Nociones de Trigonometría esférica

por

José Mencía, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, *mtpmegoj@lg.ehu.es*

La *Trigonometría* ($\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$) trata del cálculo de los elementos de los triángulos ($\tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\varsigma$). En la Enseñanza básica de las Matemáticas, la Trigonometría plana tiene una importancia decisiva. La Trigonometría esférica también formaba parte de los contenidos de las Matemáticas preuniversitarias con anterioridad a 1971. Desde entonces, solamente la han cursado quienes han desarrollado estudios relativos a la Astronomía, a la Geodesia o a la Navegación. Sin embargo, a partir de conocimientos elementales de Geometría Euclídea y de las nociones básicas de la Trigonometría plana se pueden obtener fácilmente las correspondientes nociones de la esférica.

3.1 Elementos

En el Espacio Euclídeo de dimensión tres, se considera una superficie esférica de centro O. En esta esfera, los *triángulos esféricos* están determinados por tres arcos de *geodésicas*, es decir, por tres arcos de circunferencias de radio y centro los de la superficie esférica, cuyas longitudes son proporcionales a sus ángulos centrales a, b y c (figura 1). Se consideran triángulos *convexos*, es decir, triángulos tales que sus ángulos centrales son menores que π. Estos arcos, los *lados* del triángulo, se cortan dos a dos en los *vértices* A, B y C del triángulo. Se representan también por A, B

y C los ángulos menores que π que, en cada uno de los vértices, forman los arcos que lo definen, es decir, los ángulos *diedros* determinados por los planos que pasan por el centro de la esfera y contienen a los lados (*ángulos* del triángulo).

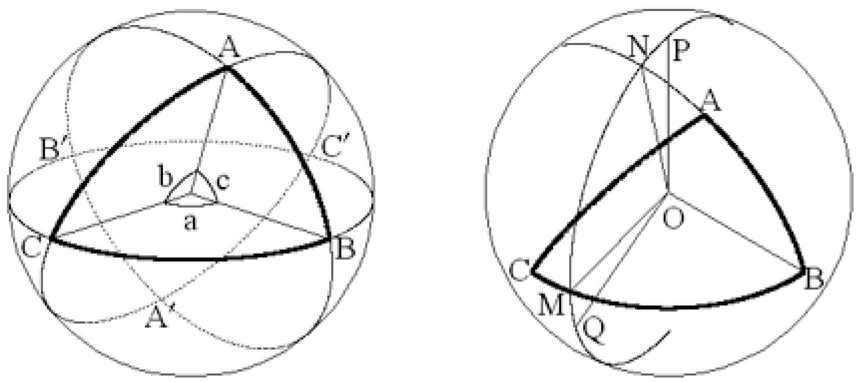

Figura 1: Elementos de un triángulo esférico.

El *polo* de un lado es el punto de la esfera y de la recta que pasa por el centro perpendicular al plano que contiene al lado, y que se encuentra en el mismo hemisferio en el que está el vértice opuesto a dicho lado. Así, en la figura 1, el punto P es el polo del lado determinado por los vértices B y C, y el punto Q, el de los vértices A y B. El *triángulo polar* de un triángulo esférico es el determinado por los polos de sus lados.

3.2 Relaciones

Los elementos de un triángulo esférico y los de su triángulo polar están estrechamente relacionados:

> *Un ángulo de un triángulo esférico y el ángulo central del lado correspondiente de su polar (determinado por los polos de los lados adyacentes al ángulo), son suplementarios.*

Consideramos la circunferencia máxima en la esfera que pasa por los polos P del lado determinado por los vértices B y C, y Q del lado determinado por A y B. Sean M y N los puntos en que esta circunferencia corta a las circunferencias que contienen a los lados anteriores, respectivamente (figura 1). Como los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ son ortogonales al vector $\overrightarrow{OB}$, también lo son los vectores $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$. Por tanto $\widehat{MON}$ es el ángulo correspondiente al vértice B. Esta primera relación se obtiene de

$$\widehat{MON} = \widehat{QON} + \widehat{MOP} - \widehat{QOP} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \widehat{QOP}. \tag{3.1}$$

Es inmediato que el triángulo polar del polar vuelve a ser el triángulo esférico original, por lo que:

> *El ángulo central de un lado de un triángulo esférico y el ángulo correspondiente de su polar, son suplementarios.*

Algunas relaciones entre los elementos de un triángulo esférico son idénticas a las de la trigonometría plana:

> *La longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos y mayor que su diferencia.*

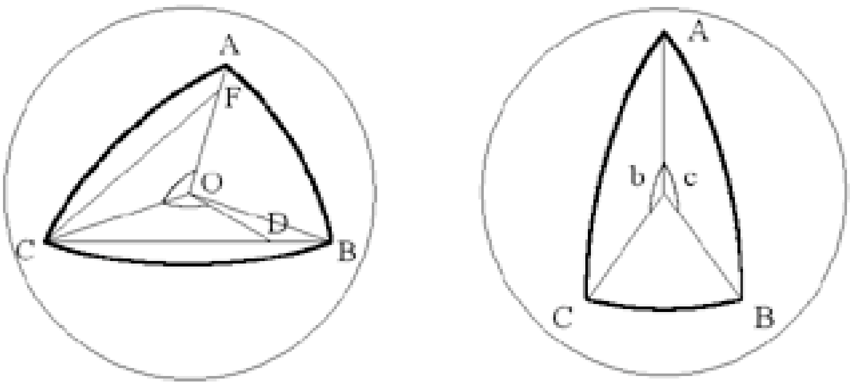

Figura 2: Desigualdad triangular y simetría.

La primera desigualdad de este enunciado es la *desigualdad triangular* en la geometría de la esfera. Se puede concluir de la desigualdad triangular de la geometría euclídea, del siguiente modo. Si $a > b$ y $a > c$, sea D el punto del segmento que une B y C de manera que $\widehat{COD} = \widehat{COF}$, y sea F el punto del segmento que une O y A tal que la distancia $\overline{OF}$ de O a F sea igual a la de O a D (figura 2). Consecuentemente $\overline{CD} = \overline{CF}$. Restando esta igualdad de la desigualdad $\overline{BC} < \overline{BF} + \overline{CF}$, se obtiene $\overline{BD} < \overline{BF}$. En los triángulos de vértices O, B y D, y de vértices O, B y F, que tienen dos lados de la misma longitud, el teorema del coseno implica que

$\widehat{BOD} < \widehat{BOF}$. De esta última desigualdad y de $\widehat{COD} = \widehat{COF}$, se sigue

$$\widehat{BOC} < \widehat{COF} + \widehat{BOF} = \widehat{AOC} + \widehat{AOB}.$$

La segunda desigualdad es, claro está, consecuencia de la primera.

Dos lados tienen la misma longitud si y sólo si sus ángulos opuestos son iguales.

Si $b = c$, el plano que pasa por el centro perpendicular a la recta determinada por B y C es plano de simetría del triángulo (figura 2). Por tanto, $B = C$. Para el recíproco, basta considerar el triángulo polar del dado.

A ángulo menor se opone lado de longitud menor y recíprocamente.

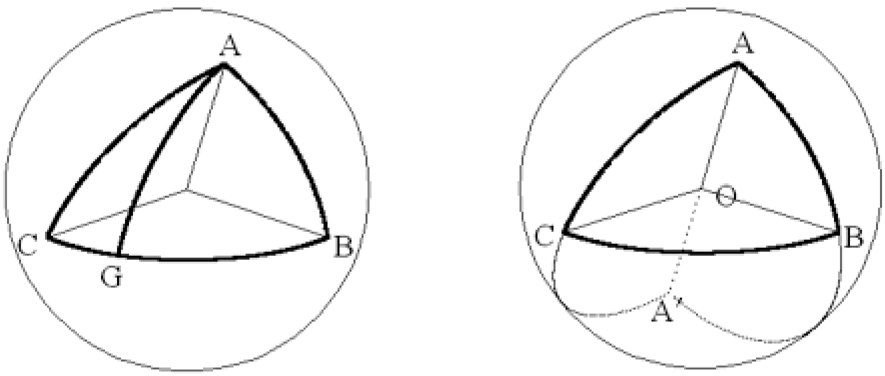

Figura 3: Relaciones entre lados y ángulos

Si $B < A$, sea G el punto del arco de circunferencia máxima que une B y C, tal que el ángulo A en el triángulo esférico determinado por los vértices A, B y G es igual al ángulo B en el determinado por los vértices A, B y C (figura 3). Entonces, por la proposición anterior, la longitud del arco que une A y G es igual a la del que une B y G, es decir, $\widehat{AOG} = \widehat{BOG}$ (figura 3). En el triángulo esférico de vértices A, C y G, se cumple que

$$\widehat{AOC} < \widehat{COG} + \widehat{AOG} = \widehat{COG} + \widehat{BOG} = \widehat{BOC},$$

es decir, $b < a$. De la relación con los elementos correspondientes del triángulo polar, se sigue el recíproco.

Las proposiciones que quedan presentan relaciones entre los elementos de un triángulo esférico que son específicas de ellos.

La suma de los ángulos centrales de los lados es menor que 2π.

Sea A' el punto antipodal del punto A (figura 3). En el triángulo esférico de vértices B, C y A', la desigualdad triangular establece $\widehat{BOC} < \widehat{BOA'} + \widehat{A'OC}$. Es obvio que $\widehat{AOB} + \widehat{BOA'} = \pi$ y $\widehat{AOC} + \widehat{COA'} = \pi$. La suma de estas tres relaciones proporciona

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} + \widehat{AOC} < 2\pi.$$

Utilizando esta proposición y la relación existente entre los elementos de los triángulos polares, se obtiene:

La suma de los ángulos es mayor que π *(y menor que* 3π*).*

3.3 Fórmulas

Mediante un procedimiento sencillo se puede hallar el 'area $\triangle(ABC)$ de la superficie esférica limitada por un triángulo esférico de vértices A, B y C, que, lógicamente, depende del radio r de la esfera:

El área del triángulo esférico determinado por los vértices A*,* B *y* C *está dada por* $(A + B + C - \pi)r^2$.

Sean A', B' y C' los puntos antipodales de A, B y C (figura 1). El triángulo esférico de vértices A, B y C y el de vértices A', B y C forman el huso esférico correspondiente al ángulo A; análogamente, para los husos de los ángulos B y C, por lo que

$$\begin{aligned}
\triangle(ABC) + \triangle(A'BC) &= \frac{A}{2\pi}4\pi r^2, \\
\triangle(ABC) + \triangle(ACB') &= \frac{B}{2\pi}4\pi r^2 \quad \text{y} \\
\triangle(ABC) + \triangle(ABC') &= \frac{C}{2\pi}4\pi r^2.
\end{aligned}$$

Considerando el hemisferio limitado por la circunferencia máxima que pasa por los puntos A y B y que contiene al punto C,

$$\triangle(ABC) + \triangle(A'BC) + \triangle(ACB') + \triangle(A'B'C)) = \frac{1}{2}4\pi r^2$$

Finalmente hay que observar que los triángulos esféricos de vértices A, B y C' y de vértices A', B' y C son simétricos respecto del punto O, por lo que de las cuatro igualdades anteriores se sigue la expresión enunciada. El número $(A+B+C-\pi)$ se conoce como el *exceso esférico* del triángulo.

Los siguientes teoremas conservan cierta analogía con sus homónimos de la trigonometría plana.

Teorema de los senos: *En un triángulo esférico, los lados y sus ángulos opuestos verifican las proporciones (primer grupo de Bessel):*

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \tag{3.2}$$

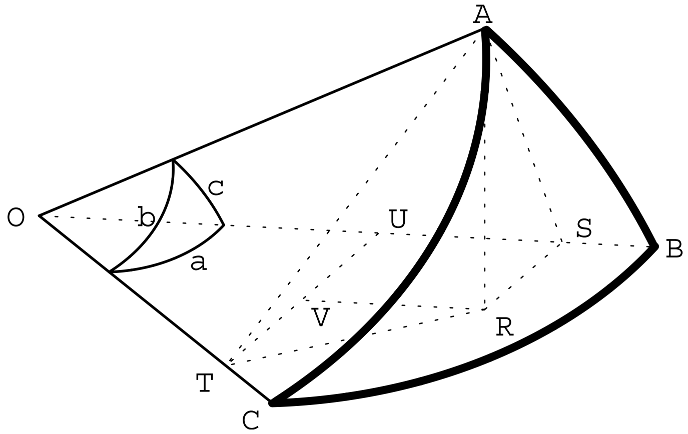

Figura 4: Teoremas de los senos y del coseno.

Sea R la proyección ortogonal de A sobre el plano determinado por O, B y C, S la de R sobre la recta que contiene a O y B, y T la de R sobre la recta que contiene a O y C (figura 4). Como $\overrightarrow{OB}$ es ortogonal a $\overrightarrow{AR}$ y a $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{OB}$ es ortogonal a $\overrightarrow{AS}$. Análogamente, $\overrightarrow{OC}$ es ortogonal a $\overrightarrow{RT}$. Por tanto, $C = \widehat{ATR}$ y $B = \widehat{ASR}$. En el triángulo rectángulo de vértices A, R y S,

$$\overline{AR} = \overline{AS}\, \sin \widehat{ASR} = \overline{OA}\, \sin c\, \sin B,$$

y, en el de vértices A, R y T,

$$\overline{AR} = \overline{AT}\, \sin \widehat{ATR} = \overline{OA}\, \sin b\, \sin C.$$

De estas últimas igualdades se sigue la segunda proporción.

Teorema del coseno: *En un triángulo esférico, cada lado y su ángulo opuesto satisfacen las igualdades (segundo grupo de Bessel):*

$$\cos a \;=\; \cos b\, \cos c + \sin b\, \sin c\, \cos A,$$

$$\begin{aligned}\cos b &= \cos c\,\cos a + \sin c\,\sin a\,\cos B \quad \text{y}\\ \cos c &= \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b\,\cos C.\end{aligned}$$

Sea U la proyección ortogonal de T sobre la recta que contiene a O y B y V la de R sobre la recta que pasa por T y es perpendicular a la recta que contiene a O y B (figura 4). Si $b \neq \frac{\pi}{2}$, V es la proyección ortogonal de R sobre la recta que contiene a T y U. Obsérvese que $\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{RV}$, que $a = \frac{\pi}{2}$ si y sólo si $T = V$ y que si $a \neq \frac{\pi}{2}$, $\widehat{RTV} = a$ ó $\widehat{RTV} = \pi - a$. En los correspondientes triángulos rectángulos y utilizando la función *signo*($\mathrm{sg(x)} = 1$ si $x > 0, \mathrm{sg}(0) = 0$ y $\mathrm{sg(x)} = -1$ si $x < 0$), es inmediato comprobar que se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}r\,\overrightarrow{OS} &= \overline{OA}\,\cos c\,\overrightarrow{OB},\\ r\,\overrightarrow{OU} &= \overline{OT}\,\mathrm{sg(\cos b)}\,\cos \mathrm{a}\,\overrightarrow{OB},\\ \overline{OT} &= \overline{OA}\,|\cos b|,\\ r\,\overrightarrow{VR} &= \overline{TR}\,\mathrm{sg(\cos C)}\,\sin \mathrm{a}\,\overrightarrow{OB},\\ \overline{TR} &= \overline{AT}\,|\cos C| \quad \text{y}\\ \overline{AT} &= \overline{OA}\,\sin b.\end{aligned}$$

Sustituyendo en la identidad $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{VR}$, se obtiene la tercera fórmula del enunciado.

Para la resolución de los posibles casos de triángulos esféricos en los que se conoce sólo algunos de sus elementos, así como para las aplicaciones de la trigonometría esférica a la *navegación*, se pueden consultar las siguientes

Referencias

Iglesias Martín, M. Asunción. Trigonometría esférica. Breve introducción a la navegación. Univ. del País Vasco, Servicio Editorial, 1996.

Gaztelu–Iturri Leicea, Ricardo e Ibáñez Fernández, Itsaso. Fundamentos de navegación marítima. Univ. del País Vasco, Servicio Editorial, 2002.