¿Me concede usted este baile? Una introducción a los modelos de asignación bilateral

por

Inés Macho-Stadler[1], Universitat Autònoma de Barcelona

1. Introducción

En muchos mercados del mundo real, no existe a priori una división de agentes entre oferentes y demandantes. Pensemos en el mercado de divisas o en la bolsa. En estos mercados, los mismos individuos pueden comprar o vender según les convenga. Los precios juegan el papel de hacer coincidir los deseos de compra y de venta. Hay individuos que pueden desear vender a ciertos precios, y sin embargo serán compradores a otros. Además, en los mercados la relación entre los participantes es anónima, el bien se compra a cierto precio y el comprador o vendedor es indiferente de quién es su interlocutor. Este tipo de mercados ha sido estudiado extensamente en la literatura, utilizando modelos económicos de demanda y oferta en función de los precios.

[1]Deseo agradecer a Ester Camiña, Jordi Massó, David Pérez Castrillo y a Antonio Rodríguez Romero su ayuda en la redacción de este documento, y a Raúl Ibáñez Torres y Marta Macho Stadler la invitación a participar en el seminario "Un paseo por la Geometría" del 2002.

En otros mercados no se da esta característica porque las dos partes del mercado están claramente separadas. Casos en que los participantes pertenecen a dos conjuntos disjuntos son el mercado de trabajo, en el que participan como demandantes las empresas y como oferentes los trabajadores; el sistema educativo con universidades y estudiantes; las subastas en las que los participantes están divididos en compradores y vendedores; o el mercado del matrimonio en el que los participantes pertenecen a dos grupos a los que llamaremos hombres y mujeres. Todos estos ejemplos tienen un marcado aspecto bilateral.

Los modelos de asignación bilateral estudian la interacción de estos dos conjuntos distintos de agentes. Estas notas presentan el modelo más sencillo de asignación bilateral: un modelo de asignación uno-a-uno, o modelo de emparejamiento. Además supondremos que en el modelo no hay dinero. Un ejemplo de este tipo de mercado es el modelo del matrimonio, que nos va servir para ilustrar el modelo. Para más detalles sobre este modelo véase el libro de Roth y Sotomayor (1990). También presentaremos una aplicación del modelo de asignación uno-a-muchos que se puede utilizar para la asignación de estudiantes a universidades, y discutiremos las características del mecanismo utilizado hasta ahora: las Pruebas de Aptitud para el Acceso a la Universidad.

2. Modelo

En el modelo de emparejamiento participan dos tipos de agentes, que pertenecen a dos conjuntos finitos y disjuntos: el conjunto de los hombres –que denotaremos por M– y el de las mujeres –que denotaremos por W. En el mercado hay n hombres y p mujeres. Formalmente, representaremos por $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ el conjunto de los hombres, y por $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ el conjunto de las mujeres.

Cada individuo tiene preferencias sobre el otro lado del mercado, es decir sobre con quién estar emparejado/a, y sobre permanecer soltero/a. Cada hombre $m \in M$ tiene preferencias que definen un orden estricto (una relación completa y transitiva) sobre el conjunto $W \cup \{m\}$. Por ejemplo, las preferencias del hombre m pueden ser: $P(m) = w_1, w_2, m, w_3, w_4$. Según estas preferencias el hombre m prefiere a la mujer w_1, la segunda mejor opción para él es estar emparejado con w_2, o lo que es lo mismo, su segunda mujer preferida es la mujer w_2. De no estar emparejado con ninguna de estas mujeres, preferiría permanecer soltero (el emparejamiento consigo mismo) a estar emparejado con cualquier otra mujer. Del mismo modo, cada mujer $w \in W$ tiene un orden estricto de preferencias sobre el conjunto $M \cup \{w\}$.

Por ejemplo, uns preferencias posibles son: $P(w) = m_3, w, m_1, m_2$. Según estas preferencias la mujer w ordena a los tres hombres del mercado y la soltería del siguiente modo: prefiere formar pareja con el hombre m_3 y si no prefiere quedarse soltera. Denotaremos por $\mathcal{P} = (P(m_1), ..., P(m_n), P(w_1), ..., P(w_p))$ las preferencias de los individuos. Normalmente, escribiremos sólo el conjunto de hombres (respectivamente, de mujeres) que una mujer (respectivamente, un hombre) prefiere antes de quedarse soltera(o). Así, las preferencias $P(w)$ del ejemplo anterior serán abreviadas a $P(w) = m_3$. Con esta notación podemos definir un mercado bilateral "uno-a-uno": el mercado del matrimonio está descrito por la tripleta $(M, W, \mathcal{P})$.

Definición 1: Una asignación (o emparejamiento) es una función biyectiva $\mu : M \cup W \to M \cup W$ tal que:
(i) $w = \mu(m) \Leftrightarrow m = \mu(w)$.
(ii) Si $\mu(m) \neq m \Rightarrow \mu(m) \in W$. Si $\mu(w) \neq w \Rightarrow \mu(w) \in M$.

La primera parte de la definición se refiere al aspecto bilateral de la relación porque para todo $x \in M \cup W$, $x = \mu^2(x) = \mu(\mu(x))$. La segunda condición exige que no haya parejas con dos personas del mismo lado del mercado. Nótese además que es posible que $\mu(x) = x$, es decir que el agente x esté soltero en μ. Véamos un ejemplo:

Ejemplo 1: Sean los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. En primer lugar, es fácil ver que, dado que el conjunto de hombres es mayor que el de las mujeres, por lo menos un individuo permanecerá soltero. Los siguientes emparejamientos son ejemplos de la definición anterior. Véase que en μ el hombre m_1 está emparejado con la mujer w_4 y el hombre soltero es m_5. En μ', m_1 está emparejado con la mujer w_3 y el hombre soltero es m_3.

$$\mu : \begin{array}{ccccc} w_4 & w_1 & w_2 & w_3 & m_5 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array} \qquad \mu' : \begin{array}{ccccc} w_3 & w_1 & m_3 & w_2 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

Una asignación μ es una propuesta de parejas. Puede ocurrir que estas parejas estén contentas o que deseen cambiar la situación. En este último caso existen dos situaciones diferentes: el caso en el que, por ejemplo, alguien no esta emparejado con su pareja ideal pero ésta está contenta con su actual pareja, y el caso en el que, por ejemplo, dos personas están emparejadas con otros individuos y ambas estarían más contentas juntas. En la primera situación el individuo no puede mejorar, mientras que en la segunda es de esperar que las parejas se rompan y los indiviuos que mejoran se vayan juntos. Por esta razón, los emparejamientos que nos interesan son aquellos en los que no ocurren “separaciones” o “divorcios” ya que no serán una buena previsión de las parejas que se formarán. Por eso, nos ocuparemos ahora de la estabilidad de los emparejamientos. Los individuos deben estar de acuerdo con la pareja que consiguen. Para escribir estas condiciones, utilizamos la notación $y \succ_x z$ para indicar que le individuo x prefiere emparejarse con y que con z. Además, extendemos las preferencias sobre individuos a preferencias sobre las asignaciones y denotaremos por $\mu \succ_x \mu'$ cuando el individuo x prefiera el emparejamiento de la primera regla, es decir cuando $\mu(x) \succ_x \mu'(x)$.

Definición 2: Dado $(M, W, \mathcal{P})$, μ es individualmente racional si, para todo $x \in M \cup W$, la asignación que le corresponde es por lo menos tan buena como estar soltero; es decir, si $\mu(x) \succ_x x$. Si no fuera el caso, este individuo podría bloquear la asignación μ negándose a estar emparejado con quien le asocia μ y prefiriendo permanecer soltero.

De la definición 2 es fácil comprobar que siempre existe una asignación individualmente racional: aquella que asigna a cada agente la soltería. Formalmente, la regla μ que a todo $x \in M \cup W$ asigna, $\mu(x) = x$ es individualmente racional.

Definición 3: La pareja (m, w) bloquea la regla μ si:
(i) $\mu(m) \neq w$, es decir, no están juntos (no están casados), y
(ii) $w \succ_m \mu(m)$ y $m \succ_w \mu(w)$, es decir se prefieren mútuamente a la pareja asignada por la regla.

Definición 4: La asignación μ es estable si no es bloqueada por ningún individuo ni por ninguna pareja.

Ilustraremos estos conceptos utilizando un ejemplo.

Ejemplo 2: Sean los conjuntos de individuos $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, con preferencias

$P(m_1) = w_2, w_1, w_3 \qquad P(w_1) = m_1, m_2, m_3$
$P(m_2) = w_1, w_3, w_2 \qquad P(w_2) = m_3, m_1, m_2$
$P(m_3) = w_1, w_2, w_3 \qquad P(w_3) = m_1, m_3, m_2$

Consideremos la regla de emparejamiento μ, definida por:

$$\mu: \quad \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array}$$

Es fácil comprobar que en μ todas las parejas son individualmente racionales, ya que todos los individuos prefieren estar casados a estar solteros. Sin embargo, μ no es estable: existe al menos una pareja, por ejemplo, la pareja (m_1, w_2) , que bloquea esta asignación.

Consideremos ahora la regla de emparejamiento μ'

$$\mu' : \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{array}$$

Esta regla es una asignación estable. Para comprobarlo, y teniendo en cuenta las preferencias de estos individuos, véase que cualquier pareja que bloquee debe contener a w_3 que es la única mujer que no tiene como pareja al hombre que más le gusta. Por tanto, las parejas que debemos considerar son (m_1, w_3) y (m_2, w_3). Sin embargo, estos dos hombres prefieren la mujer que les asigna la regla que la mujer w_3; en consecuencia no hay ninguna pareja ni ningún individuo que bloquee la asignación μ'.

En un problema de emparejamiento puede haber más de un emparejamiento estable. Denotaremos por $E(M, W, \mathcal{P})$ el conjunto de emparejamientos estables del mercado $(M, W, \mathcal{P})$. Consideremos ahora los emparejamientos estables. La primera pregunta que debemos plantearnos es si existen este tipo de emparejamientos. En el caso del mercado del matrimonio la respuesta es que sí existen (Gale & Shapley, 1962). Pero este resultado tan positivo es sorprendente y en general no se mantiene, es decir puede que no haya emparejamientos estables, en marcos más generales. La existencia en el caso del mercado del matrimonio está íntimamente relacionada con dos características de este modelo. En primer lugar, con el hecho de que el mercado sólo tiene dos lados. En mercados con tres lados, por ejemplo en los que hay hombre, mujer y niño, aunque los emparejamientos sigan siendo uno-a-uno, el conjunto de asignaciones estables puede ser vacío. Este resultado fue probado por Alkan (1986). La existencia también depende de que la asignación es uno-a-uno. Se pueden encontrar ejemplos de mercados con dos lados del tipo “uno-a-muchos” en los que no hay asignaciones estables o de situaciones en las que no hay dos lados separados en el mercado en las que no hay asignaciones estables como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3: Consideremos el problema de hacer compartir habitación a estudiantes de una residencia universitaria con habitaciones de dos camas (“room-mate-problem”). En este problema hay un conjunto de estudiantes $N = \{1, 2, ..., N\}$, N par, y una asignación es una partición de N en parejas.

Cada estudiante i tiene preferencias que ordenan el conjunto $N/\{i\}$. En este ejemplo consideramos que hay sólo cuatro estudiantes: $N = \{a, b, c, d\}$. Sus preferencias son:
$P(a) = b, c, d$ $\quad P(c) = a, b, d$
$P(b) = c, a, d$ $\quad P(d) =$ cualquiera
Con cuatro estudiantes, sólo existen tres emparejamientos posibles:

$$\mu_1: \begin{array}{cc} a & c \\ d & b \end{array}, \qquad \mu_2: \begin{array}{cc} c & a \\ d & b \end{array}, \qquad \mu_3: \begin{array}{cc} b & a \\ d & c \end{array}.$$

De los emparejamiento anteriores, ninguno es estable, ya que μ_1 es bloqueado por (c, a), μ_2 es bloqueado por (b, c), y μ_3 es bloqueado por (a, b).

Respecto al mercado del matrimonio, una forma de demostrar que siempre existe al menos una asignación estable es presentar un algoritmo que siempre encuentra una asignación que satisfaga esta propiedad para cualquier mercado. El algoritmo que presento a continuación, construido por Gale & Shapley (1962) se denomina "algoritmo de aceptación diferida", y corresponde, en cierto modo, a la idea de los bailes de sociedad en los que los hombres piden baile (forman pareja) con las mujeres. En este algoritmo, como en la mejor tradición de los bailes de sociedad, los hombres toman la iniciativa de pedir baile y las mujeres aceptan o rechazan. Por sencillez, el algoritmo es presentado a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 4: En el mercado hay cinco hombres y cuatro mujeres: $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$; $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Sus preferencias son:
$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4$ $\quad P(w_1) = m_2, m_3, m_1, m_4, m_5$
$P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1$ $\quad P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4, m_5$
$P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2$ $\quad P(w_3) = m_5, m_4, m_1, m_2, m_3$
$P(m_4) = w_1, w_4, w_3, w_2$ $\quad P(w_4) = m_1, m_4, m_5, m_2, m_3$
$P(m_5) = w_1, w_2, w_4$

El baile empieza. Antes de que empiece a sonar la música, los hombres se dirigen a la mujer que más les gusta, de modo que m_1, m_4 y m_5 proponen baile a la mujer w_1, y los otros dos hombres proponen a la mujer w_4. En ese momento, hay dos parejas que se forman, al menos momentáneamente. Son las parejas (m_1, w_1) y (m_2, w_4), ya que de los hombres que les han propuesto formar pareja, éstos son los preferidos de las mujeres. En la siguiente etapa, los hombres que desean bailar y no tienen pareja se dirigen a las segundas mujeres que más les gustan. El hombre m_3 se acerca a la mujer w_3, m_4 propone baile a w_4 (recuérdese que w_4 estaba de momento emparejada con el hombre m_2) y el hombre m_5 a w_2. Con estas propuestas se forman cuatro parejas: (m_1, w_1), (m_5, w_2), (m_3, w_3) y (m_4, w_4). Sólo el hombre m_2 queda sin emparejar. Este hombre se dirige a su segunda opción y propone baile a la mujer w_2 que deja a m_5 porque le prefiere a él. Ahora m_5 queda sin emparejar y este hombre se dirige a su tercera y última opción (ya que prefiere no bailar a las otras alternativas) y se declara a w_4 que le rechaza. Aquí acaba el preceso, y las parejas están formadas. Este algoritmo forma las parejas:

$$\mu_M : \quad \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & m_5 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}$$

Se puede comprobar que esta asignación es estable.

¿Qué parejas se formarían si la tradición fuese distinta y fuera el otro lado del mercado, las mujeres, las que "sacan a bailar" a los hombres? La respuesta, como era de esperar, es que en este caso, la asignación resultante sería distinta y también estable. En el ejemplo:

$$\mu_W : \quad \begin{matrix} w_4 & w_1 & w_2 & w_3 & m_5 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{matrix}$$

Por tanto las reglas del juego cuentan ya que pueden llevar a distintas asignaciones estables.

Un caso interesante surge cuando todos los hombres coinciden en desear a la misma mujer, y todas las mujeres prefieren al mismo hombre. Pensemos en el hombre y la mujer "10"; los demás individuos son "inferiores". El siguiente ejemplo ilustra la situación y el resultado del algoritmo, según quién proponga, en este caso.

Ejemplo 5: Sean los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, con preferencias

$P(m_1) = w_1, w_2, w_3 \qquad P(w_1) = m_1, m_2, m_3$
$P(m_2) = w_1, w_2, w_3 \qquad P(w_2) = m_1, m_3, m_2$
$P(m_3) = w_1, w_3, w_2 \qquad P(w_3) = m_1, m_2, m_3$

Si proponen los hombres, se llega al emparejamiento μ_M

$$\mu_M : \quad \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix}$$

Si proponen las mujeres, la asignación que se alcanza es: μ_W

$$\begin{array}{llll} \mu_W: & w_1 & w_2 & w_3 \\ & m_1 & m_3 & m_2 \end{array}$$

Es interesante constatar que en ambas los individuos "10" forman pareja, pero el resto de la asignación es en general diferente. De hecho, es como si los individuos "10" no estuviesen en el mercado.

Algunos aspectos importantes del algoritmo de aceptación diferida son los siguientes. En primer lugar, el algoritmo siempre para en algún momento. Esto implica que siempre propone una asignación. La asignación final depende en general de qué parte del mercado propone. En la versión en la que los hombres proponen, el algoritmo selecciona la asignación μ_M. La asignación que selecciona el algoritmo es individualmente racional, y además μ_M es estable.

Dado que según proponga una parte del mercado u otra conseguimos distintos emparejamientos, es interesante comparar la asignación seleccionada por el mecanismo cuando proponen los hombres y cuando proponen las mujeres. Si comparamos las asignaciones μ_M y μ_W (según que sean los miembros de M o W quienes proponen) se puede comprobar que los hombres prefieren μ_M mientras que las mujeres prefieren la asignación μ_W. En el ejemplo 4 esta característica es fácil de comprobar.

$$\begin{array}{llllll} \mu_M: & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & m_5 \\ P(m)\downarrow & w_4 & w_1 & w_2 & w_3 & m_5 \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} \mu_W: & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & - \\ & m_2 & m_3 & m_4 & m_1 & m_5 \\ P(w)\downarrow & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

Por ejemplo, m_1 prefiere w_1 (la mujer que le asigna la regla μ_M) a w_4 (la mujer que le asigna la regla μ_W). Esto ocurre para todos los hombres. Es decir, los hombres prefieren, unánimemente, la mujer de la asignación μ_M. De modo simétrico, las mujeres están mejor si son ellas las que sacan a bailar a los hombres. Cada una de ellas, por ejemplo w_3, prefiere el hombre que le asigna la regla μ_W, en este caso m_4, al hombre que le asigna la regla μ_M, en este caso m_3. Además, en este ejemplo, el soltero es siempre el mismo hombre.

¿Son estas caraterísticas generales o sólo se dan en algunos casos particulares como el del ejemplo? La respuesta es que estas características se pueden formular de forma general. Para ello, denotamos $\mu \succsim_m \mu'$ cuando, o bien $\mu(m) \succ_m \mu'(m)$ o bien $\mu(m) \approx_m \mu'(m)$.

Teorema 1: Sea $\mu \in E(M, W, \mathcal{P})$ tal que $\mu(x) = x$ para algún $x \in M \cup W$.

Entonces $\mu'(x) = x$ para todo $\mu' \in E(M, W, \mathcal{P})$.

Definición 5: Dado $(M, W, \mathcal{P})$ decimos que μ es M-óptima si para todo $m \in M$, $\mu \succsim_m \mu'$ para todo $\mu' \in E(M, W, \mathcal{P})$. Decimos que ν es es W-óptima si para toda $w \in W$, $\nu \succsim'_m \nu$ para todo $\nu' \in E(M, W, \mathcal{P})$.

Teorema 2: (Gale & Shapley, 1962) μ_M es M-óptima y μ_W es W-óptima.

Es decir, del conjunto de asignaciones estables, el algoritmo de aceptación diferida en el que proponen los hombres lleva a la asignación estable preferida por los hombres. Del mismo modo, si proponen las mujeres, el algoritmo selecciona el elemento del conjunto de los estables preferido unánimemente por las mujeres. Además, esta propiedad de "conflicto" es más general. Se da también para otras asignaciones estables.

Teorema 3: (Kunth, 1976) Si $\mu, \mu' \in E(M, W, \mathcal{P})$, entonces
$[\mu \succsim_m \mu', \text{para todo } m \in M] \iff [\mu' \succsim_w \mu, \text{para todo } w \in W]$.

El anterior teorema dice que siempre que los hombres prefieran una asignación a otra porque en la primera están todos ellos emparejados a mujeres que les gustan más, las mujeres preferirán la segunda situación porque todas ellas estarán emparejadas con hombres más "atractivos" para ellas. Ilustraremos este resultado a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 6: Sean los conjuntos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, con preferencias

$P(m_1) = w_1, w_2, w_3, w_4 \quad P(w_1) = m_4, m_3, m_2, m_1$
$P(m_2) = w_2, w_1, w_4, w_3 \quad P(w_2) = m_3, m_4, m_1, m_2$
$P(m_3) = w_3, w_4, w_1, w_2 \quad P(w_3) = m_2, m_1, m_4, m_3$
$P(m_4) = w_4, w_3, w_2, w_1 \quad P(w_4) = m_1, m_2, m_3, m_4$

De todas las asignaciones posibles, las asignaciones estables son diez:

	w_1	w_2	w_3	w_4
μ_1	m_1	m_2	m_3	m_4
μ_2	m_2	m_1	m_3	m_4
μ_3	m_1	m_2	m_4	m_3
μ_4	m_2	m_1	m_4	m_3
μ_5	m_3	m_1	m_4	m_2
μ_6	m_2	m_4	m_1	m_3
μ_7	m_3	m_4	m_1	m_2
μ_8	m_4	m_3	m_1	m_2
μ_9	m_3	m_4	m_2	m_1
μ_{10}	m_4	m_3	m_2	m_1

La asignación $\mu_1 = \mu_M$ es la $M-$óptima, y la asignación $\mu_{10} = \mu_W$ es la $W-$óptima. Nótese que algunas asignaciones estables se pueden comparar utilizando las preferencias de todos los agentes de un lado del mercado, como es el caso de las asignaciones $\mu_1 = \mu_M$ y $\mu_{10} = \mu_W$, mientras que otras no son comparables en este sentido. Un ejemplo de las últimas son las asignaciones μ_2 y μ_3 : $\mu_3 \succsim_{m_2} \mu_2$ y al mismo tiempo $\mu_2 \succsim_{m_3} \mu_3$. Este resultado es enunciado en el siguiente toerema:

Teorema 4: El conjunto $E(M, W, \mathcal{P})$ tiene estructura reticular.

En el caso del ejemplo anterior la retícula formada por las asignaciones estables es

Preferencias de
los hombres

$\succ_M$ $\uparrow$

Orden parcial sobre

$E(M, W, \mathcal{P})$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mu_1 = \mu_M & & \\ & / & & \backslash & \\ \mu_2 & & & & \mu_3 \\ & \backslash & & / & \\ & & \mu_4 & & \\ & / & & \backslash & \\ \mu_5 & & & & \mu_6 \\ & \backslash & & / & \\ & & \mu_7 & & \\ & / & & \backslash & \\ \mu_8 & & & & \mu_9 \\ & \backslash & & / & \\ & & \mu_{10} = \mu_W & & \end{array}$$

Preferencias de

las mujeres

$\downarrow$ $\succ_W$

Orden parcial sobre
$E(M, W, \mathcal{P})$

Por lo tanto, el conjunto de asignaciones estables está parcialmente ordenado desde la mejor asignación estable para los hombres hasta la menos atractativa para ellos (la mejor para las mujeres). Otra pregunta interesante es ¿qué ocurre si comparamos μ_M o μ_W con cualquier asignación, no necesariamente estable?

Teorema 5: (Roth, 1982) No existe ningún μ individualmente racional, tal que, $\mu \succ_m \mu_M$ para todo $m \in M$. No existe ningún μ individualmente racional, tal que, $\mu \succ_w \mu_W$ para toda $w \in W$.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que en la aplicación del "algoritmo de aceptación retardada" hemos supuesto que cuando proponen los hombres, o cuando las mujeres aceptan parejas se comportan siguiendo estrictamente sus verdaderas preferencias. De hecho, sabiendo las preferencias de los agentes, este proceso podría llevarlo a cabo un árbitro externo. Una pregunta importante es qué ocurre si las preferencias de los agentes son información privada. Es decir, si los agentes son los únicos en saber sus preferencias. En este caso, podrían jugar de forma estratégica proponiendo "baile" o aceptando de una manera que no corresponda con las verdaderas preferencias pero con la finalidad de manipular el resultado, obtener una pareja más atractiva. El mecanismo de aceptación diferida es manipulable. Si los hombres proponen baile y las mujeres manipulan sus preferencias a la hora de aceptar pareja, ¡pueden alcanzar la asignación estable preferida por las mujeres!

Nótese también que si las preferencias de los agentes no son estrictas, los resultados presentados pueden cambiar.

3. El caso de las Pruebas de Aptitud para el Acceso a la Universidad

En la vida diaria nos encontramos con diversos sistemas de asignación entre distintas partes del mercado. El sistema de formar matrimonios está en general poco regulado. Sin embargo, en ámbitos muy importantes existen sistemas de asignación fijados por la administración o alguna autoridad. Este es el caso en el sistema de asignar médicos internos a hospitales, y también el de la asignación de estudiantes a universidades.

En esta sección vamos a discutir un sistema particular de asignar dos partes de un mercado. Se trata del sistema utilizado hasta el año 2001 para asignar las plazas ofrecidas por las universidades a los estudiantes. Este sistema centralizado es de gran importancia. Por un lado afecta de forma significativa a la vida y el futuro profesional de los estudiantes. Por otro, el sistema universitario supone una parte elevada del gasto en educación y, por tanto, hacer una utilización eficiente de estos recursos es importante.

En este caso los dos lados del mercado son los estudiantes, S, y las universidades, C. Ambos son conjuntos finitos, y son disjuntos. Utilizaremos la notación: $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ para el conjunto de estudiantes y $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ para el de universidades. Denotaremos por q_i la cuota de la universidad c_i (sólo tienen q_i plazas disponibles). Los participantes tienen preferencias $P(s)$ y $P(c)$ que ordenan los elementos del otro lado del mercado más la posibilidad de quedar sin plaza o dejar una vacante. Las preferencias de las universidades son sobre conjuntos de estudiantes, y supondremos que estas preferencias son consecuentes en el sentido de que si de un conjunto de estudiantes sustituimos algunos de éstos por otros mejores, el nuevo conjunto es preferido al inicial.

Una asignación en el problema $(C, S, \mathcal{P})$ es una asignación $\mu : C \cup S \longrightarrow C \cup S$, tal que:
(i) $|\mu(s)| = 1$, para todo s, con $\mu(s) = s$ si $\mu(s) \notin C$ (es decir cada estudiante puede estar sólo en una Universidad o estar fuera de ella).
(ii) $|\mu(c)| = q_c$, para todo c, y si el número de estudiantes es menor que q_c, $\mu(c)$ incluye tantas “copias” de c como sea necesario para representar las vacantes.
(iii) $\mu(s) = c$ si y sólo si $s \in \mu(C)$.

Definición 6: Se dice que un emparejamiento es individualmente racional si para todo $s_i \in S$, se cumple que $\mu(s_i) \succ_{s_i} s_i$
y para todo $c_i \in C$, se cumple que $\mu(c_i) \succ_{c_i} c_i$.

Esta definición corresponde a la idea de que ningún agente puede estar mejor sólo en el sentido de que un estudiante preferiría no estudiar que estar en la universidad que le asigna la regla, y una universidad no prefiere dejar la plaza vacante a tener al estudiante que le asigna la regla.

Definición 7: Dada una asignación para el mercado $(C, S, \mathcal{P})$ diremos que el par $(s_i, c_j) \in S \times C$ bloquea μ si:
(i) Existe $s_k \in \mu(c_j)$ tal que $s_i \succ_{c_j} s_k$; y
(ii) $c_j \succ_{s_i} \mu(s_i)$.

Definición 8: Diremos que una asignación μ es estable para $(C, S, \mathcal{P})$ si es individualmente racional y no existe ningún par (s_i, c_j) en $S \times C$ que bloquee μ.

Una característica deseable de este problema es que comparte muchas de las

buenas propiedades del mercado del matrimonio que hemos visto antes. En particular:
A) el conjunto de asignaciones estables es no vacío.
B) la mejor asignación para los estudiantes ($S-$óptima) es la peor para las facultades y
C) la mejor asignación para las facultades ($C-$óptima) es la peor para los estudiantes.

Veamos ahora cómo ha funcionado el sistema de emparejamiento en España durante los últimos años. Este análisis ha sido llevado a cabo por Mora y Romero (1999, 2002). El algoritmo que se utilizaba hasta hace un curso es un algoritmo de aceptación diferida, "las Pruebas de Aptitud de Acceso a la Universidad" (a las que nos referiremos como "PAAU" a partir de ahora). El sistema era el siguiente. En primer lugar, los estudiantes rellenan unos impresos en los que deben señalar un número limitado y ordenado (de seis a ocho) opciones. Después los estudiantes se ordenan en función de su nota, de mayor a menor. A continuación se toma al primero (en caso de empate entre varios estudiantes se acude a una ordenación arbitraria) y se le empareja provisionalmente con la primera opción de su orden. Se procede de este modo con todos los estudiantes. Si la primera opción está disponible se le asigna ésta (provisionalmente). Si no lo está, se desciende en su orden hasta encontrar en éste una facultad que tenga todavía plazas disponibles. Cuando todos los estudiantes han sido colocados, no quedan centros en su lista, o no quedan plazas a las que acceder, finaliza el algoritmo y los emparejamientos provisionales pasan a ser definitivos.

En el algoritmo de aceptación diferida PAAU sin límite de opciones para los estudiantes cuando estos declaran sus (verdaderas) preferencias se alcanza la asignación estable $S-$óptima. Cuando las preferencias no son conocidas y no hay límite máximo de opciones, los estudiantes tienen incentivos en declarar sus verdaderas preferencias. Cualquier cambio en el orden sólo puede llevarles a un resultado final peor que decir la verdad. Sin embargo, éste no es el resultado si la lista de opciones está restringida.

Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 7: Sea $C = \{c_1, c_2\}$ el conjunto de universidades o de facultades, cada una de ellas con dos plazas disponibles y $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ el conjunto de estudiantes. Las preferencias de las universidades son: $P_{c_1} = s_3, c_1, s_2, s_1$ y $P_{c_2} = s_3, s_2, s_1, c_2$. Las preferencias de los estudiantes son: $P_{s_i} = c_1, c_2, s_i$, para $i = 1, 2, 3$. En este caso la asignación estable del PAAU sin restricciones es: $\{(c_1, s_3), (c_2, s_1, s_2)\}$.

Si los estudiantes sólo pueden poner por ejemplo una universidad en la lista, la asignación anterior no es alcanzable cuando los estudiantes revelan sus verdaderas preferencias. De hecho, la asignación que se alcanza no es estable. En este ejemplo todos los estudiantes pondrían de acuerdo con sus prefenercias la universidad c_1 en la lista. La asignación resultante sería $\{(c_1, s_3), (c_2), (s_1), (s_2)\}$. Esta asignación puede ser bloqueada por cualquier par que incluya a la universidad c_2 y a uno de los estudiantes s_1 o s_2.

El hecho de que los estudiantes pueden tender a manipular sus verdaderas preferencias para conseguir una opción más deseada en un mecanismo que limita el número de opciones está parcialmente avalado por los datos si tenemos en cuenta una encuesta realizada en 1990 a cerca de 8.000 estudiantes universitarios y 3.770 de BUP y COU en la que se recogieron (entre otras) las respuestas a la siguiente pregunta ¿Qué carrera elegirías si tuvieses como media de nota en la PAAU (a) entre 5 y 6,5 (b) entre 6,5 y 8 (c) entre 8 y 10? Las opciones eran Arquitectura, Biológicas, Económicas, Empresariales, Ciencias de la información, Derecho, Informática, Telecomunicaciones, Medicina, Psicología, Enfermería, No sé.

Las respuestas estaban distribuidas según los siguientes porcentajes:

respuestas	$5-6,5$	$6,5-8$	$8-10$
Arquitectura	1	3	3
Biológicas	2	1	1
Económicas	6	5	3
Empresariales	7	3	2
CCInformación	3	4	3
Derecho	6	5	4
Físicas	2	1	1
Informática	2	3	2
Telecomunicaciones	0	2	7
Medicina	2	6	6
Psicología	2	1	1
Enfermería	2	3	1

Aparte del problema de elección que este tipo de comportamiento puede generar, el riesgo reside en la tentación de utilizar las preferencias expresadas por los estudiantes (interpretándolas como el verdadero deseo de seguir determinados estudios) como un indicador de los verdaderos deseos de los estudiantes y un instrumento para tomar decisiones de política universitaria.

Finalmente, quisiera destacar que la literatura de modelos de asignación bilateral es mucho más extensa de lo que estas notas pueden mostrar y tiene tanto un alto interés económico como un gran atractivo intelectual y matemático.

Bibliografía

[1] A. Alkan, *Non existence of stable threesome matchings*, Mathematical Social Sciences 16 (1986), 207-209.

[2] D. Gale, Ll. Shapley, *College Admissions and Stability of Marriage*, American Mathematical Monthly 69 (1962), 9-15.

[3] D. Knuth, *Mariages stables*, University Press Montreal, 1976.

[4] R. Mora, A. Romero, *Comportamiento estratégico en las admisiones universitarias: el caso español*, miemo Universidad Carlos III de Madrid, 1999.

[5] R. Mora, A. Romero, *Understanding Preference Formation in a Matching Market*, mimeo Universidad Carlos III de Madrid, 2002.

[6] A. Romero, *Implementation of Stable solutions in a Restricted Matching Market*, Review of Economic Design 3 (1998), 137-147.

[7] A. E. Roth, *The Economics of Matching: Stability and Incentives*, Mathematics of Operation Research 7 (1982), 617-628.

[8] A. E. Roth, M. Sotomayor, *Two-sided Matching: A study in Game-theoretic Modeling and Analysis*, Econometric Society Monographs, Cambridge University Press, 1990.