riemann Legacy. Riemannian ideas in Mathematics and Physics*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, 1997.

[MP] R.S. Millman and G.D. Parker, *Geometry. A metric approach with models*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, corrected second printing, 1993.

[Ri] B. Riemann, *Sobre los axiomas en los que se basa la geometría*, 1856.